



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - Campus de Cascavel

GABRIELA DE MELO DEVENS
JULIANA TEREZINHA DE OLIVEIRA MOURA
LAÍS DRI DA ROSA
MARIANA DA ROSA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E
PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

CASCADEL
2019

GABRIELA DE MELO DEVENS
JULIANA TEREZINHA DE OLIVEIRA MOURA
LAÍS DRI DA ROSA
MARIANA DA ROSA

**METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE
MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II**

Relatório apresentado como requisito parcial da
disciplina para aprovação.

Orientadora: Prof. Ms. Pamela Gonçalves

CASCADEL
2019

AGRADECIMENTOS

Ao finalizarmos esta etapa de nossa formação, não podemos deixar de agradecer a todos que fizeram parte de nossas vidas durante este período.

Primeiramente gostaríamos de agradecer a Deus por ter nos dado esta oportunidade, por nos conceder saúde, sabedoria e forças para completarmos nosso trabalho. As nossas famílias pelo amor e pelo incentivo.

Gostaríamos de agradecer a nossa professora orientadora Pamela Gonçalves, por sempre se disponibilizar a nos ajudar, por todo suporte e orientação na preparação das atividades, durante todo o período do estágio.

Por último, gostaríamos de agradecer, a todos os professores, aos colegas e amigos da disciplina de estágio que se disponibilizaram a nos ajudar, compartilharam experiências e atividades durante o estágio.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Arcos notáveis.	30
Tabela 2: Tabela das possibilidades.	113

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Quadro dos lanches.....	101
Quadro 2: Quadro de comparação.....	112

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Brincadeiras preferidas dos 2º anos.	9
Figura 2: Expectativa de vida (anos).	9
Figura 3: Percentual de usuários.	10
Figura 4: Turistas segundo a nacionalidade.	10
Figura 5: Gráfico Múltiplo.	11
Figura 6: Uso Teodolito.	27
Figura 7: Triângulo ABC.	28
Figura 8: Arcos notáveis no triângulo.	29
Figura 9: Ângulo do arco da circunferência.	31
Figura 10: Círculo trigonométrico.	42
Figura 11: Tangente.	43
Figura 12: seno e cosseno no ciclo trigonométrico.	43
Figura 13: seno e cosseno no ciclo trigonométrico.	44
Figura 14: Redução ao primeiro quadrante.	44
Figura 15: Seno.	51
Figura 16: Função Cosseno.	52
Figura 17: Função Tangente.	52
Figura 18: Gráfico Seno.	53
Figura 19: Gráfico Cosseno.	53
Figura 20: Gráfico Tangente.	53
Figura 21: Plano cartesiano	62
Figura 22: Plano cartesiano.	63
Figura 23: Exemplo sala de aula.	63
Figura 24: Pontos no plano cartesiano.	64
Figura 25: Bissetrizes do plano.	65
Figura 26: Exemplo de distâncias.	65
Figura 27: Distância entre dois pontos.	66
Figura 28: Ponto médio.	67
Figura 29: Pontos colineares.	67
Figura 30: Cálculo determinante.	68
Figura 31: Distância entre pontos.	75
Figura 32: Retas.	77
Figura 33: tabela das retas.	77
Figura 34: Localização dos pontos.	79
Figura 35: retas concorrentes.	80
Figura 36: Tipos de retas.	89
Figura 37: Posição relativa de pontos e circunferência.	91
Figura 38: Posição relativa reta e circunferência.	92
Figura 39: Caixa de bolinhas.	119
Figura 40: Árvore de probabilidade.	122

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS.....	iv
LISTA DE QUADROS	v
LISTA DE FIGURAS.....	vi
INTRODUÇÃO	1
OPÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA.....	2
1. PLANO DE AULA 1º ENCONTRO - 10/08/2019.....	6
1.1. MATERIAL DO ALUNO - 1º ENCONTRO	14
1.2. RETATÓRIO 1º ENCONTRO.....	24
2. PLANO DE AULA 2º ENCONTRO – 17/08/2019	26
2.1. MATERIAL DO ALUNO – 2º ENCONTRO.....	33
2.2. RELATÓRIO 2º ENCONTRO.....	39
3. PLANO DE AULA 3º ENCONTRO - 24/08/2019.....	41
3.1. MATERIAL DO ALUNO 3º ENCONTRO.....	46
3.2. RELATÓRIO DE AULA 3º ENCONTRO.....	49
4. PLANO DE AULA 4º ENCONTRO – 31/08/2019	50
4.1 MATERIAL DO ALUNO 4º ENCONTRO.....	58
4.2. RELATÓRIO 4º ENCONTRO.....	60
5) PLANO DE AULA 5º ENCONTRO – 14/09/2019	61
5.1. MATERIAL DO ALUNO 5º ENCONTRO.....	69
5.2. RELATÓRIO 5º ENCONTRO.....	73
6. PLANO DE AULA 6º ENCONTRO – 21/09/2019	76
6.1. MATERIAL DO ALUNO 6º ENCONTRO.....	81
6.2. RELATÓRIO 6º ENCONTRO.....	86
7. PLANO DE AULA 7º ENCONTRO – 28/09/2019	88
7.1. MATERIAL DO ALUNO 7º ENCONTRO.....	92
7.2. RELATÓRIO 7º ENCONTRO.....	98
8. PLANO DE AULA 8º ENCONTRO – 05/10/2019	100
8.1. MATERIAL DO ALUNO 8º ENCONTRO.....	105
8.2. RELATÓRIO 8º ENCONTRO.....	107
9. PLANO DE AULA 9º ENCONTRO – 19/10/2019	108
9.1. MATERIAL DO ALUNO 9º ENCONTRO.....	114
9.2. RELATÓRIO 9º ENCONTRO.....	117
10. PLANO DE AULA 10º ENCONTRO – 26/10/2019	118

10.1. MATERIAL DO ALUNO 10º ENCONTRO.....	123
10.2. RELATÓRIO 10º ENCONTRO.....	125
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	127

INTRODUÇÃO

Esta pasta da disciplina Metodologia e Prática de Ensino de Matemática: Estágio Supervisionado II, curso de licenciatura Plena em Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas contém uma descrição das oportunidades e desafios dos momentos nos quais estivemos exercendo a prática docente no projeto PROMAT – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática é executado na UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, no Campus de Cascavel.

As aulas do Promat têm duração de três horas e quarenta minutos, com intervalo de vinte minutos, e acontecem aos sábados pela manhã, com início às 8h, e, nesse segundo semestre de 2019, contou com um cronograma de dez encontros nos meses de agosto a outubro.

O projeto é desenvolvido pelo colegiado do curso de Licenciatura em Matemática e visa atender alunos da rede pública estadual de ensino que buscam acesso aos cursos superiores. Podem participar preferencialmente alunos matriculados na 3ª série do Ensino Médio sendo possível atender alunos da 2ª e 1ª série ou egressos, caso haja vagas remanescentes.

O foco de estudos que o Promat aborda são os principais para os alunos realizarem provas tais como o Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM, e demais vestibulares, pois o projeto atua como um curso preparatório de matemática.

Na pasta de estágio do Promat encontram-se os planos de aula, relatórios, listas de atividades e materiais que foram utilizados para o desenvolvimento dos encontros aos sábados no período matutino. As aulas e materiais utilizados foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar o ensino-aprendizagem de maneira significativa, propondo aulas em que o aluno poderia expor suas dúvidas e resoluções aos demais colegas proporcionando uma interação e partilha dos conhecimentos entre nós professores e os alunos.

Além dos planos de aula e relatórios, a pasta de estágio do Promat, conta ainda com a descrição de nossa opção metodológica, explicitando os pressupostos teóricos adotados que encaminham nossa metodologia durante as dez aulas ministradas aos sábados.

Os conteúdos foram divididos em quatro módulos, sendo o primeiro módulo referente ao Tratamento de Informação, o segundo módulo sobre Trigonometria, o terceiro módulo sobre Geometria Analítica e o quarto módulo sobre Análise Combinatória.

OPÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Schoenfeld (1991), traz que os alunos veem os problemas matemáticos como apenas exercícios de prática, não esperando que façam sentido, sendo tratados desconexos com a realidade. Vemos que enunciados como “calcule e resolva” constituem a maior gama de problemas utilizados nas escolas. Segundo D’Ambrosio (1989, p. 2)

ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno assim, passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante.

Buscando dar autonomia a nossos alunos do PROMAT, planejamos os Módulos um, dois e três tendo como base a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática Resolução de Problemas. Tal escolha foi motivada, além do mencionado no parágrafo anterior, pelo fato de que os PCNs preconizam a utilização de novas metodologias, em especial, indicando a Resolução de Problemas, já que à luz desta metodologia, o aluno possa

ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos que admitem diferentes respostas em função de certas condições, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL,1998, p.42).

Tal metodologia, Resolução de Problemas, teve início com o livro de Polya *A arte de Resolver Problemas (1945)*, e após o fracasso da Matemática moderna em 1970, esta teoria veio ganhando espaço na Educação Matemática. Dentre a interpretação da Resolução de Problemas, devido aos interesses diversificados dos nossos alunos do projeto, optamos pela perspectiva dada por Branca (1997) a qual apresenta três interpretações principais para a Resolução de Problemas: Meta, Habilidade Básica e Processo.

Na primeira concepção [...]. O ensino estrutura-se primeiro em preparar o terreno para que depois o aluno possa atuar, ou seja, os currículos reforçam a necessidade do aluno possuir todas as informações e conceitos envolvidos nas situações propostas para depois estruturar o processo de resolução. A consideração importante é que aprender a resolver problemas é a razão principal para estudar matemática. A segunda concepção enfoca a Resolução de Problemas como um processo, valorizando os métodos, os procedimentos e as estratégias que os alunos usam na resolução das situações propostas [...] O ensino é centrado em ensinar a resolver problemas o que, como consequência resultaria em aprender matemática. Como habilidade básica, a Resolução de Problemas deve ser entendida como uma competência mínima para que o indivíduo possa inserir-se no mundo do conhecimento e do trabalho. A questão principal é o que essencialmente precisa ser ensinado em relação à Resolução de Problemas, levando-se em consideração o conteúdo específico, os diversos tipos de problemas e os métodos de resolução de problemas para que se alcance a aprendizagem matemática (SCHASTAI; PEDROSO, 2009, p.3).

Vemos assim, as especificidades de cada interpretação da Resolução de Problemas, já que considerando a resolução de problemas como uma Meta o foco do ensino da matemática, é fazer com que os alunos aprendam a resolver problemas. Interpretando resolução de problemas como uma Habilidade Básica, devemos preparar o aluno para cada tipo de problema trabalhando suas especificidades e formas de resolvê-los. Se tomarmos como processo, então o que importa no ensino da matemática, por meio da Resolução de Problemas, são os métodos utilizados para resolver os problemas, ou seja, o foco principal é criar habilidades e caminhos para chegar à resolução.

Durante as aulas buscamos utilizar a Resolução de Problemas de acordo com as concepções trazidas anteriormente, mas interpretando-a com mais de uma perspectiva, já que nenhuma dessas interpretações se excluem. Em especial Módulo três do PROMAT que tem como foco o Princípio Fundamental da Contagem, foi desenvolvido baseado do trabalho de CALISTI (2016) pelo PDE¹, o qual além de uma série de problemas reformulados, sugere os passos descritos por Onuchic e Allevato (2011) para a utilização da metodologia Resolução de problemas.

A preparação do problema - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. [...]. A leitura individual - entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura. A leitura em conjunto - formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. [...] A resolução do problema – a partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula; Observar e incentivar – [...] o professor [...] analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. [...]; O registro das resoluções na lousa [...]; Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. [...]; Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto. [...]; Formalização do conteúdo – Neste momento denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.85).

¹ O Programa de Desenvolvimento Educacional - PDE é uma política pública de Estado regulamentado pela **Lei Complementar nº 130**, de 14 de julho de 2010 que estabelece o diálogo entre os professores do ensino superior e os da educação básica, através de atividades teórico-práticas orientadas, tendo como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaense.

Observamos que a preparação dos problemas é uma das etapas mais importantes, já que a partir dele deseja-se gerar conceitos. Também, nas etapas de leitura individual e leitura em conjunto, é importante que se faça a leitura atenta do problema proposto. No momento da resolução, o professor deve motivar e colaborar com o trabalho investigativo. Ao observar e incentivar, o professor não é mais o centro do conhecimento, o “transmissor”, o papel do professor deve ser de ajudar os alunos a lembrar dos conhecimentos prévios que eles já têm. Já o registro no quadro se dá pela socialização dos resultados em grupo, sendo importante na discussão e plenária, ressaltar elementos importantes nas várias resoluções, e para ser efetiva é necessário a participação ativa dos alunos. Por fim, o professor deve buscar um “consenso” com a turma e formalizar o conteúdo desejado, relacionando a matemática formal com o conhecimento construído utilizando a Resolução de Problemas.

É interessante mencionar que os passos descritos por Onuchic e Allevato (2011) veem de encontro com as três perspectivas acerca da Resolução de Problemas dada por Banca (1997), uma vez que o objetivo é resolver um problema o qual, desafia, não sendo algo fácil, mas nem difícil ao ponto de desmotivar. Logo resolver o problema é um objetivo, mas para tal, é necessário que o uso de ferramentas, conteúdos, matemáticos os quais já tenha conhecimento ou venha adquirir resolvendo o problema, estando assim, contemplando as três interpretações de Resolução de Problemas dadas por Banca (1997).

Desta forma, as aulas do PROMAT foram baseadas na metodologia de ensino e aprendizagem Resolução de Problemas, ora tratando a resolução de problemas como Meta, ora como Processo e ora como Habilidade Básica, visando estimular a aprendizagem voltada para o significado da matemática e não apenas para a repetição de algoritmos.

Referências

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, vol.25, num. 41, dezembro, 2011, P. 73-98, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, Stephen, REYS, Robert E; ROBERT. **A Resolução de Problemas na Matemática escolar**. Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 4-13.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos: MEC/SEF, 1998.

D'AMBROSIO, S.B. **Como ensinar matemática hoje?**. Disponível em:

<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1953125/mod_resource/content/1/%5B1989%5D%

20DAMBROSIO%2C%20B%20-
%20Como%20Ensinar%20Matem%C3%A1tica%20Hoje.pdf>. Acesso em: 07 dez. 2019.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

SCCHASTAI, M. B.; PEDROSO, S. M. D. **A resolução de problemas numa perspectiva metodológica.** 2009. Disponível em:
<<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1573-8.pdf>>. Acesso em: 08 dez. 2019.

SCHOENFELD. A. **Porquê toda essa agitação acerca da Resolução de Problema.** Universidade da Califórnia, Berkeley, EUA. 1991.

1. PLANO DE AULA 1º ENCONTRO - 10/08/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender conceitos do Tratamento da Informação, de modo que seja capaz de identificá-los, entender suas definições bem como realizar operações com os mesmos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Tratamento da Informação, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar as informações apresentadas por meio da leitura de gráficos e tabelas.
- Interpretar exercícios envolvendo gráficos e tabelas.
- Fazer extrapolações a partir das informações disponíveis.
- Entender o conceito de medidas estatísticas como: média, mediana, variância e desvio padrão.

Conteúdo:

Tratamento da Informação.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Dinâmica de apresentação:

1. Cada aluno deve pegar um número de um a oito contidos em uma caixa. Em seguida, deve sentar-se na mesa indicada com esse número.
2. Feita a separação dos grupos, será pedido para que os alunos “conheçam” os seus colegas de grupo, em especial, cada grupo deverá saber o nome do colega sentado a sua direita, o curso que deseja cursar e o que espera do PROMAT. (5 minutos).
3. Os grupos devem levantar-se, um a um, e apresentar o nome, o curso e a expectativa do colega quanto ao PROMAT, utilizando no máximo três palavras. As professoras serão as primeiras a se apresentarem. (10 minutos).

Encaminhamento metodológico:

1. **Início da aula, apresentação do projeto e dinâmica de apresentação (30 min)**

Iniciaremos a aula nos apresentando e falando um pouco sobre o projeto PROMAT, apresentando o cronograma estabelecido e algumas informações pertinentes.

Na sequência realizaremos com os alunos a dinâmica de apresentação proposta acima, para conhecer os alunos e também para que eles interajam conosco e com o resto da turma. Além disso, a dinâmica tem como objetivo realizar uma coleta de dados acerca dos cursos superiores que nossos alunos desejam cursar, para que sirva como base para as explicações do conteúdo.

2. Apresentação do conteúdo da aula

Iniciaremos o conteúdo desta aula com algumas definições que serão entregues impressas em um material nominado como “material do aluno”, para que eles tenham fácil acesso e também para agilizarmos o encaminhamento da aula.

Uma **população** é um conjunto de elementos que tem pelo menos uma característica em comum.

Uma **amostra** é um subconjunto finito formado por elementos extraídos de uma população

Variável é uma característica ou um atributo estudado em todos os elementos da população. As variáveis podem ser classificadas em **qualitativas** ou em **quantitativas**.

Variável qualitativa: seus valores são expressos por atributos (qualidade do elemento pesquisado). Uma variável qualitativa pode ser **ordinal** ou **nominal**.

Variável qualitativa ordinal: quando seus valores podem ser ordenados.

Variável qualitativa nominal: quando seus valores não podem ser ordenados.

Variável quantitativa: seus valores são expressos por números. Uma variável quantitativa pode ser classificada como discreta ou contínua.

Variável quantitativa discreta: quando é proveniente de contagem, ou seja, é expressa por número inteiro.

Variável quantitativa contínua: quando é proveniente de medida, ou seja, é expressa por um número real (inteiro ou não).

Distribuição de frequências:

A tabela que mostra a relação entre a variável e a quantidade de vezes que cada valor se repete (frequência) é chamada de **tabela de frequências** ou **distribuição de frequências**.

Frequência absoluta (f_i): é a quantidade de vezes que cada valor é observado;

Frequência relativa (f_r): é a razão entre cada frequência absoluta e o total pesquisado e geralmente são expressos em porcentagem, para facilitar a interpretação dos dados.

Frequência absoluta acumulada (F_i): é o cálculo da soma de cada frequência absoluta com as frequências absolutas anteriores;

Frequência relativa acumulada (F_r): é o cálculo da soma de cada frequência absoluta com as frequências relativas anteriores;

3. Exercício de fixação

Neste momento pediremos aos alunos para que realizem o exercício número 1 do material do aluno, referente aos conteúdos apresentados acima, o qual corrigiremos na sequência.

4. Tipos de gráficos:

Realizaremos a explicação dos tipos de gráficos, por meio de slides, salientando as características de cada gráfico.

Gráficos de barras (verticais ou horizontais):

Os **gráficos de barras verticais** apresentam os dados por meio de colunas (retângulos) dispostas em posição vertical. A altura de cada coluna corresponde a frequência (absoluta ou relativa) dos valores observados.

Exemplo:



Figura 1: Brincadeiras preferidas dos 2º anos.

Fontes: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1699/interpretando-grafico-e-seus-elementos>.

Os **gráficos de barras horizontais** apresentam os dados por meio de colunas (retângulos) dispostas em posição horizontal. O comprimento de cada coluna corresponde a frequência (absoluta ou relativa) dos valores observados.

Exemplo:



Figura 2: Expectativa de vida (anos).

Fonte: <https://maxexcel.com.br/grafico-de-barras-horizontais/>.

Gráfico de segmentos:

Os **gráficos de segmentos** (ou **gráficos de linha**) são muito empregados para representar o comportamento de um conjunto de dados ao longo de um período. Para construir um gráfico de segmentos, adotamos um referencial parecido com o plano cartesiano, no qual os pontos correspondentes aos dados são marcados e, em seguida, unidos por meio de segmentos de reta.

Exemplo:

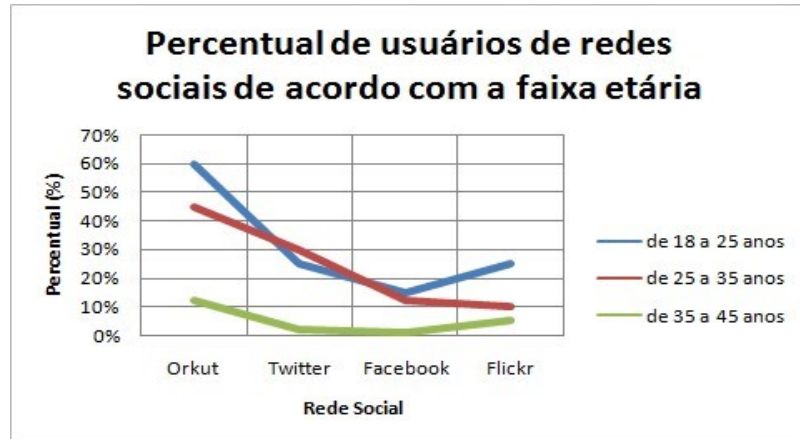


Figura 3: Percentual de usuários.

Fonte: <https://www.tecmundo.com.br/excel/1745-saiba-qual-tipo-de-grafico-representa-melhor-os-seus-dados-no-excel-2007.htm>.

Gráfico de setores:

Os **gráficos de setores** apresentam os dados em um círculo, no qual cada setor indica a frequência (absoluta ou relativa) de um valor observado.

Nesse tipo de representação, a área e o ângulo de cada setor são diretamente proporcionais a porcentagem que representam a relação ao todo (100%).

Exemplo:



Figura 4: Turistas segundo a nacionalidade.

Fonte: <https://blogdoenem.com.br/matematica-como-construcao-da-humanidade-simulado-enceja/>.

Gráfico múltiplo:

Em algumas situações é necessário representar simultaneamente duas ou mais características da amostra. Para facilitar a comparação entre características distintas, pode-se utilizar um **gráfico múltiplo**.

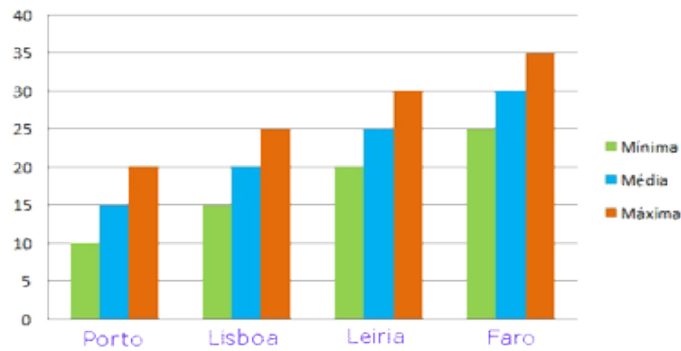


Figura 5: Gráfico Múltiplo.

Fonte: <https://www.matematica.pt/util/resumos/tipos-graficos-estatisticos.php>

5. Exercício de fixação

Neste momento pediremos aos alunos para que realizem o exercício número 2 do material do aluno, referente aos conteúdos apresentados acima, o qual corrigiremos na sequência.

6. Medidas de tendência central

Média aritmética (\bar{x}):

É o quociente obtido ao se dividir a soma das frequências da variável pelo número de valores.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Média aritmética ponderada (\bar{x}_p)

É o quociente obtido ao se dividir a soma dos produtos das frequências da variável por seus respectivos pesos pela soma dos pesos.

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

OBSERVAÇÃO:

É importante observar que a média aritmética é um caso particular da média aritmética ponderada, basta tomar $p_1=p_2=\dots=p_n=1$.

Moda (Mo)

O valor que ocorre com maior frequência no conjunto dos valores observados, chama-se de moda.

Mediana (Md)

A mediana é o valor que divide um conjunto de dados ordenados em 2 grupos com o mesmo número de valores: um grupo terá valores menores ou iguais a mediana e o outro terá valores maiores ou iguais a ela.

7. Exercício de fixação

Neste momento pediremos aos alunos para que realizem o exercício número 3 do material do aluno, referente aos conteúdos apresentados acima, o qual corrigiremos na sequência.

8. Medidas de dispersão

As **medidas de dispersão** indicam o quão próximos ou afastados os valores de um conjunto de dados estão em relação à média.

Variância

É a média aritmética dos quadrados dos desvios médios.

$$v = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^2}{n}.$$

Desvio padrão

É a média aritmética dos módulos dos desvios para a média.

$$dm = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}.$$

O desvio padrão também é a raiz quadrada da variância

$$v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^2}{n}}.$$

OBSERVAÇÕES:

- Quanto mais próximo de zero é o desvio-padrão, mais homogêneo é a distribuição de valores da variável.
- O desvio-padrão é expresso na mesma unidade da variável.

Ao final da explicação do Desvio padrão, discutiremos as conclusões que podemos obter com a análise dos dados coletados durante a dinâmica.

9. Exercício de fixação

Neste momento pediremos aos alunos para que realizem os exercícios 4 e 5 do material do aluno, referente aos conteúdos apresentados acima, os quais corrigiremos na sequência.

10. Exercícios

Solicitaremos aos alunos para que realizem os demais exercícios do material do aluno, referente ao conteúdo da aula, os quais corrigiremos na sequência.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação e resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

BARRETO FILHO, Benigno. SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática: Aula por aula**. Ensino médio, Volume único. Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed. responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 3. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Estatística Descritiva. <<https://studiumfocus.blogspot.com/2017/05/estatistica-descritiva.html>>. Acesso em: 15 jun. 2019.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações**. 1º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações**. 3º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 3º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

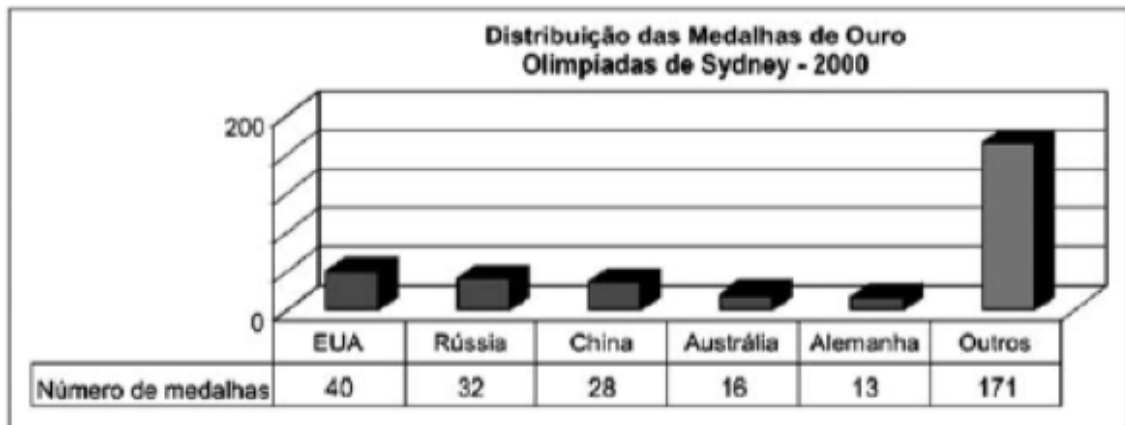
SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. Vol. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

1.1. MATERIAL DO ALUNO - 1º ENCONTRO

- 1) Classifique as variáveis (qualitativa nominal, qualitativa ordinal, quantitativa discreta, quantitativa contínua):
- Quantidade de caloria na batata frita.
 - Desfecho de uma doença (curado, não curado)
 - Classificação de uma lesão (lesão fatal; severa; moderada; pequena).
 - Grupo sanguíneo (A,B,AB,O)
 - Paridade (primeira gestação, segunda gestação, terceira ...)
 - Estado geral de um paciente (bom, regular, ruim)
 - Número de nascidos vivos em certo hospital em junho/99
 - Idade
 - Concentração de flúor na água
 - Atividade esportiva preferida

Resolução:

- Qualitativa ordinal.
 - Quantitativa contínua.
 - Qualitativa nominal.
 - Qualitativa ordinal.
 - Qualitativa ordinal.
 - Qualitativa ordinal.
 - Qualitativa ordinal.
 - Quantitativa discreta.
 - Quantitativa contínua.
 - Quantitativa contínua.
 - Qualitativa nominal.
- 2) (Enem 2004) As Olimpíadas são uma oportunidade para o conagraçamento de um grande número de países, sem discriminação política ou racial, ainda que seus resultados possam refletir características culturais, socioeconômicas e étnicas. Em 2000, nos Jogos Olímpicos de Sydney, o total de 300 medalhas de ouro conquistadas apresentou a seguinte distribuição entre os 196 países participantes como mostra o gráfico.



Esses resultados mostram que, na distribuição das medalhas de ouro em 2000:

- cada país participante conquistou pelo menos uma.
- cerca de um terço foi conquistado por apenas três países.
- os cinco países mais populosos obtiveram os melhores resultados.
- os cinco países mais desenvolvidos obtiveram os melhores resultados.
- cerca de um quarto foi conquistado pelos Estados Unidos.

Resolução:

E.U.A, Rússia e China conquistaram, conjuntamente, $40+32+28 = 100$ medalhas.

Total de medalhas: 300.

$$100/300 = 1/3.$$

Logo a questão correta é a alternativa b.

- 3) (ENEM 2018 - Adaptada) Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente. Qual é o mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado?

Resolução:

Para encontrarmos o valor da nota necessária, basta que calculemos a média das notas:

$$\bar{x} = 46 * 0,2 + 60 * 0,1 + 50 * 0,3 + x * 0,4$$

Como queremos média igual a 60, temos:

$$60 = 9,2 + 6 + 15 + 0,4x$$

$$0,4x = 60 - 30,2$$

$$0,4x = 29,8$$

$$x = \frac{29,8}{0,4}$$

$$x = 74,5.$$

4) (ENEM 2010) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados, os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e conhecimentos gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

- Marco, pois a média e a mediana são iguais.
- Marco, pois obteve menor desvio padrão.
- Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em português.
- Paulo, pois obteve maior mediana.
- Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

Resolução:

Quando os dados são mais regulares, temos um desvio padrão mais próximo de 0.

Logo a alternativa correta da questão é a letra **B**.

5) Os dados seguintes são referentes a uma amostra de diâmetros de coração de adultos normais, em mm (medidas em radiografias 36 x 43 cm):

146	125	139	132	121
135	114	114	130	169
114	130	169	125	103

- Determine a média, a moda e a mediana.
- Calcule a variância e o desvio padrão.

Resolução:

- a) Para calcular a média, basta que somemos todas as medidas e então as dividirmos pela quantidade de medidas:

$$\frac{\sum An}{n} = \frac{1966}{15} = 131,0666$$

Logo, a média é **131,0666**.

Sabemos que a moda é o valor que tem maior frequência, então basta observar o valor que mais se repete, neste caso, temos que a moda é **114**.

Para encontrarmos a mediada, basta que ordenemos as medidas e então observemos a medida central, que divide o grupo em dois pares, com medidas menores ou iguais a média e outro com medidas maiores ou iguais a média.

103 114 114 114 121 125 125 130 130 132 135 139 146 169 169

Dividindo então ao meio o segmento temos:

103 114 114 114 121 125 125 130 130 132 135 139 146 169 169

Logo a mediana é **130**.

- b) Para calcular a variância:

$$v = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^2}{n}$$

Então devemos fazer cada medida menos a média e elevar ao quadrado, obteremos assim 15 valores, somamos todos e dividimos por n que neste caso é 15.

$$v = \frac{5018,93319}{15} = 334,5955$$

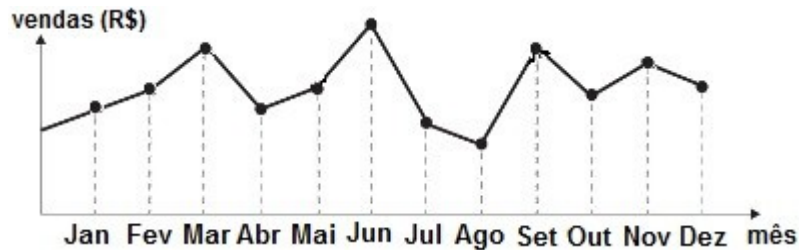
Logo a variância é **334,59555**.

Para descobrirmos o desvio padrão, sabemos que o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, então:

$$Dp = \sqrt{v} = \sqrt{334,5955} = 18,291951$$

Logo o desvio padrão é **18,291951**.

- 6) (ENEM 2012 - Adaptada) O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.



De acordo com o gráfico, quais foram os meses em que ocorreram a maior e a menor venda absoluta em 2011?

Resolução:

Análise de gráfico. O eixo das ordenadas (eixo y) representa a venda, em reais, do medicamento e o eixo das abscissas (eixo x), os meses em que estas vendas foram efetuadas. A linha vertical tracejada (no gráfico) é proporcional à quantidade vendida em cada mês, assim junho é o mês com maior venda, por apresentar maior “y” e tamanho de sua linha. O mês de agosto apresenta menor “y” e tamanho de sua linha.

7) (ENEM 2018 - Adaptada) Na teoria das eleições, o Método de Borda sugere que, em vez de escolher um candidato, cada juiz deve criar um ranking de sua preferência para os concorrentes (isto é, criar uma lista com a ordem de classificação dos concorrentes). A este ranking é associada uma pontuação: um ponto para o último colocado no ranking, dois pontos para o penúltimo, três para o antepenúltimo, e assim sucessivamente. Ao final, soma-se a pontuação atribuída a cada concorrente por cada um dos juízes.

Em uma escola houve um concurso de poesia no qual cinco alunos concorreram a um prêmio, sendo julgados por 25 juízes. Para a escolha da poesia vencedora foi utilizado o Método de Borda. Nos quadros, estão apresentados os rankings dos juízes e a frequência de cada ranking.

Colocação	Ranking			
	I	II	III	IV
1ª	Ana	Dani	Bia	Edu
2ª	Bia	Caio	Ana	Ana
3ª	Caio	Edu	Caio	Dani
4ª	Dani	Ana	Edu	Bia
5ª	Edu	Bia	Dani	Caio

Ranking	Frequência
I	4
II	9
III	7
IV	5

Qual foi a poesia vencedora? Justifique.

Resolução:

A pessoa na primeira colocação recebe 5 pontos, 4 pontos na segunda colocação e assim sucessivamente. A frequência indica a quantidade de juízes que atribuíram tal ranking para tal candidato. Analisando a tabela, podemos descobrir a pontuação de cada candidato fazendo o somatório dos produtos entre a frequência e a pontuação de cada colocação.

Ana:

$$P = 4 * 5 + 9 * 2 + 7 * 4 + 5 * 4$$

$$P = 20 + 18 + 28 + 20$$

$$P = 86$$

Bia:

$$P = 4 * 4 + 9 * 1 + 7 * 5 + 5 * 2$$

$$P = 16 + 9 + 35 + 10$$

$$P = 70$$

Caio:

$$P = 4 * 3 + 9 * 4 + 7 * 3 + 5 * 1$$

$$P = 12 + 36 + 21 + 5$$

$$P = 74$$

Dani:

$$P = 4 * 2 + 9 * 5 + 7 * 1 + 5 * 3$$

$$P = 8 + 45 + 7 + 15$$

$$P = 75$$

Edu:

$$P = 4 * 1 + 9 * 3 + 7 * 2 + 5 * 5$$

$$P = 4 + 27 + 14 + 25$$

$$P = 70$$

Logo a vencedora é a Ana.

8) (ENEM 2017) Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

ALUNO	1° PROVA	2° PROVA	3° PROVA	4° PROVA	5° PROVA
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5

Z	5	5	8	5	6
----------	---	---	---	---	---

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s)

- a) apenas o aluno Y
- b) apenas o aluno Z
- c) apenas os alunos x e y
- d) apenas os alunos x e z
- e) os alunos x, y, z

Resolução:

Como a média para a reprovação é menor que 6 então: a média do aluno $X=31/5=6,2$

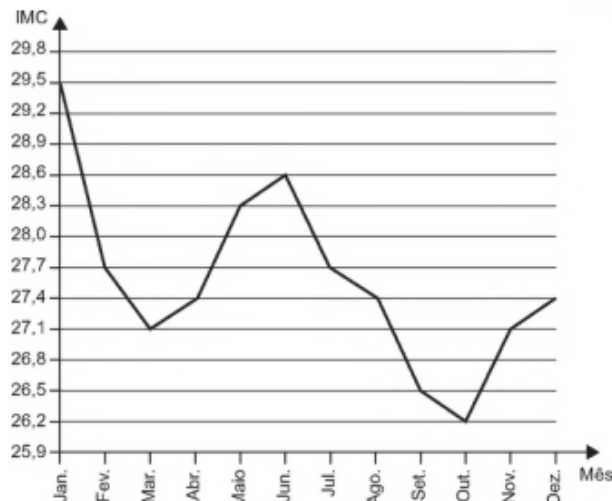
a média do aluno $Y=30/5=6$

a média do aluno $Z = 29/5=5,8$

Logo temos que o aluno Z foi reprovado.

Alternativa **B**.

9) (ENEM 2018 - Adaptada) O índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa é definido como o quociente entre a massa dessa pessoa, medida em quilograma, e o quadrado da sua altura, medida em metro. Esse índice é usado como parâmetro para verificar se o indivíduo está ou não acima do peso ideal para a sua altura. Durante o ano de 2011, uma pessoa foi acompanhada por um nutricionista e passou por um processo de reeducação alimentar. O gráfico indica a variação mensal do IMC dessa pessoa, durante o referido período. Para avaliar o sucesso do tratamento, o nutricionista vai analisar as medidas estatísticas referentes à variação do IMC.



De acordo com o gráfico, qual é a mediana da variação mensal do IMC dessa pessoa?

Resolução:

Para descobrirmos a mediana basta que ordenemos as medidas dos IMC dos meses, como a seguir:

26,2 26,5 27,1 27,1 27,4 27,4 27,4 27,7 27,7 28,3 28,6 29,5

Como temos um número par de medidas, devemos dividir em dois conjuntos de medidas da seguinte forma:

26,2 26,5 27,1 27,1 27,4 27,4 27,4 27,7 27,7 28,3 28,6 29,5

Como não temos somente uma medida central, devemos soma-las e dividir por dois:

$$Md = \frac{27,4 + 27,4}{2} = 27,4$$

Logo a mediana é 27,4.

10) (ENEM 2010 – Adaptada) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas. Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos):

Equipes	Média	Moda	Desvio-padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

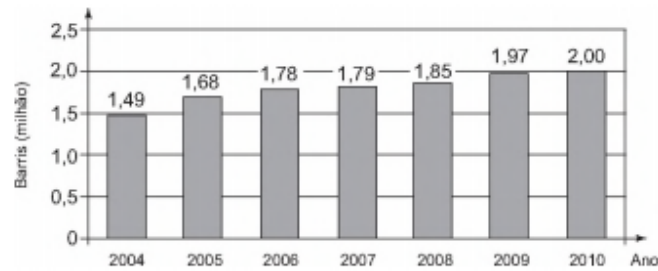
Utilizando os dados estatísticos do quadro, qual foi a equipe campeã? Justifique.

Resolução:

Como a equipe campeã é aquele em que os participantes tiverem o tempo mais se aproximar de 45, devemos observar então o desvio padrão, pois o desvio padrão nos traz quão próximo da média os valores estão, quanto menor, mais próximo da média.

Logo a equipe campeã é a equipe III.

11) O gráfico mostra a média de produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, no período de 2004 a 2010.



Estimativas feitas naquela época indicavam que a média de produção diária de petróleo no Brasil, em 2012, seria 10% superior à média dos três últimos anos apresentados no gráfico.

Disponível em: <http://blogs.estadao.com.br>. Acesso em: 2 ago. 2012.

Se essas estimativas tivessem sido confirmadas, qual seria a média de produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, em 2012?

Resolução:

Como o exercício nos diz que a média diária de 2012, será 10% mais alta que a média dos últimos 3 anos, primeiramente devemos descobrir qual o valor dessa média dos últimos 3 anos, que é:

$$\bar{x} = \frac{1,85 + 1,97 + 2,00}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{5,82}{3} = 1,94$$

Sabendo a média dos 2 últimos anos, basta calcular 10% dela:

$$10\% \text{ de } 1,94 = 0,194$$

Como sabemos que a média de 3 anos é 10% mais alta que 1,94, temos que em 2012:

$$\bar{x}_{2012} = 1,94 + 0,194 = 2,134$$

Logo a média da produção diária em 2012 é 2,134 milhões de barris.

Obs: Pode ser resolvida por regra de três.

12) O procedimento de perda rápida de “peso” é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três “pesagens” antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos “pesos”. As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três “pesagens”, os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

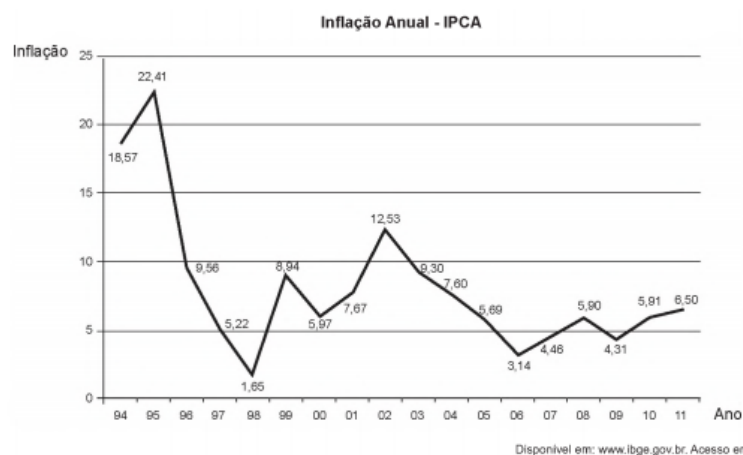
A primeira luta foi entre os atletas

- I e III.
- I e IV.
- II e III.
- II e IV.
- III e IV.

Resolução:

A primeira luta deve ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos pesos, ou seja, entre o atleta de menor desvio-padrão e o de maior desvio-padrão, respectivamente. Assim, essa luta será entre os atletas II e III, alternativa C.

13) (ENEM 2017) Um dos principais indicadores de inflação é o índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O gráfico apresenta os valores do IPCA nos anos de 1994 a 2011.



O valor mais próximo da mediana de todos os valores da inflação indicados no gráfico é :

- a) 5,97.
- b) 6,24.
- c) 6,50.
- d) 8,07.
- e) 10,10.

Resolução:

Para resolvermos este exercício, primeiramente devemos ordenar os valores da inflação do gráfico em ordem crescente e encontrar a mediana:

1,65 3,14 4,31 4,46 5,22 5,69 5,90 5,91 5,97 6,50 7,60 7,67 8,94 9,30 9,56 12,53
18,57 22,41

Temos então que a mediana é:

$$Md = \frac{5,97 + 6,50}{2} = 6,235$$

Logo o valor mais próximo é 6,24 e a alternativa correta é **B**.

1.2. RETATÓRIO 1º ENCONTRO

No dia 10 de agosto de 2019, nos encontramos nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para iniciar as atividades do PROMAT. Antes de iniciarmos as atividades do primeiro encontro, organizamos a sala de aula para a chegada dos alunos, organizamos as carteiras de modo que fossem criados grupos.

Próximo das 8 horas da manhã, os alunos foram chegando e para iniciarmos os trabalhos do primeiro encontro, estavam presentes 14 alunos. Iniciamos a aula propondo uma dinâmica de apresentação onde os alunos deveriam se conhecer no grupo e então apresentar um de seus colegas, destacando seu nome, que curso gostaria de fazer e então descrever em poucas palavras o que esperavam do Promat.

Iniciamos a dinâmica de apresentação nos apresentando e na sequência os alunos se apresentaram, após finalizar as apresentações, seguimos com uma breve explicação sobre o Promat, como seriam os encontros, apresentando o calendário do curso e pedindo que não tivessem vergonha, que participassem e tirassem suas dúvidas. Após finalizarmos as explicações prosseguimos com os conteúdos propostos para a primeira aula.

Com as informações sobre o curso que cada aluno gostaria de fazer, construímos uma tabela no quadro classificando entre as áreas: exatas, humanas e biológicas. Seguimos então a aula, o conteúdo previsto para este encontro era tratamento da informação e iniciamos pedindo aos alunos se eles tinham ideia de que conteúdo se tratava. Com isso, explicamos um

pouco sobre o conteúdo, ressaltando também que trabalharíamos com exercícios de vestibulares e ENEM neste e nos demais encontros.

Primeiramente abordamos o que era amostra e população, questionamos os alunos se eles sabiam dizer o que cada um significava, alguns alunos permaneceram quietos, sem resposta, mas dois alunos tentaram explicar cada um sem muita formalização utilizando exemplos, logo após formalizamos com eles em uma explicação sucinta apresentado exemplo.

Na sequência, apresentamos as variáveis qualitativas e quantitativas, questionando novamente os alunos, se sabiam diferenciar as duas, algumas respostas surgiram, mas não conseguiram explicar as diferenças, seguimos então explicando as grandes diferenças entre elas, como os alunos ficaram um pouco confusos com elas, adiantamos, e neste momento aplicamos o exercício 1 que estava programado para ser aplicado depois de frequências.

Deixamos um tempo para que os alunos resolvessem o exercício e então realizamos correção, ressaltando as diferenças das variáveis. Seguimos a aula, explicando os tipos de frequências e utilizando a tabela dos cursos, para explicar como lemos frequência de tabelas e gráficos.

O próximo tópico previsto era os tipos de gráficos e para apresentá-los utilizamos o projetor, onde podemos construir cada tipo de gráfico com os dados dos cursos dos alunos, ressaltando características, para qual caso os gráficos melhores se adaptam e como eles deveriam ler e observar as informações apresentadas.

Na sequência, propomos o exercício 2 do material do aluno, que se tratava de gráficos, deixamos um tempo para que os alunos realizassem e então realizamos a correção oralmente.

Até este momento, apresentados e corrigidos os exercícios, já era quase 9:40, horário programado para o intervalo, então liberamos os alunos, posteriormente continuaremos o conteúdo.

Terminado o intervalo, retornamos à sala, para prosseguir o conteúdo com as medidas de tendência central, apresentando média aritmética e média aritmética ponderada, com as devidas fórmulas de cálculo, esclarecendo as dúvidas dos alunos. Apresentamos ainda, moda e mediana, utilizando um exemplo, com uma sequência simples de números para melhor compreensão.

Após a apresentação das medidas, propomos aos alunos o exercício 3 do material do aluno. Enquanto os alunos resolviam, fomos passando pelas carteiras, esclarecendo as dúvidas e ajudando os alunos. Após a maioria ter finalizado o exercício, realizamos a correção no quadro, esclarecendo as dúvidas ainda existentes.

Prosseguimos a aula apresentando as medidas de dispersão explicando o conceito de variância e desvio padrão, ressaltando que a variância não nos fornece muita informação nestes cálculos, mas com ele, podemos descobrir o desvio padrão que nos apresenta informações valiosas. Apresentamos todo o conceito de variância e desvio padrão com um conjunto de dados, exemplificando o conceito.

Durante as explicações, percebemos que estávamos um pouco atrasados, em relação ao proposto no plano, então propomos aos alunos o exercício 4 do material do aluno, que se trata dos conteúdos apresentados anteriormente. Deixamos um tempo para que os alunos resolvessem e realizamos a correção.

Depois disso, havíamos planejado aplicar o exercício 5, mas ele possuía uma resolução extensa, então pedimos que até o término da aula, os alunos realizassem os demais exercícios e os finalizassem em casa.

Como não conseguimos realizar a correção de todos os exercícios, pedimos que caso tivessem dúvidas para resolver os exercícios, trouxessem suas dúvidas na próxima aula para serem esclarecidas.

Os alunos permaneceram realizando os exercícios, solicitando nosso auxílio quando necessário até o final da aula e finalizamos assim nosso primeiro encontro do Promat.

2. PLANO DE AULA 2º ENCONTRO – 17/08/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender conceitos de trigonometria: relações trigonométricas no triângulo retângulo, de modo que seja capaz de identificá-los, entender suas definições bem como realizar operações com os mesmos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Entender o conceito das razões trigonométricas;
- Identificar no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente;
- Calcular as razões trigonométricas;
- Entender leis formadas pelo seno e cosseno;

- Compreender o conceito de arcos;
- Entender a medida e as unidades de medida de um arco;
- Resolver exercícios que envolvem os conceitos abordados;

Conteúdo: Trigonometria.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, material impresso, projetor.

Encaminhamento metodológico:

1. Instigando a imaginação

Nesta aula iniciaremos o conteúdo de trigonometria, instigando os alunos. Perguntaremos como pode ser medido a altura da parede, dado as limitações dos materiais que dispomos (trenas, réguas, etc). Em seguida será afirmado que a altura pode ser obtida utilizando um teodolito escolar, que nada mais é do que um transferidor com um canudo, e uma trena.

Em seguida será solicitado dois voluntários para obter o ângulo formado pelo teodolito e o canudo, como mostrado na Figura 6 abaixo. As professoras medirão a distância do aluno até a parede.



Figura 6: Uso Teodolito.

Fonte: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=31743.

Anotaremos os dados no quadro, para que façamos as contas após apresentarmos as funções trigonométricas no triângulo retângulo, descritas no tópico a seguir.

2. Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Num triângulo retângulo, podemos estabelecer razões entre as medidas dos seus lados: catetos (que formam o ângulo reto) e hipotenusa (que se opõe ao ângulo reto).

Consideremos o triângulo ABC retângulo em \hat{A} e um ângulo agudo \hat{B} de medida α .

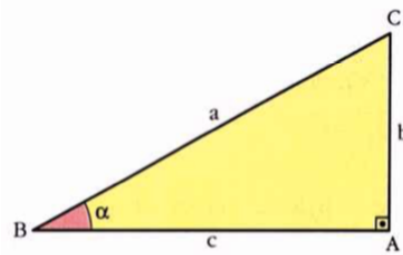


Figura 7: Triângulo ABC.

Fonte: BARRETO FILHO, Benigno. SILVA, Claudio Xavier da. Matemática: Aula por aula. Ensino médio, Volume único. Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

As medidas (na mesma unidade) a , b e c são, respectivamente, da hipotenusa, do cateto oposto a \hat{B} e do cateto adjacente a \hat{B} .

Razão 1: Seno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto e esse ângulo e da hipotenusa.

Então $\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$, com $\text{sen } \hat{B}$, lê-se “seno de \hat{B} ”.

Também escrevemos $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$, onde $\text{sen } \alpha$ lê-se “seno de α ” e entende-se “seno do ângulo da medida de α ”, ou seja:

$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto de } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

Razão 2: Cosseno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente a esse ângulo e da hipotenusa.

Então $\text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a}$, onde $\text{cos } \hat{B}$, lê-se “cosseno de \hat{B} ”.

Também escrevemos $\text{cos } \alpha = \frac{c}{a}$, onde $\text{cos } \alpha$, lê-se “cosseno de α ” e entende-se “cosseno do ângulo de medida α ”, ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}.$$

Razão 3: Tangente de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a esse ângulo.

Então $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}$, onde $\operatorname{tg} \hat{B}$, lê-se “tangente de \hat{B} ”.

Também escrevemos $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$, onde $\operatorname{tg} \alpha$, lê-se “tangente de α ” e entende-se “tangente do ângulo de medida α ”, ou seja:

$$\operatorname{tangente de } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto de } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente } \alpha}.$$

4. Arcos notáveis

Existem alguns arcos denominados de arcos notáveis, este nome é devido a grande utilização de seus valores em problemas que utilizam de trigonometria. Utilizando a relação do seno, cosseno e tangente podemos obter o valor destes ângulos utilizando um triângulo isósceles para o de 30° graus e um triângulo equilátero para obter o valor dos ângulos de 30° e 60° graus.

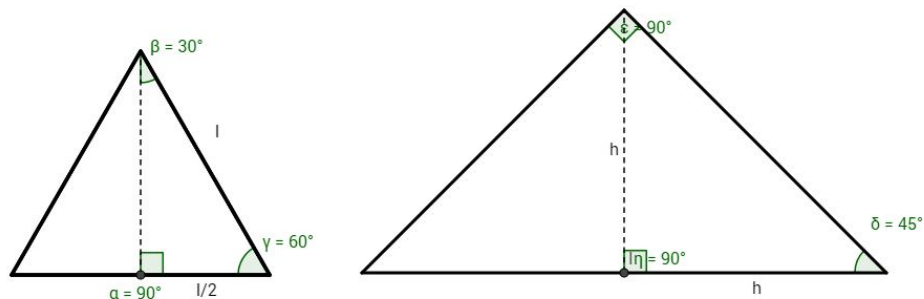


Figura 8: Arcos notáveis no triângulo.
Fonte: Acervo dos autores.

Utilizando o Teorema de Pitágoras e as relações de seno, cosseno e tangente obtemos a tabela seguinte:

ARCOS NOTÁVEIS			
	30°	45°	60°
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSENSO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1: Arcos notáveis.
Fonte: Acervo das autoras

5. Exercícios de fixação

Neste momento pediremos aos alunos para que realizem os exercícios 1 e 2 do material do aluno, referente aos conteúdos apresentados acima, os quais corrigiremos em seguida.

6. Lei dos senos e cossenos

Utilizando o GeoGebra mostraremos a Lei dos senos e Cossenos, movimentando os controles deslizantes dados nas construções, de modo a mostrar que a razão entre os lados e é mantida.

Links:

<https://www.geogebra.org/m/nrrKAqx2>- Lei dos senos.

<https://www.geogebra.org/m/phpxswqp>- Lei dos cossenos.

Lei dos senos

Em um triângulo qualquer, a razão (divisão) entre o valor da medida de um lado pelo valor do seno do ângulo oposto a ele é sempre constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R.$$

Lei dos cossenos

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados, subtraído do dobro do produto desses dois outros lados pelo cosseno do ângulo oposto ao lado inicial.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}.$$

Note que é uma lei única, possibilitando apenas a variação dos lados e, conseqüentemente, do ângulo do triângulo dado.

7. Exercícios de fixação

Neste momento pediremos aos alunos para que realizem os exercícios 3 e 4 do material do aluno, referente aos conteúdos apresentados acima, os quais corrigiremos em seguida.

8. Trigonometria no círculo

Utilizando os conhecimentos de $\sin x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$, extraídos do triângulo retângulo, vamos ampliar os conhecimentos para o conceito de arcos.

- **Arco geométrico:** é um segmento qualquer da circunferência delimitada por dois pontos, inclusive, se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta.
- **Arco e ângulo central:** todo arco de circunferência tem um ângulo central unitário que subtende.

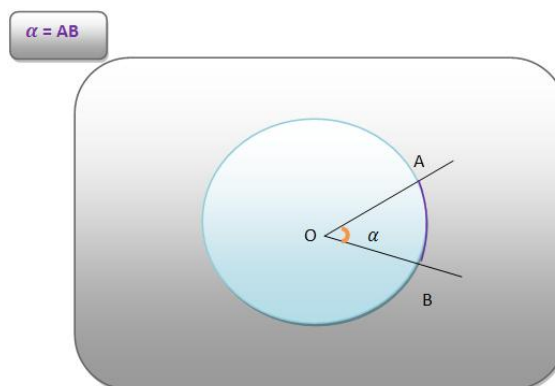


Figura 9: Ângulo do arco da circunferência.

Fonte: <https://www.colegioweb.com.br/angulos-e-arcos-na-circunferencia-potencia-de-ponto/angulos-na-circunferencia.html>.

9. Unidades de medida de arcos

Graus (símbolo $^{\circ}$) é um arco unitário igual a volta completa da circunferência que contém o arco a ser medido, ou seja, quando dividimos a circunferência em 360 partes uma delas representa 1 grau.

Radianos (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao ângulo da circunferência que contém o arco a ser medido.

Para sabermos quanto um arco (ou ângulo) mede em radiano, tendo sua medida em graus, ou vice-versa, podemos utilizar uma regra de três simples:

$$\frac{360^\circ}{x(\text{em graus})} = \frac{2\pi}{y(\text{em rad})}.$$

10. Medida e comprimento de arcos

A medida comprimento do arco é igual à medida do ângulo central correspondente. Geralmente, as unidades usadas para medir um arco são o grau e o radiano.

11. Exercício de fixação

Neste momento pediremos aos alunos para que realizem os exercícios 5 e 6 do material do aluno, referente aos conteúdos apresentados acima, os quais corrigiremos em seguida.

12. Exercícios

Solicitaremos aos alunos para que realizem os demais exercícios do material do aluno, referente ao conteúdo da aula, os quais corrigiremos em seguida.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação e resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

BARRETO FILHO, Benigno. SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática**: Aula por aula. Ensino médio, Volume único. Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed.responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

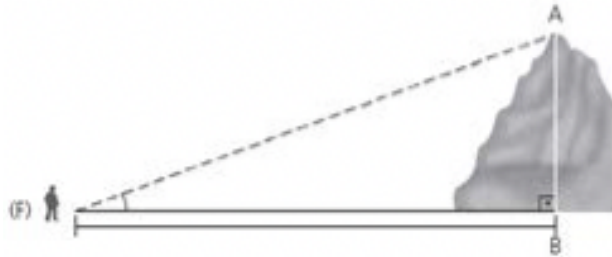
IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. 2º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática**: Ensino Médio. Vol. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

2.1. MATERIAL DO ALUNO – 2º ENCONTRO

- 1) (UEMG 2010) Na figura a seguir, um fazendeiro F dista 600 m da base da montanha (ponto B). A medida do ângulo AFB é igual a 30° . Ao calcular a altura da montanha, em metros, o fazendeiro encontrou a medida correspondente a:



- a) $200\sqrt{3}$
- b) $100\sqrt{2}$
- c) $150\sqrt{3}$
- d) $250\sqrt{2}$

Resolução:

Para resolvermos este exercício basta relacionar as relações do triângulo retângulo com o que o exercício pede. Sabemos a distância do fazendeiro até a rocha, então temos a medida do cateto FB, como queremos descobrir a medida do cateto AB, e também não temos a medida da hipotenusa, podemos utilizar a relação da tangente:

$$\tan x = \frac{\text{Cat op de } x}{\text{cat adj de } x}$$

Então, como temos o ângulo de 30° , obtemos:

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{600}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{600}$$

$$600\sqrt{3} = 3AB$$

$$AB = 200\sqrt{3}$$

Logo a altura da montanha é $200\sqrt{3}$, ou 346,41 e a alternativa correta é a letra **A**.

- 2) (ENEM 2013) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o

segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

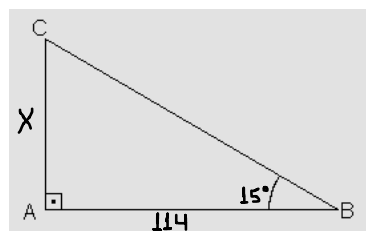


Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

- a) menor que 100m^2 .
- b) entre 100 m^2 e 300 m^2 .
- c) entre 300 m^2 e 500 m^2 .
- d) entre 500 m^2 e 700 m^2 .
- e) maior que 700 m^2 .

Resolução:

Primeiramente precisamos analisar, qual relação devemos utilizar. Como o exercício nos fornece a aproximação da tangente, vamos utiliza-la e ainda, utilizar o segmento AB, como cateto do nosso triângulo retângulo, então teremos:



Como queremos descobrir o lado da base deste prisma oblíquo, na representação esta medida será o x e então:

$$\tan 15^\circ = \frac{\text{cat op}}{\text{cat adj}} = \frac{x}{114}$$

Utilizando a aproximação para tangente de 15° , temos:

$$0,26 = \frac{x}{114}$$

$$x = 0,26 * 114$$

$$x = 29,64 .$$

Sabendo então a medida do lado, 29,64 metros, basta calcular a área da base, que se trata de um quadrado:

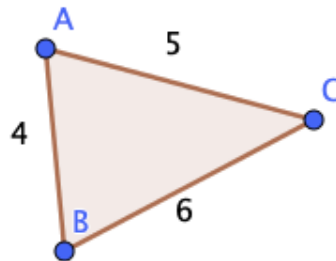
$$A_{\square} = 29,64 * 29,64 = 878,52$$

Então temos que o prédio ocupa uma área de $878,52 \text{ m}^2$, portanto a alternativa correta é a letra **E**.

3) (FUVEST) Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O cosseno do maior ângulo de T é?

Resolução:

Como temos um triângulo de lados 4,5 e 6, podemos representá-lo da seguinte forma:



Sabemos que o maior lado de um triângulo é oposto ao seu maior ângulo, então o cosseno do maior ângulo, será o cosseno do ângulo oposto ao lado de medida 6.

Como não temos informações de que tenha um ângulo reto e gostaríamos de encontrar o valor do cosseno, para resolvê-lo devemos utilizar a lei dos cossenos, da seguinte maneira:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = (a^2 - b^2 - c^2) / (2 * b * c)$$

Substituindo os valores que temos de 4,5 e 6:

$$\cos \hat{A} = \frac{6^2 - 5^2 - 4^2}{2 * 5 * 4}$$

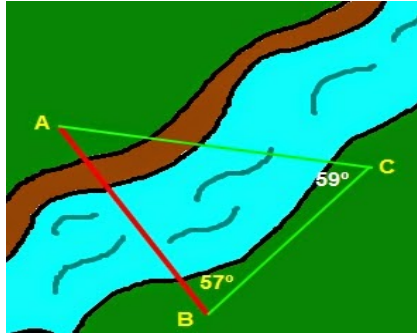
$$\cos \hat{A} = \frac{(36 - 25 - 16)}{40}$$

$$\cos \hat{A} = -\frac{5}{40}$$

$$\cos \hat{A} = -\frac{1}{8}$$

4) Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos A e B, como ilustrado na figura a seguir. Para calcular o comprimento AB, escolhe-se um ponto C, na mesma margem em que B está, e medem-se os ângulos $\mathbf{CBA} = 57^\circ$ e $\mathbf{ACB} = 59^\circ$. Sabendo

que BC mede 30m, calcule, em metros, a distância AB . (Dado: use as aproximações $\text{sen}(59^\circ) \approx 0,87$ e $\text{sen}(64^\circ) \approx 0,90$)



Resolução:

Para a resolução do exercício devemos utilizar a lei dos senos, na qual temos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R.$$

Então :

$$\frac{AB}{\text{sen } 59^\circ} = \frac{BC}{\text{sen } 64^\circ}$$

$$\frac{AB}{0,87} = \frac{30}{0,90}$$

Realizando a multiplicação, temos então a seguinte equação:

$$0,90 * AB = 30 * 0,87$$

Logo,

$$AB = \frac{26,1}{0,90} = 29$$

Logo, a distância de AB é de 29 metros.

- 5) (UFRN) Se um ângulo mede 40 graus, então quanto vale sua medida em radianos?

Resolução:

Para resolvermos este exercício, basta que relembremos a equivalência entre graus e radianos e então podemos aplicar regra de três para calcularmos a medida pedida:

Lembrando que π equivale a 180° , temos então que:

$$\frac{\pi \rightarrow 180^\circ}{x \rightarrow 40^\circ}$$

Temos então:

$$40\pi = 180x$$

$$x = \frac{40\pi}{180}$$

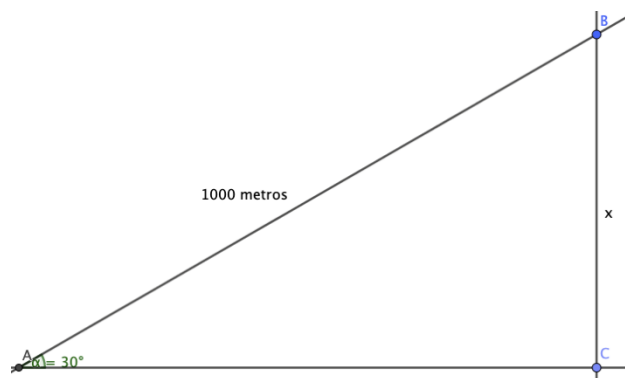
Simplificando, temos:

$$x = \frac{2\pi}{9}$$

- 6) (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30 graus (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

Resolução:

Para a resolução do exercício, temos a seguinte situação:



Como queremos descobrir a altura, estamos procurando o valor de x da imagem, então:

$$\text{sen } 30 = \frac{x}{1000}$$

$$x = 1000 * \text{sen } 30$$

$$x = 500$$

Logo o avião atingiu uma altura de 500 metros.

- 7) (MACKENZIE) Uma pessoa na margem de um rio vê o topo de uma árvore na outra margem sob um ângulo de 60° com a horizontal. Quando recua 20 metros vê o topo da mesma árvore sob um ângulo de 30° . Desprezando a altura do observador, qual é a largura do rio?

Resolução:

Chamando a altura da árvore de y e a largura do rio de x , então podemos trabalhar com a tangente.

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{y}{x}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{y}{x + 20}$$

Isolando y nas duas equações, obtemos:

$$y = \sqrt{3} * x$$

$$y = \frac{\sqrt{3} * (x + 20)}{3}$$

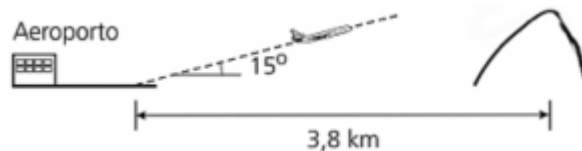
Igualando, temos:

$$\sqrt{3} * x = \frac{\sqrt{3} * (x + 20)}{3}$$

$$x = \frac{x+20}{3} \rightarrow 3x = x + 20 \rightarrow 2x = 20 \rightarrow x = 10.$$

Logo, a largura do rio é 10 metros.

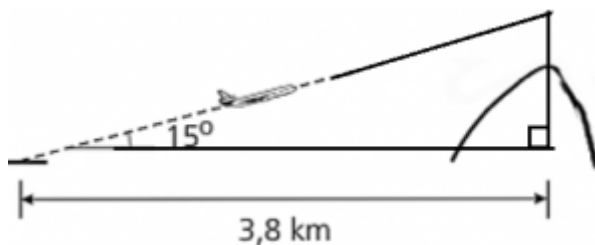
- 8) (UNICAMP – 2013) Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15° . A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura abaixo ilustra a decolagem, fora de escala. Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de



- $3,8 \tan (15^\circ) \text{ km}$.
- $3,8 \sin (15^\circ) \text{ km}$.
- $3,8 \cos (15^\circ) \text{ km}$.
- $3,8 \sec (15^\circ) \text{ km}$.

Resolução:

Utilizando as relações trigonométricas do triângulo retângulo, nota-se, pela figura abaixo, que a distância entre o ponto de decolagem e o morro é o cateto adjacente ao ângulo de 15° , enquanto a altura (h) atingida pelo vôo é o cateto oposto do triângulo retângulo em questão.



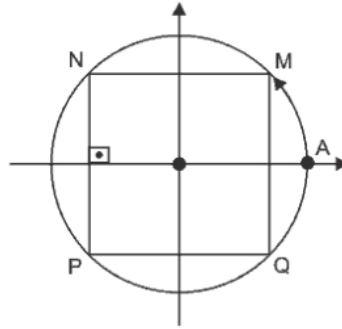
Deste modo,

$$\tan 15^\circ = \frac{h}{3,8}$$

$$h = 3,8 * \tan 15^\circ$$

Logo a alternativa correta é a letra **A**.

- 9) (UFLA) A figura MNPQ é um retângulo inscrito em um círculo. Se a medida do arco AM é $\pi/4$ rad, as medidas dos arcos AN e AP, em radianos, respectivamente, são:



- a) $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$
- b) π e $\frac{3\pi}{2}$
- c) $\frac{3\pi}{4}$ e 2π
- d) $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{4}$
- e) $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{8}$

Resolução:

Como o quadrado está dividindo a circunferência em 8 partes de medida $\frac{\pi}{4}$, temos que a resposta correta é a letra **A**.

2.2. RELATÓRIO 2º ENCONTRO

No dia 17 de agosto de 2019, nos encontramos nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para realizar o segundo encontro do Promat, onde iniciamos o conteúdo de trigonometria, abordando a trigonometria no triângulo retângulo. Neste encontro estavam presentes 25 alunos e às oito horas iniciamos à aula.

Primeiramente cumprimentamos os alunos, nos apresentando novamente, pois haviam alguns alunos novos, na sequência, recordamos o conteúdo trabalhado no encontro anterior, entregando aos novos alunos o material. Realizamos uma breve revisão oral, questionando os alunos sobre os exercícios, se haviam dúvidas ou dificuldades na lista. Como os alunos não apontaram nenhum exercício, resolvemos com eles, o exercício 5 do material do aluno do primeiro encontro, que havia gerado muitas dúvidas e assim as esclarecemos.

Após recordarmos a aula passada, prosseguimos com os conteúdos programados para esta aula. Inicialmente propomos aos alunos a ideia de medir a altura da sala e indagamos

como eles realizariam sem uma trena métrica, utilizando apenas uma fita de 1 metro, várias respostas surgiram, como subir na cadeira/mesa, empilhar mesa/cadeira.

Apresentamos então aos alunos o teodolito escolar e questionamos se eles acreditavam que conseguiríamos medir a altura com ele e a fita, os alunos permaneceram calados e receosos, duvidando. Pedimos então a colaboração de dois alunos para utilizarem o teodolito em distâncias diferentes, para podermos realizar comparações.

Com as medidas obtidas pelos alunos, realizamos no quadro o desenho da situação que estávamos abordando, mas como ainda não havíamos apresentado o conteúdo necessário, deixamos de lado as situações, para que depois pudéssemos retornar e calcular a altura da sala.

Para a apresentação das relações, construímos um triângulo retângulo, explicando seno, cosseno e tangente, relacionado aos lados do triângulo. Agora, sabendo essas relações, questionamos os alunos, se eles tinham algum palpite de como calcular a altura da sala, alguns alunos “chutaram” algumas relações e então, realizamos o cálculo da altura da sala, com a relação da tangente com as medidas obtidas com o teodolito. As medidas encontradas para a altura da sala, tiveram boa aproximação e explicamos para os alunos, que este erro é compreensível pois não temos um medidor com uma precisão cem por cento.

Prosseguimos a aula, abordando os ângulos notáveis, mostrando com os triângulos e construindo com os alunos a tabela dos ângulos de 30° , 45° e 60° . Neste momento, com as mostrações, acabamos levando um tempo maior que o esperado. Para exercitarmos e fixarmos o conteúdo apresentado até o momento, pedimos aos alunos que resolvessem os exercícios 1 e 2, os quais realizamos as correções na sequência, esclarecendo as dúvidas dos alunos.

Na sequência apresentamos aos alunos, a lei dos senos e lei dos cossenos, e para esclarecermos melhor para os alunos, realizamos com eles os exercícios 3 e 4, que abordam exatamente este conteúdo. Apresentamos ainda aos alunos, alguns vídeos do GeoGebra que abordam as leis explicadas.

Como tivemos alguns atrasos durante a aula, não conseguimos iniciar trigonometria no círculo, então finalizamos a aula após a apresentação do GeoGebra e deixamos o conteúdo final para iniciarmos na próxima aula.

3. PLANO DE AULA 3º ENCONTRO - 24/08/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender conceitos de trigonometria, de modo que seja capaz de identificá-los, entender suas definições bem como realizar operações com os mesmos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar e construir corretamente o ciclo trigonométrico;
- Identificar as razões trigonométricas no círculo;
- Identificar/calcular os valores dos arcos;
- Identificar arcos notáveis;
- Identificar arcos côngruos;
- Realizar a redução dos ângulos ao primeiro quadrante;
- Entender as relações trigonométricas;
- Aplicar as relações trigonométricas para resolver problemas;
- Calcular as razões trigonométricas;
- Resolver exercícios que envolvam o conteúdo.

Conteúdo:

Trigonometria: arcos, ângulos, unidades de medidas dos ângulos e circunferência.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, material impresso, projetor.

Encaminhamento metodológico:

1. Início da aula e encaminhamento do conteúdo

Nesta aula trabalharemos com arcos, ângulos, unidades de medidas dos ângulos e circunferência.

Iniciamos abordando a introdução de arcos e medidas utilizadas na circunferência, como proposto para a aula anterior e seguiremos o conteúdo do 3º encontro.

2. Arcos côngruos (ou congruentes)

Neste momento, para abordarmos arcos c\u00f4ngruos utilizaremos o Geogebra para realizar a apresenta\u00e7\u00e3o.

Os arcos que t\u00eam a mesma medida e diferem apenas por um n\u00famero k de voltas inteiras s\u00e3o chamados de arcos c\u00f4ngruos. De maneira geral:

- Se um arco mede α graus, a express\u00e3o geral dos arcos c\u00f4ngruos a ele \u00e9: $\alpha + k \cdot 360^\circ$, com $k \in \mathbb{Z}$.
- Se um arco mede x radianos, a express\u00e3o geral dos arcos c\u00f4ngruos a ele \u00e9: $x + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

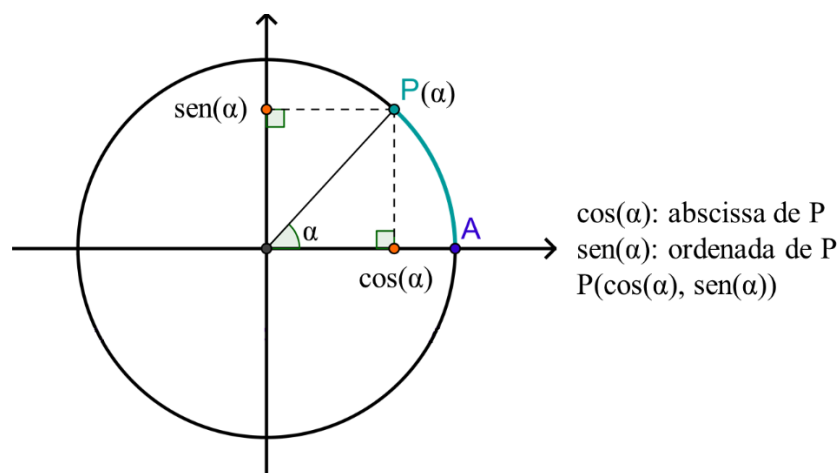


Figura 10: C\u00edrculo trigonom\u00e9trico.

Fonte: <https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/>

3. Exerc\u00edcio de Fixa\u00e7\u00e3o

Neste momento iremos propor aos alunos o exerc\u00edcio 1 do material do aluno, referente ao assunto abordado que corrigiremos na sequ\u00eancia.

4. Ciclo trigonom\u00e9trico

Seno de um \u00e2ngulo \u00e9 a proje\u00e7\u00e3o do ponto marcado por este \u00e2ngulo sobre a circunfer\u00eancia trigonom\u00e9trica (raio unit\u00e1rio) no **eixo vertical** (eixo das ordenadas y).

Cosseno de um \u00e2ngulo \u00e9 a proje\u00e7\u00e3o do ponto marcado por esse \u00e2ngulo sobre a circunfer\u00eancia trigonom\u00e9trica (raio unit\u00e1rio) no **eixo horizontal** (eixo das abscissas x).

A **Tangente** de um \u00e2ngulo, \u00e9 a medida da dist\u00e2ncia de T at\u00e9 A na circunfer\u00eancia:

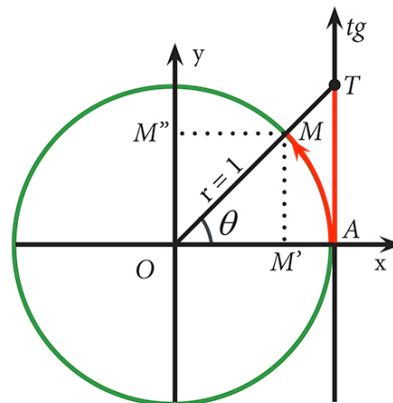


Figura 11: Tangente.

Fonte: <http://www.universiaenem.com.br/sistema/faces/pagina/publica/conteudo.xhtml?redirect=80547158241463854953597869271>

Ao eixo vertical que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto A dá-se o nome de eixo das tangentes e sua variação é a mesma do eixo das ordenadas y , considerando como origem o ponto A.

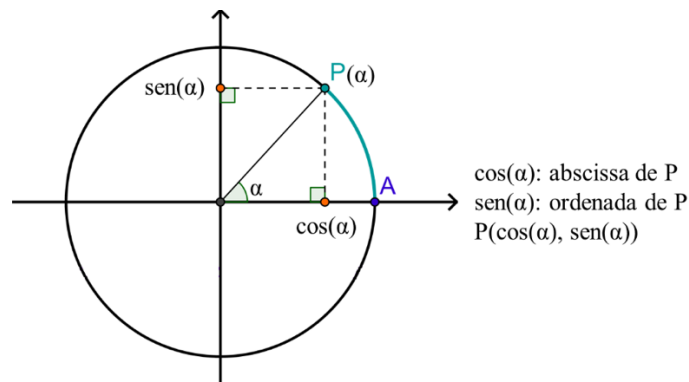


Figura 12: seno e cosseno no ciclo trigonométrico.

Fonte: <https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/>

A partir dessa definição, observa-se que, quando um arco do 1º quadrante, o ponto marcado por ele está na parte positiva do eixo das tangentes. Além disso, conforme se aumenta o valor dele, aumenta o valor da sua tangente $(0, +\infty)$, o que faz com que a tangente seja crescente no primeiro quadrante.

Partindo para o 2º quadrante, observa-se que o ponto marcado por um arco está na parte negativa do eixo das tangentes. Conforme se aumenta o valor da medida do arco, aumenta o valor da sua tangente $(-\infty, 0)$, o que faz com que a tangente seja crescente.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para os 3º e 4º quadrantes.

5. Sinal do seno e cosseno no ciclo trigonométrico

Neste momento abordaremos com os alunos o sinal do seno e cosseno em cada quadrante no ciclo trigonométrico, mostrando cada um no Geogebra.

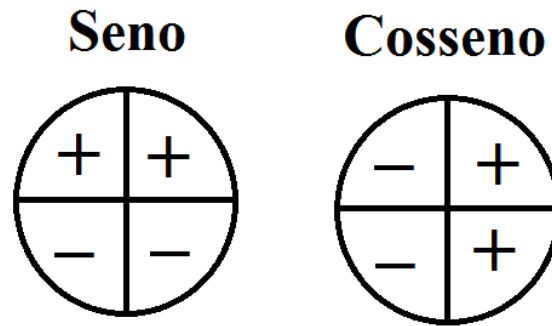
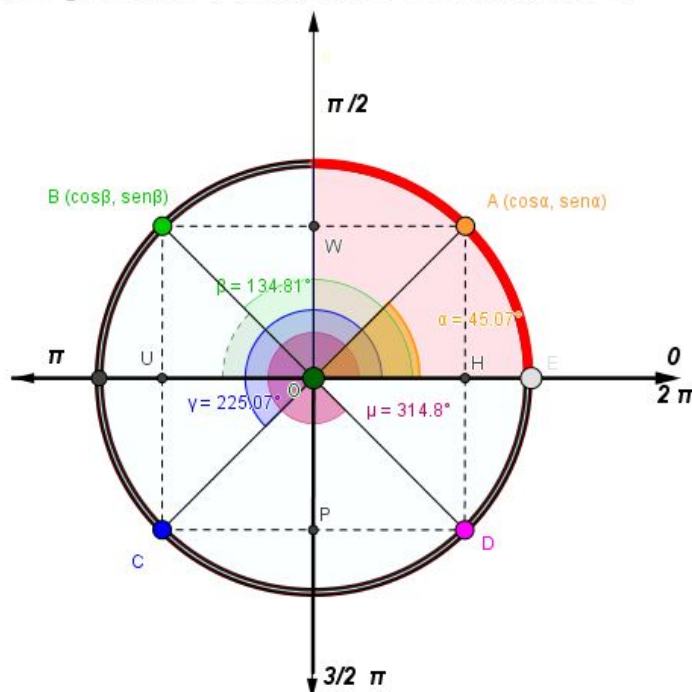


Figura 13: seno e cosseno no ciclo trigonométrico.
 Fonte: <https://renataquartieri.com/licao-de-casa-2a-serie-aula-02/>

6. Redução ao primeiro quadrante

Mostraremos para os alunos como obter o valor de Seno, Cosseno, de qualquer ângulo sabendo apenas o valor do Seno e Cosseno do primeiro quadrante, para isto utilizaremos o GeoGebra. Sendo realizado a correspondência de cada quadrante, ao primeiro, conforme é mostrado na imagem abaixo.

REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE



Temos as seguintes relações:

I- $AW = BW$ e $AH = BU$

$$\text{sen } \beta = \text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } \beta = \text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } \beta = -\text{tg } \alpha.$$

II- $CO = AO$ e $CP = AW$

$$\text{sen } \gamma = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } \gamma = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } \gamma = \text{tg } \alpha$$

III- $AO = OD$ e $AH = DH$

$$\text{sen } \mu = \text{sen}(2\pi - \mu) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } \mu = \text{cos}(2\pi - \mu) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } \mu = \text{tg}(2\pi - \mu) = -\text{tg } \alpha$$

Figura 14: Redução ao primeiro quadrante.
 Fonte: Acervo das autoras.

7. Exercício de fixação

Neste momento pediremos aos alunos para que realizem o exercício 4 do material do aluno, referente ao conteúdo de redução, abordando redução do seno, cosseno e tangente, o qual corrigiremos em seguida.

8. Relações trigonométricas

Neste tópico, abordaremos com os alunos outras relações trigonométricas, derivadas do seno e cosseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos \hat{C}$$

$$\cos \alpha = \frac{\textit{Medida do cateto adjacente de } \alpha}{\textit{Medida da hipotenusa}}$$

$$\csc x = \frac{1}{\textit{sen } x}$$

Figura 15: Outras relações trigonométricas.
Fonte: Acervo das autoras.

Neste momento apresentaremos a relação fundamental, abordando a demonstração de onde se deriva a relação: Construiremos uma circunferência centrada na origem, no quadro, então tomaremos um ponto P da circunferência, que faz um ângulo x com o eixo das abcissas e a semirreta determinada por (0,0) e P. Assim, mostraremos utilizando o “Teorema de Pitágoras” que $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ independente de qual seja o valor de x.

Relação fundamental

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1.$$

Apresentaremos ainda algumas relações, que podem ser obtidas a partir da relação fundamental, dividindo por $\text{sen}^2 x$ dos dois lados da equação, e fazendo o mesmo com $\text{cos}^2 x$:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

9. Exercício de fixação

Neste momento pediremos aos alunos para que realizem o exercício 6 do material do aluno, referente aos conteúdos apresentados acima, o qual corrigiremos em seguida.

10. Exercícios

Solicitaremos aos alunos para que realizem os demais exercícios do material do aluno, referente ao conteúdo da aula, os quais corrigiremos em seguida.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação e resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

BARRETO FILHO, Benigno. SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática: Aula por aula**. Ensino médio, Volume único. Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed.responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações**. 2º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. Vol. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

3.1. MATERIAL DO ALUNO 3º ENCONTRO

1) Qual é o arco côngruo ao ângulo de 785° ? E ao ângulo 690° ? Determine os quadrantes que os arcos côngruos a 690° e 785° pertencem.

Resolução:

Para obtermos o arco côngruo ao ângulo de 785° devemos dividir $785/360$, assim obtemos dois inteiros e um resto de 65° , logo o arco côngruo ao ângulo de 785° é 65° o qual

pertence ao primeiro quadrante. Analogamente vemos que o arco cômruo ao ângulo de 690° é 330° e que pertence ao quarto quadrante.

2) O arco 4555° pertence a qual quadrante? Qual é o seu arco cômruo?

Resolução:

Realizando a divisão de 4555 por 360 obtemos doze inteiros e mais um resto de 235, segue que o arco cômruo ao ângulo é 235° e este está no terceiro quadrante.

3) (PUC-RS) Sabendo que $\tan x = 2$, determine o valor da expressão $\frac{2 \cos x}{3 \operatorname{sen} x}$.

Resolução:

Como $2 = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ segue que $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$. Portanto $\frac{2 \cos x}{3 \operatorname{sen} x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

4) Reduza ao 1° quadrante e simplifique o máximo possível as seguintes expressões:

Sen 120°	Cos 150°
Cos 120°	Cos 210°
Tan 120°	Sen 330°

Resolução:

$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 120^\circ) = \operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	$\operatorname{Cos} 150^\circ = -\operatorname{cos} (180^\circ - 150^\circ) = -\operatorname{cos}(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\operatorname{cos} (120^\circ) = -\operatorname{cos}(180^\circ - 120^\circ) = -\operatorname{cos}(60^\circ) = -\frac{1}{2}$.	$\operatorname{Cos} 220^\circ = -\operatorname{cos} (210^\circ - 180^\circ) = -\operatorname{cos}(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\operatorname{Tan} 120^\circ = \frac{\operatorname{sen} 120^\circ}{\operatorname{cos} 120^\circ} = -\sqrt{3}$.	$\operatorname{Sen} 330^\circ = -\operatorname{sen} (360^\circ - 330^\circ) = -\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$.

5) Marque V (verdadeiro) ou F(falso) para as afirmações a seguir:

I. $\tan 92^\circ = -\tan 88^\circ$

II. $\tan 178^\circ = \tan 88^\circ$

III. $\tan 268^\circ = \tan 88^\circ$

IV. $\tan 272^\circ = -\tan 88^\circ$

Resolução:

Vamos utilizar da redução ao primeiro quadrante para analisar cada uma das alternativas.

I. Fazendo a redução do ângulo de 92° ao primeiro quadrante, obtemos o ângulo de 88° , pois $180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$. Como no primeiro quadrante a tangente é positiva e no segundo é negativa, concluímos que a afirmação I é falsa.

II. O ângulo 178° pertence ao Segundo quadrante, conseqüentemente possui sinal negativo. Já o ângulo de 88° pertence ao primeiro quadrante, tendo sinal positivo. Portanto II é falsa.

III. Utilizando da redução ao primeiro quadrante para o ângulo de 268° temos que $268^\circ - 180^\circ = 88^\circ$. Assim, os ângulos de 268° e 88° são correspondentes. Como no primeiro e terceiro quadrante a tangente é positiva e os ângulos de 268° e 88° pertencem a estes quadrantes, decorre que III é verdadeira.

IV. Utilizando da redução ao primeiro quadrante para o ângulo de 272° temos que $360^\circ - 272^\circ = 88^\circ$. Assim, os ângulos de 272° e 88° são correspondentes. Como no quarto quadrante a tangente é negativa e no primeiro quadrante a tangente é positiva, decorre que IV é verdadeira.

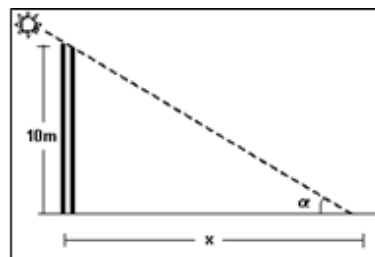
6) Dado que $\cos x = \frac{2}{5}$ calcule $\sin x$ e $\tan x$.

Resolução:

Utilizando a relação fundamental temos que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, substituindo o valor do cosseno na equação anterior decorre que $\frac{4}{25} = 1 - \sin^2 x$, segue que $\frac{21}{25} = \sin^2 x$. Portanto

$$\sin x = \frac{(21)^{\frac{1}{2}}}{5} \text{ e } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(21)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

7) Milena, diante da configuração representada ao lado, pede ajuda aos vestibulandos para calcular o comprimento da sombra x do poste, mas, para isso, ela informa que o $\sin \alpha = 0,6$. Calcule o comprimento da sombra x .



Resolução:

Da relação da tangente temos que $\tan \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha}$, disto, $10 = \frac{0,6}{\text{cos} \alpha}$, conseqüentemente temos que $\text{cos} \alpha = \frac{0,6}{10} = 0,06m$. Por outro lado, utilizando a relação do *sen* α obtemos que $\frac{10}{\text{hip}} = 0,6$, logo $\text{hip} = 60$.

Assim $\text{cos} \alpha = \frac{x}{\text{hip}}$, segue que $\text{cos} \alpha = \frac{x}{60}$. ou seja $x = \text{cos} \alpha \cdot \text{hip} = 0,06 \cdot 60 = 3,6 m$.

3.2. RELATÓRIO DE AULA 3º ENCONTRO

No dia 24 de agosto de 2019, nos encontramos nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para realizar o terceiro encontro do PROMAT. Antes de iniciarmos as atividades organizamos a sala de aula para a chegada dos alunos, organizamos as carteiras de modo que fossem criados grupos. Neste encontro haviam 22 estudantes presentes.

Iniciamos a aula cumprimentando os estudantes, em seguida realizamos a correção de dois exercícios no quadro, retomando conceitos trabalhados na aula anterior e questionado se haviam encontrado dúvidas ou dificuldades na resolução da lista.

Após isso, demos continuidade com o conteúdo referente a trigonometria falando sobre a transformação de graus para radianos, que havia sido planejado para o segundo encontro anterior, mas por falta de tempo foi realizado neste encontro. Realizamos no quadro alguns exemplos interagindo com a turma fazendo perguntas para sabermos se estavam compreendendo e respondemos os questionamentos que surgiam no decorrer das explicações.

Então, foi apresentado o que são arcos cômruos, utilizando exemplos. Com isso, solicitamos que resolvessem os exercícios 1 e 2 do material do aluno, os quais solicitavam que calculassem os arcos cômruos de alguns ângulos e determinassem a qual quadrante pertenciam. Nestes exercícios os estudantes não demonstraram muitas dúvidas e dificuldades.

Na sequência, introduzimos os conceitos de seno, cosseno e tangente na circunferência e os sinais de cada um deles dos quatro quadrantes, quando realizávamos questionamentos alguns alunos respondiam e contavam os “macetes” que utilizaram para memorizar essas informações. Em seguida, foi realizada a explicação sobre a redução ao primeiro quadrante de seno, cosseno e tangente.

Utilizando isso eles deveriam resolver as questões 4 e 5 do material do aluno. Circulamos entre os grupos para auxiliá-los nas resoluções buscando sanar as dúvidas existentes. Os membros de alguns grupos discutiam as questões e se auxiliavam nas

resoluções, outros resolviam individualmente e quando encontravam dificuldade, nos chamavam nas carteiras.

No final da aula, iniciamos a explicação sobre secante, cossecante e cotangente, a relação com seno, cosseno e tangente, e o sinal delas em cada quadrante. Já havia terminado o horário da aula e acabamos não conseguindo deixar completamente claro o que queríamos explicar. Então nos despedimos e pedimos que tentassem resolver os exercícios durante a semana e falamos retomariamos essa parte do conteúdo no início da próxima aula e responderíamos as dúvidas encontradas durante as resoluções.

4. PLANO DE AULA 4º ENCONTRO – 31/08/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender o conceito de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente, de modo que seja capaz de identificá-las, entender suas definições bem como realizar operações com as mesmas.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com relações e funções trigonométricas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Deduzir e utilizar a relação fundamental da trigonometria;
- Identificar os conjuntos domínio e imagem;
- Identificar a amplitude e periodicidade das funções;
- Compreender regularidades de operações dentro e fora do argumento;
- Identificar o gráfico correspondente as funções trigonométricas e suas variações;
- Identificar a função associada ao gráfico exposto;
- Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas.

Conteúdo:

Relações métricas e Funções trigonométricas.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, celulares, software Geogebra e listas de exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Neste encontro trataremos das funções seno, cosseno e tangente, buscando identificar aspectos importantes do comportamento dos gráficos dessas funções.

1. Funções

Partiremos do pressuposto que os alunos conhecem essas funções, dessa forma, será realizada uma breve revisão acerca da sua definição, domínio e imagem.

• SENO

A função **seno de x**, está definida em toda reta real, tendo como imagem o intervalo de menos um a um. ($f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, com $f(x) = \text{sen}(x)$). Podemos dizer que a amplitude da função seno é um, que é o menor valor do raio do círculo trigonométrico no qual a função pode ser definida.

Gráfico de f.

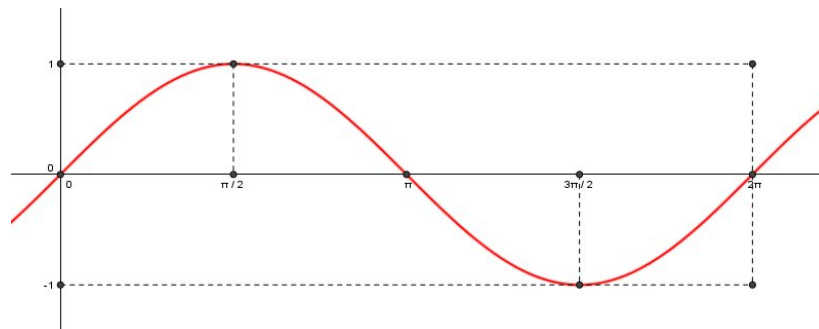


Figura 16: Seno.

Fonte: www.infoescola.com/trigonometria/seno/

• COSSENO

A função **cosseno de x**, está definida em toda reta real, tendo como imagem o intervalo de menos um a um ($g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, com $f(x) = \text{cos}(x)$). A amplitude da função cosseno é 1.

Gráfico de g.

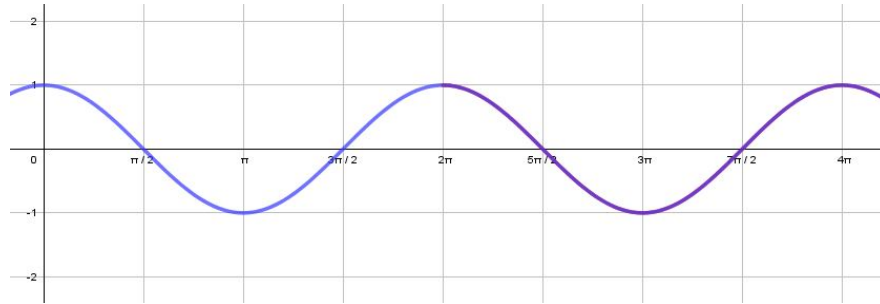


Figura 17: Função Cosseno.

Fonte: www.infoescola.com/trigonometria/cosseno/.

• TANGENTE

A função **tangente de x**, está definida em todo x tal que $\cos(x) \neq 0$, tendo como imagem toda reta real. ($h : D \rightarrow \mathcal{R}$, com $h(x) = \text{sen}(x)$, $D = \left\{ x; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$).

Gráfico de h .

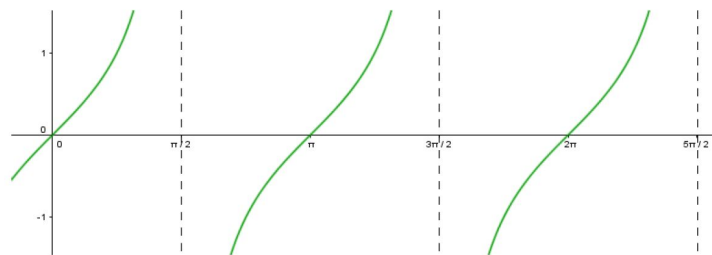


Figura 18: Função Tangente.

Fonte: www.infoescola.com/trigonometria/tangente/.

2. Período das funções trigonométricas

Trabalharemos com os alunos o período das funções trigonométricas, e o que altera quando é somado e multiplicado constantes dentro e fora do argumento dessas funções.

Primeiramente, é importante estar claro o que é uma função periódica e o que é período de uma função, como é explicado abaixo.

- Se $f(x + p) = f(x)$ para todo x pertencente ao domínio, dizemos que a função f é periódica.
- Ao menor valor positivo de p , denominamos período da função f .

Sejam f , g e h as funções seno, cosseno e tangente respectivamente, tais funções são periódicas. De fato, $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $g(x + 2k\pi) = g(x)$, e $h(x + k\pi) = h(x)$, para k inteiro. Assim, as funções seno, cosseno têm período $p = 2\pi$, e a tangente tem período igual a π . Observemos nos gráficos o que isso significa.

A partir de $x = 2\pi$, a função seno e cosseno começam a repetir seus valores. Note que transladando 2π a esquerda a parte dos gráficos em roxo, obteríamos exatamente a parte dos gráficos em azul, conseqüentemente os mesmos valores de imagem.

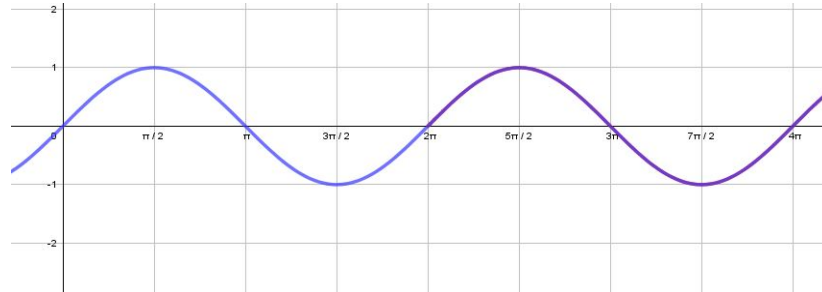


Figura 19: Gráfico Seno.
Fonte: Acervos das autoras.

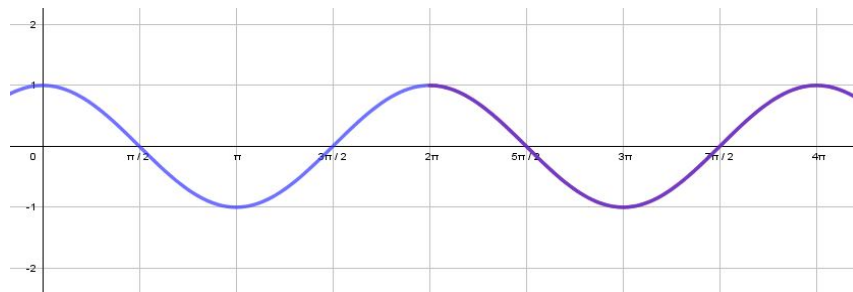


Figura 20: Gráfico Cosseno.
Fonte: Acervos das autoras.

Já a função tangente, se repete a cada intervalo de π , conforme mostra seu gráfico abaixo.

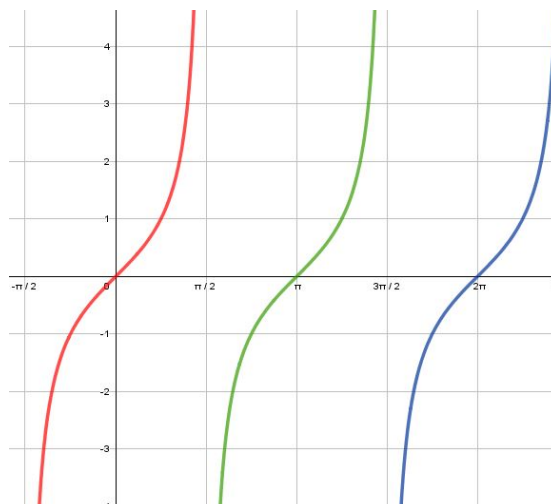


Figura 21: Gráfico Tangente.
Fonte: Acervos das autoras.

Para explicar o conceito de periodicidade dessas funções, iremos fazer uma explanação com auxílio do software Geogebra.

3. Soma e multiplicação de constantes fora e dentro do argumento

O que acontece quando somamos uma constante fora do argumento das funções trigonométricas? Iremos explorar com os alunos através da próxima atividade.

Pediremos para os alunos instalarem o aplicativo Geogebra no celular. Em seguida passaremos as instruções seguintes.

Atividade 1- $\text{sen}(x) + k$.

Insira a função $\text{sen}(x)$ e faça o que se pede.

1. Insira a função $\text{sen}(x) + 1$.

Observando os gráficos das funções acima responda:

- O período alterou? Se sim, qual o novo período?
- A amplitude mudou? Se sim, qual a nova amplitude?
- Qual é o conjunto imagem da função $\text{sen}(x) + 1$?

2. Insira a função $\text{sen}(x) - 1$.

- O período alterou? Se sim, qual o novo período?
- A amplitude mudou? Se sim, qual a nova amplitude?
- Qual é o conjunto imagem da função $\text{sen}(x) - 1$?

3. Insira a função $\text{sen}(x) - 1$.

- O período alterou? Se sim, qual o novo período?
- A amplitude mudou? Se sim, qual a nova amplitude?
- Qual é o conjunto imagem da função $\text{sen}(x) - 1$?

4. Se inserirmos a função $\text{sen}(x) + k$, k real e não nulo. O que acontece com:

- O período?
- A amplitude?
- Qual é o conjunto imagem dessa função?

Atividade 2- $\text{sen}(x + k)$.

Vamos para os alunos por meio de uma animação no Geogebra o que ocorre com a função seno quando é somado uma constante dentro do argumento da função. Questionando

os alunos o que ocorre com o gráfico, o período, a amplitude, e se o conjunto imagem se altera.

1. Se inserirmos a função $\text{sen}(x + k)$, k real e não nulo. O que acontece com:
 - a. O período?
 - b. A amplitude?
 - c. Qual é o conjunto imagem dessa função?

Atividade 3- $\text{sen}(kx)$.

Insira a função $\text{sen}(x)$ e faça o que se pede.

1. Insira a função $\text{sen}(2\pi x)$.
 - a. O período alterou? Se sim, qual o novo período?
 - b. A amplitude mudou? Se sim, qual a nova amplitude?
 - c. Qual é o conjunto imagem da função $\text{sen}(2\pi x)$?
 - d. O Que acontece com o gráfico?

2. Insira a função $\text{sen}(3\pi x)$.
 - a. O período alterou? Se sim, qual o novo período?
 - b. A amplitude mudou? Se sim, qual a nova amplitude?
 - c. Qual é o conjunto imagem da função $\text{sen}(3\pi x)$?
 - d. O que acontece com o gráfico?

3. Insira a função $\text{sen}(0,5\pi x)$.
 - a. O período alterou? Se sim, qual o novo período?
 - b. A amplitude mudou? Se sim, qual a nova amplitude?
 - c. Qual é o conjunto imagem da função $\text{sen}(3\pi x)$?
 - d. O que acontece com o gráfico?

4. Insira a função $\text{sen}(-x)$.
 - a. O período alterou? Se sim, qual o novo período?
 - b. A amplitude mudou? Se sim, qual a nova amplitude?
 - c. Qual é o conjunto imagem da função $\text{sen}(-x)$?
 - d. O que acontece com o gráfico?

5. Se inserirmos a função $\text{sen}(k\pi x)$, k real e não nulo. O que acontece com:
- O período?
 - A amplitude?
 - Qual é o conjunto imagem dessa função?
 - O que ocorre com o gráfico?

Atividade 4- $k \cdot \text{sen}(x)$.

Vamos para os alunos por meio de uma animação no Geogebra o que ocorre com a função seno quando é multiplicada uma constante fora do argumento da função. Fazendo os questionamentos abaixo.

1. Se inserirmos a função $2\text{sen}(x)$. O que acontece com:

- O período?
- A amplitude?
- Qual é o conjunto imagem dessa função?
- O que ocorre com o gráfico?

2. Se inserirmos a função $3\text{sen}(x)$. O que acontece com:

- O período?
- A amplitude?
- Qual é o conjunto imagem dessa função?
- O que ocorre com o gráfico?

3. Se inserirmos a função $0,5\text{sen}(x)$. O que acontece com:

- O período?
- A amplitude?
- Qual é o conjunto imagem dessa função?
- O que ocorre com o gráfico?

4. Se inserirmos a função $-\text{sen}(x)$. O que acontece com:

- O período?
- A amplitude?
- Qual é o conjunto imagem dessa função?

d. O que ocorre com o gráfico?

Realizado as atividades 1,2,3 e 4, faremos um “resumo” junto com os alunos o que acontece com a função seno com cada uma das alterações realizadas nas atividades anteriores. Quanto a função Cosseno, apenas explicaremos que as mesmas coisas ocorrem com ela.

Considere $f(x) = m \cdot \text{sen}(px + k\pi) + n$, com m, p, k e n reais.

- m altera o conjunto imagem da função e sua amplitude.
- p altera o período da função.
- k translada o gráfico. Se $k > 0$, o gráfico é translado para esquerda; Se $k < 0$ então o gráfico é translado para direita.
- n translada o gráfico para cima se $n > 0$ ou para baixo se $n < 0$, alterando o conjunto imagem.

4. Exercícios:

Será solicitado aos alunos que realizem os exercícios um ao quatro do material do aluno.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação e resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

BARRETO FILHO, Benigno. SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática**: Aula por aula. Ensino médio, Volume único. Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed.responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 2. 2. Ed. São Paulo: Moderna, 2013.

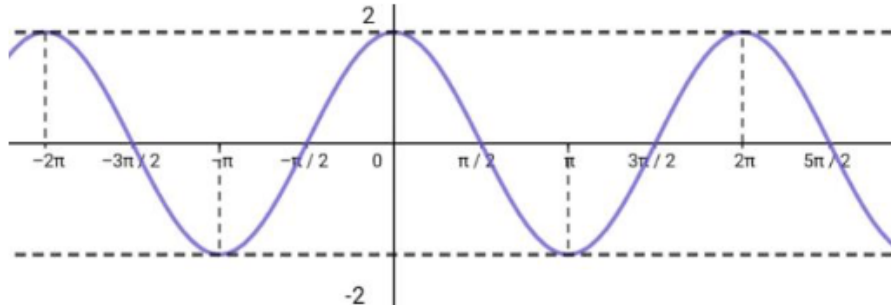
IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. 2º ano. 7. Ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2º ano. 2. Ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática**: Ensino Médio. Vol. 2. 6. Ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

4.1 MATERIAL DO ALUNO 4º ENCONTRO

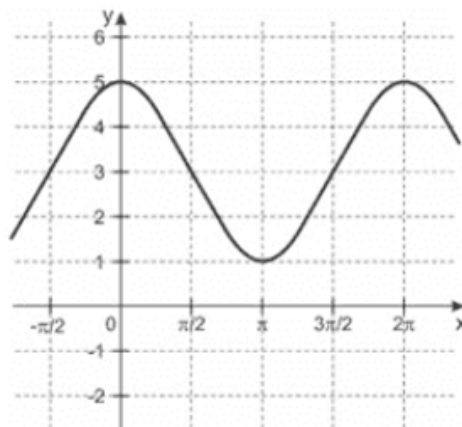
- 1) A figura a seguir mostra parte do gráfico de qual função?



Resolução:

Seja f a função correspondente ao gráfico acima, observe que $f(0)=2$ e $f(\pi/2)=0$. Como $\cos 0 = 1$ e $\cos(\pi/2)=0$ segue que a função desejada é $2 \cos x$.

- 2) (G1 - CFTMG 2015) O esboço do gráfico da função $f(x)=a+b\cos(x)$ é mostrado na figura seguinte.



Nessa situação, qual é o valor de ab ?

Resolução:

Note que

$$5=f(0)=a + b.\cos(0)=a + b \quad \text{e} \quad 3=f(\pi/2)=a + b.\cos(\pi/2)=a.$$

$$\text{Logo } 5=a + b=3 + b \text{ o que implica que } b=2.$$

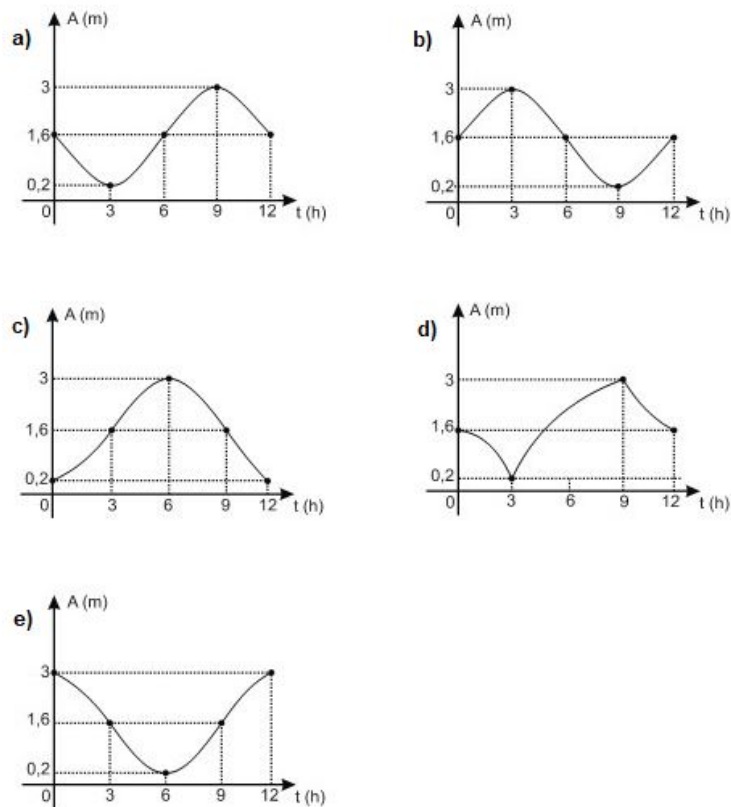
Portanto $ab=6$.

- 3) (UFPB 2012) Um especialista, ao estudar a influência da variação da altura das marés na vida de várias espécies em certo manguezal, concluiu que a altura A das marés, dada em

metros, em um espaço de tempo não muito grande, poderia ser modelada de acordo com a função:

$$A(t) = 1,6 - 1,4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} t\right).$$

Nessa função, a variável t representa o tempo decorrido, em horas, a partir da meia-noite de certo dia. Nesse contexto, conclui-se que a função A , no intervalo $[0,12]$, está representada pelo gráfico:



Resolução:

Como $A(0)=1,6$. Assim, os itens c) e e) podem ser eliminados, o item d) também pois as operações de soma e multiplicação, dentro e fora do argumento da função seno, não faz ela ter “bicos”. Fazendo $f(3)$ tem-se que $f(3)=1,6-1,4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,2$. Logo a resposta correta é o item a.

4) (UFPB 2011) Com o objetivo de aumentar a produção de alimentos em certa região, uma secretaria de agricultura encomendou a uma equipe de agrônomos um estudo sobre as potencialidades do solo dessa região. Na análise da temperatura do solo, a equipe efetuou medições diárias, durante quatro dias consecutivos, em intervalos de uma hora.

As medições tiveram início às 6 horas da manhã do primeiro dia ($t = 0$). Os estudos indicaram que a temperatura T , medida em graus Celsius, e o tempo t , representando o

número de horas decorridas após o início das observações, relacionavam-se através da expressão

$$T(t) = 26 + 5 \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas:

- () A temperatura do solo, às 6 horas da manhã do primeiro dia, foi de 23,5 °C.
- () A função $T(t)$ é periódica e tem período igual a 24 h.
- () A função $T(t)$ atinge valor máximo igual a 30 °C.
- () A temperatura do solo atingiu o valor máximo, no primeiro dia, às 14 h.

Resolução:

O primeiro item é verdadeiro, pois $t(0) = 26 + 5 \cos(4\pi/3) = 26 - 5 \cdot 0,5 = 23,5$.

Verdadeiro. Quando multiplicamos por uma constante dentro do argumento da função cosseno temos que é alterado o período. Sendo que o novo período será de $2\pi \cdot \frac{12}{\pi} = 24$ h.

A função T assume seu máximo onde a função $\cos(x)$ é igual a um, ou seja, quando $x=0$ ou $x=2\pi$. Assim $(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}) = 0$ ou $(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}) = 2\pi$. Note que o primeiro caso não pode ocorrer, pois teríamos que $t < 0$. Resolvendo o segundo caso obtemos que $t=8$. Assim $T(8) = 26 + 5 \cos(\frac{\pi}{12}8 + \frac{4\pi}{3}) = 26 + 5 = 31$.

Verdadeiro, pois o valor máximo ocorre em $t=8$, como $t=0$ corresponde às 6 h segue que $6+8=14$. Logo às 14 h a temperatura do solo tem seu valor máximo.

Logo **V, V, F e V**.

IV.2. RELATÓRIO 4º ENCONTRO

No dia 31 de agosto de 2019, nos encontramos nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para realizar o quarto encontro do Promat, onde demos continuidade ao conteúdo de trigonometria. Neste encontro estavam presentes 22 alunos.

Iniciamos a aula retomando o conteúdo da aula anterior. Utilizando slides com imagens ilustrativas de como obtém-se os valores para secante, cossecante e cotangente no ciclo trigonométrico, a relação no triângulo retângulo e os sinais de cada uma nos quatro quadrantes.

Realizamos uma breve contextualização geral de funções, explicitando as propriedades de função por meio de uma função de primeiro grau. Então apresentamos as funções seno, cosseno e tangente, apresentando o gráfico para visualizarem o domínio, a imagem e o período de cada uma das funções.

Resolvemos com eles um exercício do material do aluno para que eles observassem o comportamento do gráfico. Sempre incentivando que participassem ativamente das explicações respondendo nossos questionamentos e expondo as dúvidas para que pudéssemos auxiliá-los a superar as dificuldades que poderem encontrar nas resoluções dos exercícios propostos.

Após isso entregamos o roteiro da atividade realizada no Geogebra, havíamos pedido a eles nas aulas anteriores para instalarem o aplicativo nos celulares. Poucos haviam instalado, então pedimos que realizassem em duplas.

Realizamos algumas explicações gerais de como funciona o aplicativo e então circulávamos entre os grupos para auxiliá-los o desenvolvimento da atividade, que tinha como intuito explorar de maneira visual a soma e multiplicação de constantes dentro e fora do argumento.

Alguns grupos se familiarizaram rapidamente com o aplicativo e não encontraram dificuldades para realizar os gráficos e analisá-los, encontraram dificuldades e dúvidas para generalizar essas observações que realizaram. Então, para formalizar e esclarecer as dúvidas restantes realizamos alguns itens da atividade com eles, projetando as construções e questionado o que estava alterando em cada caso.

Como não conseguimos realizar e todos os exercícios, pedimos que tentassem resolver durante a semana e caso tivessem dúvidas para resolver os exercícios, trouxessem suas dúvidas na próxima aula para serem esclarecidas.

5) PLANO DE AULA 5º ENCONTRO – 14/09/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender conceitos de Geometria Analítica, de modo que seja capaz de identificá-los, entender suas definições bem como realizar operações com os mesmos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Localizar as coordenadas dos pontos no plano cartesiano;
- Identificar e calcular a distância entre dois pontos;

- Identificar o ponto médio de um segmento;
- Identificar pontos colineares;
- Resolver problemas que envolvam o conteúdo;

Conteúdo:

Geometria analítica: Coordenadas cartesianas no plano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, pontos colineares.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Encaminhamento metodológico:

1. Plano Cartesiano

O plano cartesiano contém dois eixos perpendiculares entre si, tendo a origem comum no ponto O. Chamamos de eixo das abscissas o eixo horizontal (x). Chamamos de eixo das ordenadas o eixo vertical (y). Estes eixos, dividem o plano em quatro regiões que chamamos de quadrantes.

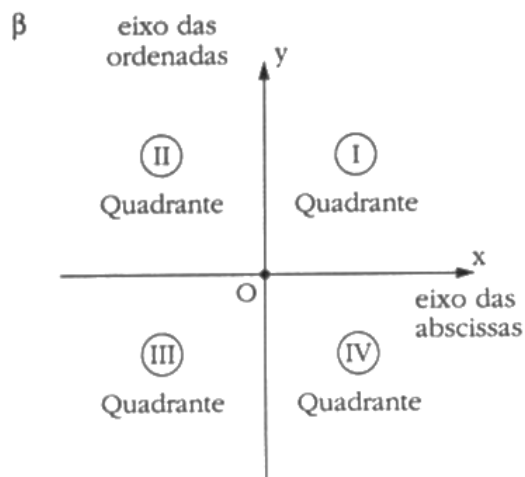


Figura 22: Plano cartesiano

Fonte: BARRETO FILHO, Benigno. SILVA, Claudio Xavier da. Matemática: Aula por aula. Ensino médio, Volume único. Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

O plano cartesiano é enumerado, compreendendo o conjunto dos números reais. A direita do eixo y e acima do eixo x, temos as coordenadas positivas e a esquerda do eixo y e abaixo do eixo x, temos as coordenadas negativas.

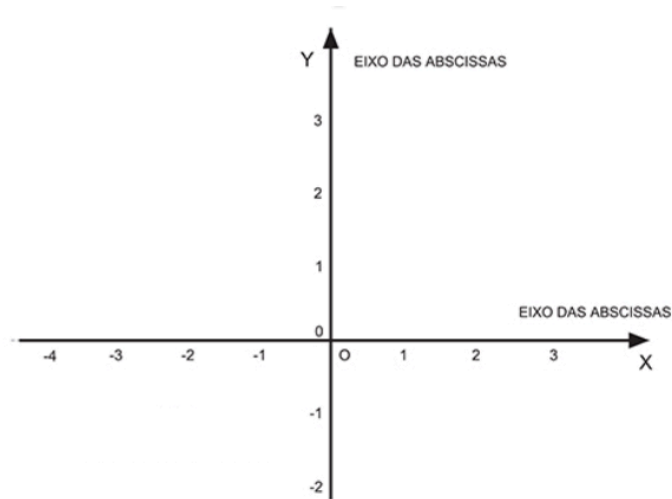


Figura 23: Plano cartesiano.

Fonte: <http://www.universiaenem.com.br/sistema/faces/pagina/publica/conteudo/texto-html.xhtml?redirect=42515498249349291776907062169>

2. Coordenadas dos pontos no plano cartesiano

Atividade:

Após abordarmos o plano cartesiano, iremos desenvolver com os alunos a seguinte atividade, com o intuito de realizar a localização de pontos no plano cartesiano:

Imaginando a sala sendo o plano cartesiano, parecido com a imagem abaixo, iniciaremos indicando nossas coordenadas como professoras e então pediremos aos alunos, que um a um fossem dizendo em que ponto da sala eles se encontram, indicando um par ordenado.

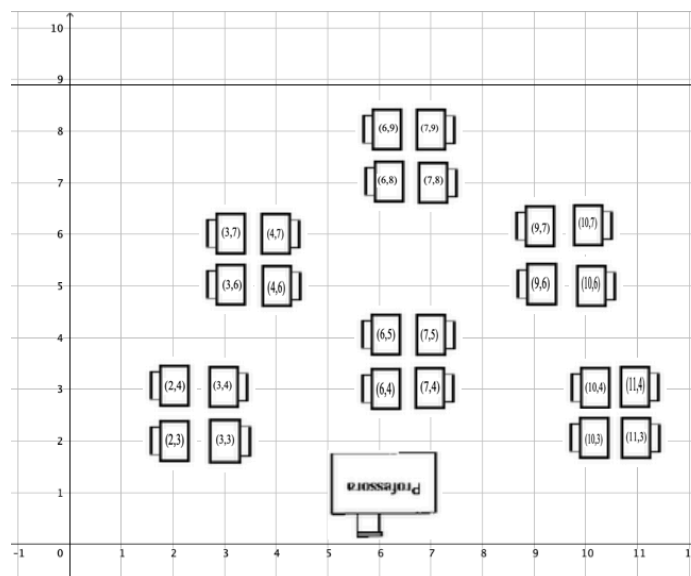


Figura 24: Exemplo sala de aula.

Fonte: Acervo das autoras.

Conforme os alunos forem indicando, como no esquema acima, realizaremos a marcação das carteiras e então formalizaremos o conteúdo.

A todo ponto **P** do plano cartesiano corresponde um par ordenado (x_p, y_p) , tal que

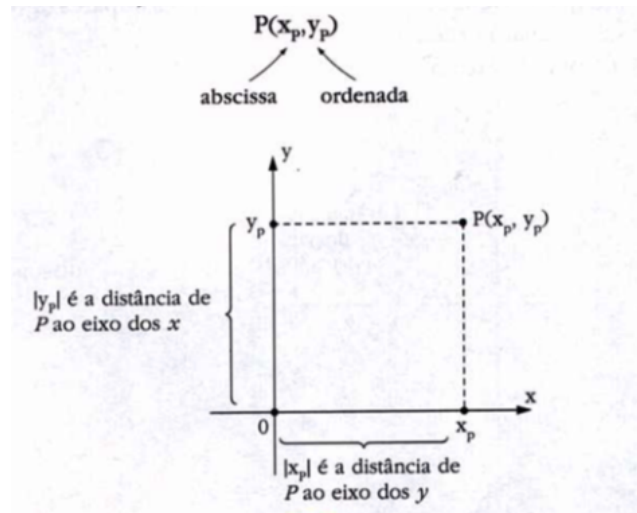


Figura 25: Pontos no plano cartesiano.

Fonte: BARRETO FILHO, Benigno. SILVA, Claudio Xavier da. Matemática: Aula por aula. Ensino médio, Volume único. Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

- A origem O tem coordenada $(0,0)$;
- $\overline{OX_p}$ é a distância de $(0,0)$ a x_p ;
- $\overline{OY_p}$ é a distância de $(0,0)$ a y_p ;
- Todo ponto sobre o eixo das abscissas será do tipo $P(x_p, 0)$;
- Todo ponto sobre o eixo das ordenadas será do tipo $P(0, y_p)$;

3. Exercício de Fixação

Neste momento iremos propor aos alunos o exercício 1 do material do aluno, referente ao conteúdo de localização de pontos e compreensão do plano cartesiano. Realizaremos a correção do exercício na sequência.

4. Bissetrizes dos quadrantes

São retas que dividem os quadrantes em partes congruentes (iguais).

- Todo ponto sobre a **bissetriz dos quadrantes ímpares** apresenta abscissa e ordenada com mesmo valor, logo $x = y$ portanto será do tipo $P(x, x)$ ou $P(y, y)$.
- Todo ponto sobre a **bissetriz dos quadrantes pares** apresenta abscissa e ordenada com valores opostos, logo $x = -y$ ou $y = -x$ portanto será do tipo $P(x, -x)$ ou $P(y, -y)$.

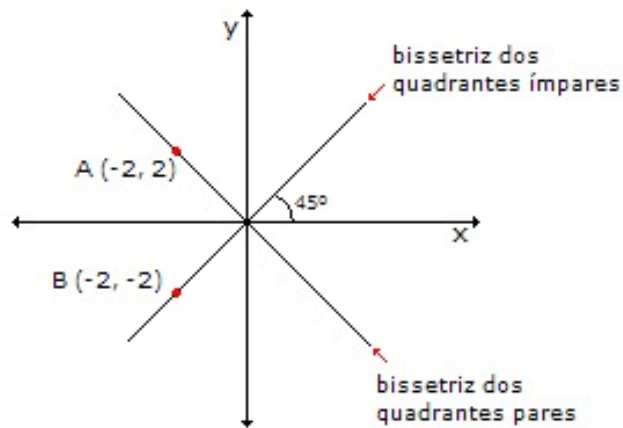


Figura 26: Bissetrizes do plano.

Fonte: <http://matematicaeducacionalensinomedio.blogspot.com/2018/03/02-bissetriz-dos-quadrantes.html>

5. Distância entre dois pontos

Iniciaremos o conteúdo de distância questionando aos alunos a distância entre os grupos em que eles estão formados, iniciando com distância dos grupos ao lado, onde pode-se calcular facilmente. Então questionaremos sobre a distância entre grupos que formam uma diagonal, deixando um tempo para que eles pensem.

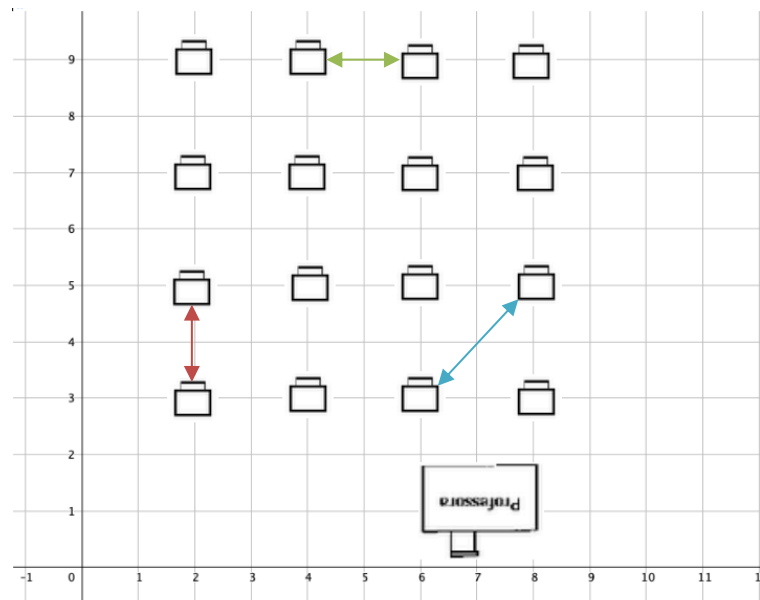


Figura 27: Exemplo de distâncias.

Fonte: Acervo das autoras.

Após os alunos discutirem um tempo, iremos formalizar, realizando a dedução da fórmula da distância, utilizando o teorema de Pitágoras:

Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do sistema de coordenadas cartesianas, pode-se calcular a distância entre eles aplicando o Teorema de Pitágoras.

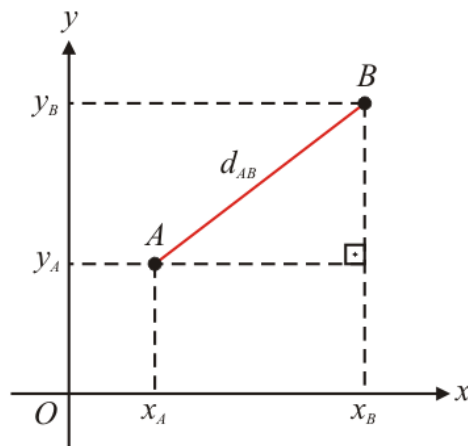


Figura 28: Distância entre dois pontos.

<https://www.obaricentrodamente.com/2013/06/distancia-entre-dois-pontos-no-plano.html>

Podemos observar a formação de um triângulo retângulo com hipotenusa d_{AB} . Sabemos que calcular a distância entre dois pontos X_A e X_B , basta que façamos $X_B - X_A$, reciprocamente para Y_A e Y_B . Então:

$$(d_{AB})^2 = (X_B - X_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Simplificando temos então:

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

6. Exercício de Fixação

Neste momento iremos propor aos alunos o exercício 2 do material do aluno, referente ao conteúdo de distância entre dois pontos. Realizaremos a correção do exercício na sequência.

7. Ponto Médio

Para começarmos o conteúdo de ponto médio, indagaremos os alunos de questões, como:

- Como podemos obter o ponto que está no meio da sala?
- Se formos de Cascavel para Toledo, como podemos fazer para saber em que km teremos percorrido metade do caminho?

Após os alunos discutirem um pouco sobre, abordaremos ponto médio, realizando a formalização do conteúdo:

O ponto M, ponto médio de um segmento AB, divide o segmento AB duas partes iguais e ainda:

$$\overline{AX_M} = \overline{X_M B} \text{ e } \overline{AY_M} = \overline{Y_M B}$$

Temos ainda que as coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ de um segmento AB podem ser obtidas pela média aritmética dos valores dos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

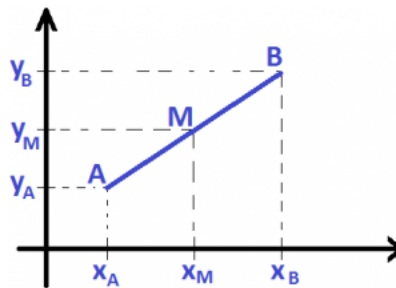


Figura 29: Ponto médio.

<https://sabermatematica.com.br/ponto-medio-de-um-segmento.html>

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

8. Exercício de Fixação

Neste momento iremos propor aos alunos o exercício 3 do material do aluno, referente ao conteúdo de ponto médio. Realizaremos a correção do exercício na sequência.

9. Pontos colineares

Como o trabalho com o determinante na turma, se torna complicado pela diversidade de anos escolares que temos na sala, iremos trabalhar somente com a questão intuitiva de pontos colineares.

Considere três pontos distintos do plano cartesiano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$. Se esses pontos estão alinhados de alguma forma eles são colineares (pertencentes a uma mesma reta). Como na figura a seguir:

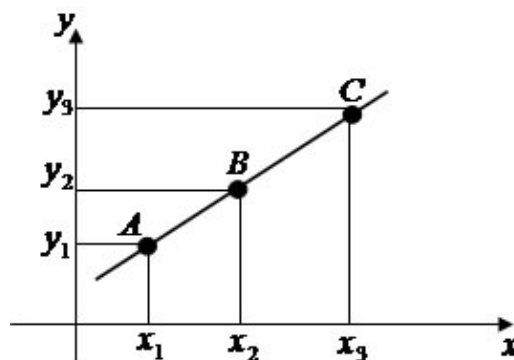


Figura 30: Pontos colineares.

Fonte: Acervo das autoras.

Temos ainda que:

Dado três pontos A,B e C, estes pontos são colineares o determinante dos pontos é igual a zero, como seque na figura:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Figura 31: Cálculo determinante.

Fonte: BARRETO FILHO, Benignno. SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática: Aula por aula. Ensino médio, Volume único.** Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

10. Exercício de Fixação

Neste momento iremos propor aos alunos o exercício 4 do material do aluno, referente ao conteúdo de pontos colineares. Realizaremos a correção do exercício na sequência.

11. Exercícios

Ao finalizarmos o conteúdo, pediremos aos alunos que realizem os exercícios restantes do material do aluno.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

BARRETO FILHO, Benignno. SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática: Aula por aula. Ensino médio, Volume único.** Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed.responsável). **Conexões com a matemática.** Vol. 3. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

EXERCÍCIOS SOBRE A CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS. Disponível em: <<https://exercicios.brasile scola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-condicao-alinhamento-tres-pontos.htm#questao-3>>. Acesso em: 28 ago. 2019.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações.** 3º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

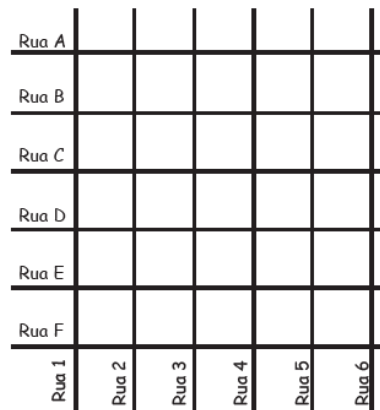
PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** 3º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Questões de Concursos. Disponível em: <<https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/27097721-5d>>. Acesso em: 28 ago. 2019.

Questões do Enem - **Distância entre dois pontos.** Acesso em: <<http://carlamcoelho.blogspot.com/2013/04/questoes-do-enem-distancia-entre-dois.html>>. Acesso em: 28 ago. 2019.

5.1. MATERIAL DO ALUNO 5º ENCONTRO

1) (ENEM 2016) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A.

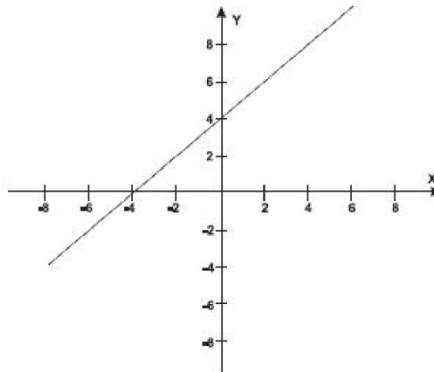
Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

- a) 3 e C.
- b) 4 e C.
- c) 4 e D.
- d) 4 e E.
- e) 5 e C.

Resolução:

Observando a figura das ruas, podemos determinar facilmente o local indicado que atende as exigências da família. Logo, a casa da família deve se localizar na rua 4 com a rua D. Então, a resposta correta é letra **c**.

2) (ENEM 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras duas regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

- a) $(-5, 0)$
- b) $(-3, 1)$
- c) $(-2, 1)$
- d) $(0, 4)$
- e) $(2, 6)$

Resolução:

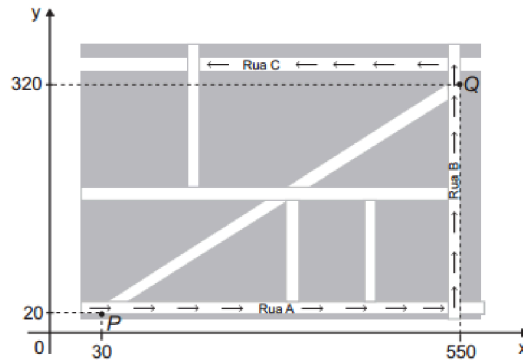
Apenas os pontos $B(-3; 1)$, $D(0; 4)$ e $E(2; 6)$, correspondentes às alternativas propostas, pertencem à reta de equação $y = x + 4$.

A distância do ponto P ao ponto B é:

$$\sqrt{(-5 - (-3))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20} < 5$$

Logo, a estação prevista em $(-3; 1)$ satisfaz o pedido da comunidade. Então a resposta correta é a letra **b**.

3) (ENEM 2015) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são:

- a) (290 ; 20).
- b) (410 ; 0).
- c) (410 ; 20).
- d) (440 ; 0).
- e) (440 ; 20).

Resolução:

Temos os pontos $P(30, 20)$ e $Q(550, 320)$, e sabemos um ponto $A(550, 20)$. Então calcula-se a distância entre P e A e soma-se com a distância de A a Q para saber o percurso realizado pelo ônibus, $(550 - 30) + (320 - 20) = 820$, sabendo a distância entre as paradas e que o ponto T que será a nova parada deve dividir a trajetória ao meio então a distância entre P e T deve ser $820/2 = 410$, logo a coordenada de T será de $T(30 + 410, 20) = T(440, 20)$, e a resposta correta é a letra E.

4) (UFMG - adaptado) Verifique se os três pontos a seguir são colineares:
 $A(1, 2)$, $B(-6, -5)$ e $C(0, 1)$.

Resolução:

Localizando os pontos no plano cartesiano podemos facilmente verificar se os pontos são colineares. Ou ainda temos que podemos definir se os pontos colineares através do cálculo do determinante.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -6 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -5 + 0 - 6 - (1 - 12) = -11 + 11 = 0$$

Logo os pontos são colineares.

5) (Puc-rio) O valor de x para que os pontos $(1,3)$, $(-2,4)$, e $(x,0)$ do plano sejam colineares é:

a) 8.

b) 9.

c) 11.

d) 10.

e) 5.

Resolução:

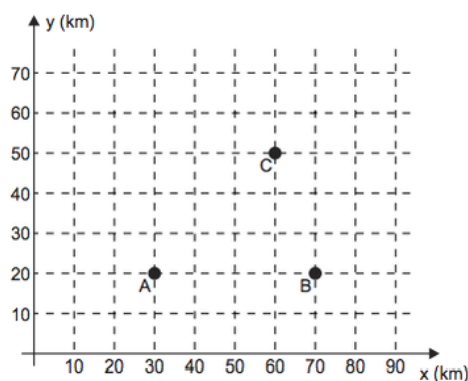
Sabendo que o determinante de pontos colineares é igual a 0.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$4 + 3x - 4x + 6 = 0.$$

Disso obtém-se que $x = 10$. Portanto a resposta correta é a letra D.

6) (ENEM 2013) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

- a) (65,35)
- b) (53,30)
- c) (45,35)
- d) (50,20)
- e) (50,30)

Resolução:

O ponto onde a torre deve ser construída possui as coordenadas (50,30). Portanto a alternativa correta é a letra E.

7) (PUC) Sejam A e B os pontos (1, 1) e (5, 7) no plano. O ponto médio do segmento AB é:

- a) (3,4)
- b) (4,6)
- c) (-4,-6)
- d) (1,7)
- e) (2,3)

Resolução:

Para calcular o ponto médio de um segmento usaremos as seguintes expressões

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Logo,

$$X_M = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$Y_M = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Portanto a resposta é a letra **a**.

5.2. RELATÓRIO 5º ENCONTRO

O conteúdo programático da aula do dia 15 de setembro era Geometria Analítica, mais especificamente: plano cartesiano, localização de pontos, bissetriz, distância entre dois pontos e pontos colineares.

Antes dos alunos entrarem na sala foi montado com barbante e números impressos, os eixos das abcissas e das ordenadas, tendo como unidade de medida uma carteira, dividindo a sala em quatro quadrantes. Também, as carteiras foram organizadas de modo que a coordenadas fossem as mais inteiras possíveis.

Demos início a aula perguntado aos alunos se havia ficado alguma dúvida da aula anterior, sobre trigonometria, e como a resposta foi negativa foi dado início ao conteúdo programado para a aula. Utilizando o conhecimento prévio dos alunos sobre plano cartesiano, os eixos x e y e os quadrantes, classificamos com eles quais seriam os I, II, III e IV quadrantes da sala e suas devidas características.

Em seguida, para exemplificar, localizamos as coordenadas de uma das professoras no plano cartesiano desenhado no quadro, sendo solicitado aos alunos que fizessem o mesmo para todos os seus colegas, sendo esta a Atividade 1 do material do aluno. Cerca de 20 minutos depois, foi solicitado aos alunos que fossem ao quadro e localizassem cada um o seu respectivo ponto no plano cartesiano.

Pudemos observar que os alunos não apresentaram dificuldades neste primeiro assunto da aula, exceto em enxergar qual é a localização do colega, devida a falta de visão dos números.

Foi solicitado aos alunos que realizassem o exercício 1 do material do aluno, o qual foi corrigido logo em seguida.

Dando continuidade aos conteúdos, foi questionado aos alunos o significado de bissetriz, como apenas um discente sabia o que significava, os alunos foram induzidos a pensar no significado da palavra “decomposta” BI-SSETRIZ” levando-os a pensar numa reta a qual divide os I e III, dada por $y=x$, e II e IV, dada por $y=-x$, quadrantes tendo a propriedade da distância desta duas retas até o eixo x e y serem sempre iguais para cada ponto.

Utilizando, ainda, da localização dos alunos no plano cartesiano, foi dada a ideia de unidade de medida para os alunos, sendo explicado que a unidade adotada foi de uma carteira. Em seguida questionamos os alunos qual era a distância entre dois discentes que estavam em “uma mesma reta” paralela ao eixo y e após, há outros dois discentes que estavam no eixo x . Por meio da contagem da quantidade unidades que os alunos, os quais queríamos saber a distância, estavam um dos outros foi obtido a distância sem dificuldades. Entretanto, no momento da transposição para ponto genéricos, pudemos observar a confusão na cabeça dos alunos. Diante disso, realizamos mais três exemplos deste “tipo” de distância, para após passar para o caso em que dois alunos estavam localizados em uma diagonal.

Os alunos foram questionados como poderíamos obter a distância entre o aluno A e o aluno B, sendo que um discente disse “podemos utilizar a fórmula da distância”. Com esta fala identificamos que alguns alunos já tinham o conhecimento da fórmula da distância entre dois pontos. Com isto, pedimos para que dissessem a fórmula, para que passássemos no quadro. Dizendo para os alunos que mostraríamos como obter aquela fórmula.

Primeiro realizamos um exemplo numérico, induzindo a construção de um triângulo retângulo para que assim, pudéssemos utilizar o Teorema de Pitágoras. Retomando os casos mais simples de distância, obtemos a medida dos catetos do triângulo e assim obtemos a medida da hipotenusa. Ao final da explicação, ficou claro para nós que os alunos não haviam compreendido, mas como já estava na hora do intervalo, liberamos os alunos para que realizassem o lanche, e retomássemos este conteúdo após o intervalo.

Na volta do intervalo foi posto dois pontos $A(x_2, y_2)$ e $B(x_1, y_1)$, com coordenadas genéricas, num plano cartesiano, sendo retomada a ideia de construir um triângulo retângulo utilizando as coordenadas desses dois pontos e como obter a distância de dois pontos horizontais e verticais. Realizando mais alguns passos, obtemos a fórmula da distância entre dois pontos, sendo enfatizado cada passagem até obtenção da fórmula.

Para que os alunos praticassem a fórmula da distância entre dois pontos, foi solicitado que calculassem a distância dos pontos dados na Figura 1.

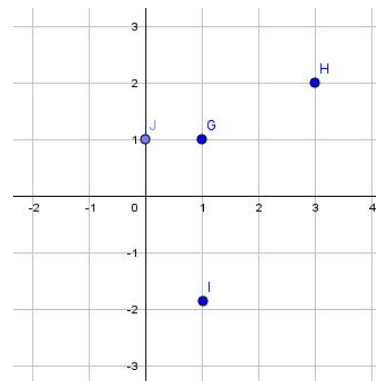


Figura 32: Distância entre pontos.
Fonte: Acervo das autoras.

Durante a realização da atividade pudemos observar que os alunos ficaram confusos em como utilizar a fórmula da distância entre dois pontos e se deveriam utilizá-la sempre. Diante disto, buscamos tirar as dúvidas dos alunos. Depois foi resolvido no quadro juntamente com os alunos.

Por fim foi trabalhado o conceito de pontos colineares. Questionamos os alunos o significado de colineares, se já haviam escutado ou trabalhado com este conceito. Alguns discentes responderam de modo afirmativo, enquanto os outros ficaram quietos. Então perguntamos o significado de linear e com este questionamento foi explicado que três pontos são colineares quando pertencem a uma mesma reta. Em seguida realizamos um exercício com os alunos envolvendo, apenas, a parte geométrica.

Mas há um jeito mais prático de saber se três pontos são colineares por meio do determinante. A maior parte dos alunos estão no primeiro ano do ensino médio, conseqüentemente, a grande maioria, não viram como calcular o determinante de uma matriz. Pensando nisto, foi explicado passo a passo de como calcular o determinante de uma matriz utilizando a regra de Sarrus, utilizando de um exemplo para isto. E para descobrir se dois pontos são colineares, bastava calcular o determinante e observar o resultado. Caso fosse nulo, os pontos são colineares, caso contrário os três pontos não são colineares. Devido o horário, combinamos com os alunos de realizar um exemplo na próxima aula, de como utilizar o determinante para descobrir se dois pontos são colineares.

6. PLANO DE AULA 6º ENCONTRO – 21/09/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender conceitos do Geometria Analítica, de modo que seja capaz de identificá-los, entender suas definições bem como realizar operações com os mesmos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Geometria Analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar e encontrar equação geral e reduzida da reta.
- Compreender posições relativas entre duas retas no plano.
- Resolver problemas que envolvam o conteúdo;

Conteúdo:

Geometria Analítica: equação geral e reduzida da reta, posições relativas entre duas retas no plano.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, régua, computador, projetor e material do aluno.

Encaminhamento metodológico:

1. Equação reduzida e geral da reta.

Será entregue um material com as retas como na figura. Em seguida, pediremos para que os alunos completem a tabela da sequência, escolhendo o ponto x e x_0 que desejarem, exceto pela reta q, a qual esperamos que os alunos tenham dúvidas quanto a escolha.

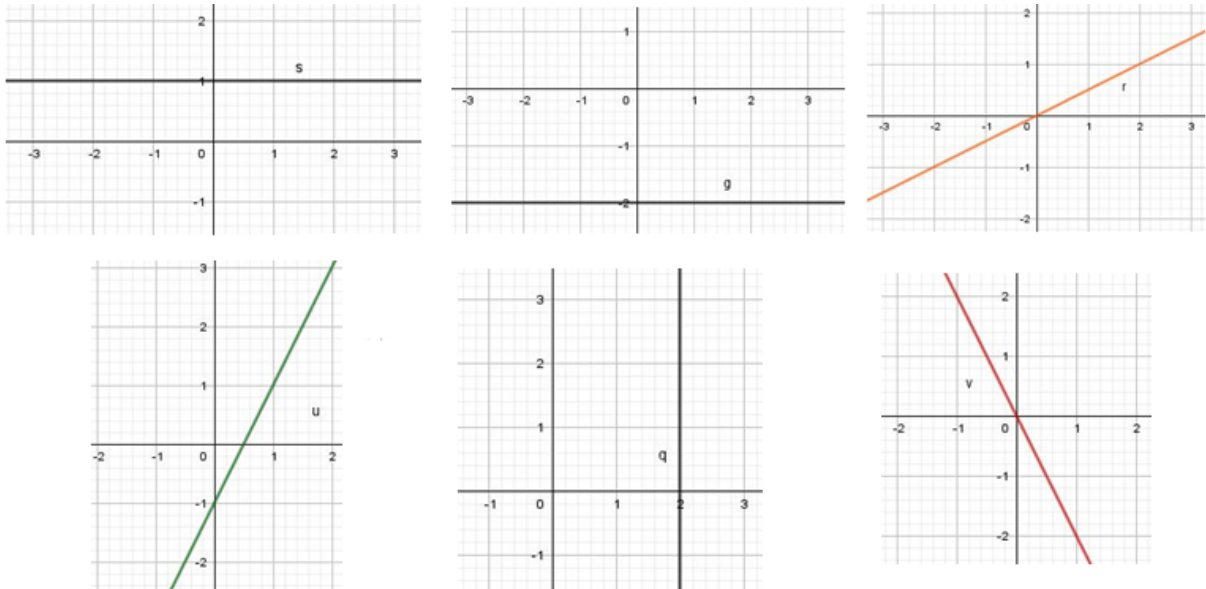


Figura 33: Retas.
Fonte: Acervo das autoras.

Reta	(x, y)	(x_0, y_0)	$y - y_0$	$x - x_0$	$\frac{y - y_0}{x - x_0}$
S					
G					
U					
V					
R					
Q					

Figura 34: tabela das retas.
Fonte: Acervo das autoras.

Na sequência, discutiremos os resultados obtidos do preenchimento da tabela e, observaremos que o valor $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ é a tangente de um ângulo α , também denominado de coeficiente angular da reta. Notemos ainda, que o coeficiente angular de q não existe, já que a tangente deste Ângulo não está definida.

Note que como o coeficiente angular $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$, obtemos a equação da reta isolando y . Assim $(y - y_0) = m(x - x_0)$ ou $y = m(x - x_0) + y_0$.

Podemos falar também, do coeficiente linear de uma reta. Este, determina onde a reta intercepta o eixo y .

Por exemplo, a reta s tem coeficiente linear igual a 1. Observemos que sua equação é dada por $y = 1$, onde $y_0 = 1$.

Por outro lado, a equação da reta u é dada por $y = 2x - 1$, onde dois é o coeficiente angular, e o um é o coeficiente linear que é a imagem do ponto O , no qual a reta intercepta o eixo y .

A equação trabalhada até agora é denominada de equação reduzida da reta, já que explicita o coeficiente angular e o linear da reta.

Equação reduzida da reta:

Explicita o coeficiente angular, m , e linear da reta q .

$$y = mx + q,$$

$$\text{com } q = -mx_0 + y_0.$$

Questionaremos os alunos quanto a reta q estudada anteriormente, se possui uma equação reduzida. Já que não o coeficiente angular não existe. Será que podemos obter uma representação matemática?

A resposta é afirmativa. Esta reta pode ser representada pela *equação geral da reta*. A forma geral recebe esse nome porque permite a representação de qualquer reta do plano, horizontal, vertical ou oblíqua.

Por exemplo, a reta q tem a equação geral da reta dada por:

$$x - 2 = 0.$$

Obsevemos que qualquer valor y satisfaz esta equação, no entanto, o único x que satisfaz a equação anterior é $x = 2$.

Equação geral da reta:

Toda reta do plano cartesiano xOy é gráfico de uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que x e y são variáveis e a , b e c são constantes reais com a e b não simultaneamente nulas. Reciprocamente, toda equação dessa forma representa uma reta do plano cartesiano.

2. Exercício de fixação

Neste momento iremos propor aos alunos o exercício 1 do material do aluno, referente ao conteúdo trabalho. Realizaremos a correção do exercício na sequência.

3. Identificando se um ponto P pertence, ou não, a uma reta s .

Problema: Rafael combinou com os seus amigos de comerem um lanche na Cabana Lanches, e como Rafael mora no bairro Cascavel Velho, ele pegará um ônibus até o terminal sul, onde encontrará seus amigos: Bia e Carlos, para que sigam até a lanchonete.

Como combinado, Rafael chega ao local de encontro, mas se lembra que esqueceu de pegar seu remédio para que possa comer o lanche sem problemas. Rafael é intolerante a lactose, e sem o seu remédio, não poderá comer nenhum alimento que contenha leite.

Para não “estragar a noite”, Bia sugere que Rafael compre o remédio. Assim, Rafael olha no Google Maps e verifica que há duas farmácias nessa região: Farmautil e ver nome da farmácia. Conforme mostrado na imagem abaixo

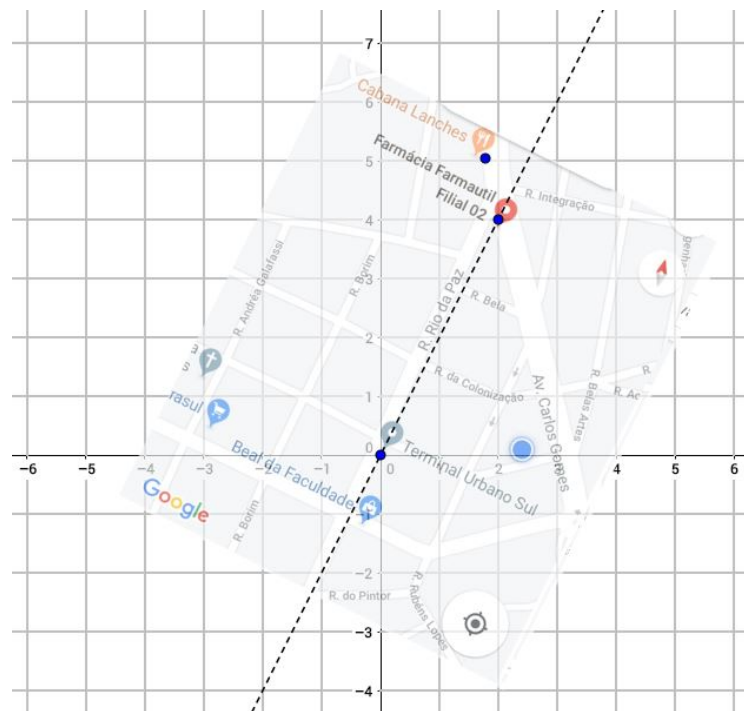


Figura 35: Localização dos pontos.

Fonte: Acervo das autoras.

Entretanto, Carlos está com fome e não quer perder tempo. Você pode ajudar Rafael, Bia e Carlos a decidirem qual é a farmácia mais viável para que os três amigos, não saiam da rota da lanchonete?

Vemos nesse problema, que a solução é evidente, a farmácia Farmautil é a solução mais viável, pois ela pertence a rota que os três amigos farão, já a outra farmácia, não pertence a esta rota.

Como podemos descrever a situação anterior em linguagem algébrica?

Note que parte do trajeto realizado do terminal urbano sul, até a lanchonete é descrito por uma reta que tem como equação reduzida $y = 2x$ e como equação geral $y - 2x = 0$. O terminal sul, possui coordenadas $(0,0)$ e Farmautil $(2,4)$, já a outra farmácia tem coordenadas $(2,0)$. Note que $4 - 2 \cdot 2 = 0$, e $0 - 2 \cdot 2 = -4$, isto é, como as coordenadas da Farmautil satisfazem a equação geral da reta, temos que ela pertence a essa reta, mais ainda, ela pertence ao trajeto que os três amigos realizarão, entretanto a outra farmácia não satisfaz a equação geral da reta, já que $y - 2x \neq 0$.

Seja s a reta que tem como equação $s: ax + by + c = 0$.

O ponto $P = (x_1, y_1)$ pertence a reta s se, e só se, $ax_1 + by_1 + c = 0$.

4. Exercício de Fixação

Neste momento iremos propor aos alunos o exercício 2 do material do aluno, referente ao conteúdo de distância entre dois pontos. Realizaremos a correção do exercício na sequência.

5. Posição Relativa entre duas retas.

5.1. Retas Paralelas

Pediremos para que os alunos obtenham o coeficiente angular nas retas dadas abaixo.

$$r: 2x + 1.$$

$$v: -\frac{1}{2}x.$$

$$s: \frac{4}{2}x.$$

$$z: -\frac{3}{6}x + 5.$$

$$t: 2x - 10.$$

$$w: -\left(\frac{2}{4} + 5\right).$$

$$u: \frac{6}{3}x + 8.$$

$$d: -\frac{5}{10}x - 3.$$

Observemos que as quatro primeiras retas, tem coeficientes angular igual a dois, enquanto as quatro últimas possuem coeficiente angular igual a -0,5. Será que é coincidência?

Para responder esse questionamento, será construído as oito retas no GeoGebra para que assim, possamos induzir os alunos a observar que retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular, ou reciprocamente, se duas retas possuem o mesmo coeficiente angular, elas são paralelas.

5.2. Retas Concorrentes

No plano R^2 , há apenas duas opções: uma reta r é paralela à s , ou não, e nesse caso, as retas r e s são ditas concorrentes, interceptando em um único ponto (se elas se interceptam em mais do que um ponto, as retas são iguais).

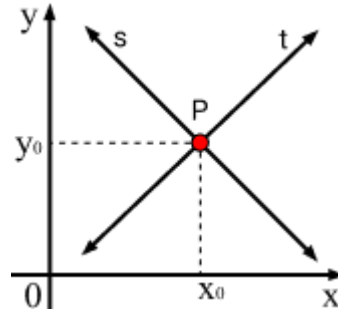


Figura 36: retas concorrentes.

Fonte: <https://matematicabasica.net/retas-concorrentes/>

Dado duas retas concorrentes t e s , como podemos identificar o ponto em que essas retas são concorrentes?

Seja $P = (x_0, y_0)$ o ponto no qual as retas s e t se interceptam. Note que P é um ponto da reta s e t assim P satisfaz a equação geral dessas retas, isto é,

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \text{ e } a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0.$$

Reciprocamente, podemos descobrir qual é o ponto onde as retas r e s se intersectam resolvendo o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Ou equivalentemente $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = a_2x_0 + b_2y_0 + c_2$, o ponto $P = (x_0, y_0)$ que satisfaz essa equação, é onde as duas retas se intersectam.

5.3. Em Resumo.

No plano cartesiano, duas retas, r e s , podem ser paralelas distintas, paralelas coincidentes ou concorrentes.

I. As retas r e s são **paralelas** se, e somente se, tem o mesmo coeficiente angular ou não existem seus coeficientes angulares.

- **Paralelas distintas** se, e somente se, $m_r = m_q$ e $q_r \neq q_q$.
- **Paralelas coincidentes** se, e somente se, $m_r = m_q$ e $q_r = q_q$.

II. As retas r e s são **concorrentes** se, e somente se, tem coeficientes angulares diferentes ou existe o coeficiente angular de uma delas e não existir o da outra.

- **Concorrentes** se, e somente se, $m_r \neq m_q$.

III. Duas retas, r e s , não verticais, são **perpendiculares** se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra.

6. Exercício de Fixação

Neste momento iremos propor aos alunos o exercício 2 do material do aluno, referente ao conteúdo de distância entre dois pontos. Realizaremos a correção do exercício na sequência.

7. Exercícios

Neste momento deixaremos que os alunos realizem os demais exercícios do material do aluno.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed.responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 3. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Geometria Analítica – As principais fórmulas com exercício resolvido. Disponível em: <<https://blogdoenem.com.br/geometria-analitica-matematica-enem/>>. Acesso em: 28 ago. 2019.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações**. 3º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 3º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

6.1. MATERIAL DO ALUNO 6º ENCONTRO

Exercício 1

a) Determine os coeficientes angulares, m , das retas dadas abaixo.

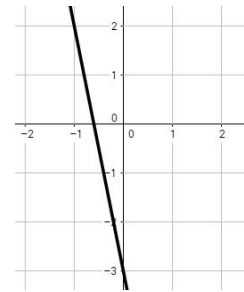
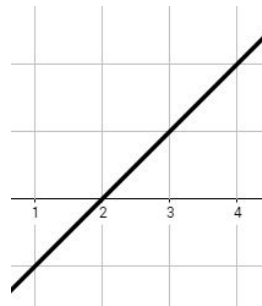
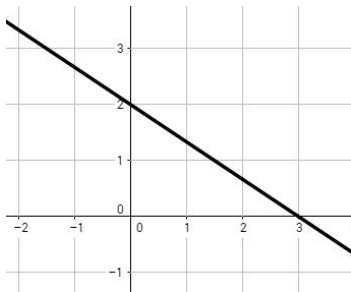
Retas	Obtendo o coeficiente angular
$7x + y = 0$	$7x + y = 0 \rightarrow y = -7x \rightarrow m = -7.$
$-6x = y$	$-6x = y \rightarrow m = -6$
$-\frac{3}{2}x = y$	$y = -\frac{3}{2}x \rightarrow m = -\frac{3}{2}.$

b) Dados os pontos abaixo, obtenha a equação da reta.

Pontos	Obtendo a equação da reta
(2,2) e (7,7)	$m = \frac{7-2}{7-2} = 1, \text{ como } y = mx + n,$ $\text{então, } y = x + n \rightarrow 2 = 2 + n \rightarrow n = 0$

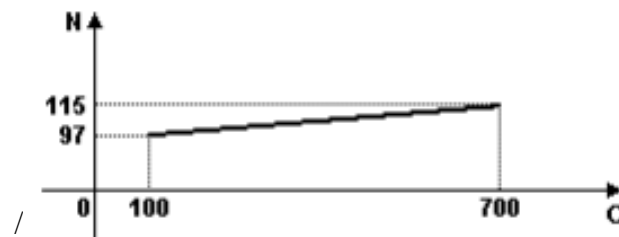
	$y = x.$
$(-2,-3)$ e $(3,-3)$	$m = \frac{-3 - (-3)}{+3 - (-2)} = 0, \text{ como } y = mx + n,$ $\text{então, } y = n \rightarrow -3 = 0 \cdot (-2) + n \rightarrow n = -3$ $y = -3.$
$(0,4)$ e $(1,0)$	$m = \frac{0 - 4}{1 - 0} = -4, \text{ como } y = mx + n,$ $\text{então, } y = -4x + n \rightarrow 4 = -4 \cdot 0 + n \rightarrow n = 4$ $y = -4x + 4.$

c) Determine a equação reduzida das retas dadas a seguir.



Obtendo a equação da reta	Obtendo a equação da reta	Obtendo a equação da reta
$n = 2$ $y = mx + n$ $y = mx + 2$ $0 = m \cdot 3 + 2 \rightarrow m = -\frac{2}{3}$ $y = -\frac{3}{2}x + 2.$	$m = \frac{1 - 0}{3 - 2} = 1$ $y = mx + n$ $y = 1x + n$ $0 = 1 \cdot 2 + n \rightarrow n = -2$ $y = x - 2.$	$n = -3$ $y = mx - 3$ $2 = m(-1) - 3$ $2 + 3 = -m \rightarrow m = -5$ $y = -5x + 3.$

1) Um grande poluente produzido pela queima de combustíveis fósseis é o SO₂ (dióxido de enxofre). Uma pesquisa realizada na Noruega e publicada na revista "Science" em 1972 concluiu que o número (N) de mortes por semana, causadas pela inalação de SO₂, estava relacionado com a concentração média (C), em mg/m³, do SO₂ conforme o gráfico a seguir: os pontos (C, N) dessa relação estão sobre o segmento de reta da figura. Com base nos dados apresentados, a relação entre N e C ($100 \leq C \leq 700$) pode ser dada por:



- a) $N = 100 - 700 C$
- b) $N = 94 + 0,03 C$
- c) $N = 97 + 0,03 C$
- d) $N = 115 - 94 C$
- e) $N = 97 + 600 C$

Resolução

Para resolver a questão, devemos obter a equação da reta que representa o gráfico dado, para isto, comecemos encontrando o coeficiente angular.

$$m = \frac{115 - 97}{700 - 100} = 0,03.$$

Agora, vamos substituir o valor do coeficiente e um ponto do gráfico para calcular o coeficiente linear

$$y = 0,03x + n \rightarrow 97 = 0,03 \cdot 100 + n$$

$$n = 97 - 3 = 94.$$

Logo a equação da reta desejada é

$$y = 0,03x + 94.$$

Portanto a letra **b** é a resposta correta.

- 2) (UPE 2011) Sobre a equação reduzida da reta que intercepta o eixo y no ponto (0,4) e o eixo x no ponto (2,0), é correto afirmar que o coeficiente angular
- a) da reta será um número positivo ímpar.
 - b) da reta será um número positivo par.
 - c) da reta será um número negativo cujo módulo é um número ímpar.
 - d) da reta será um número negativo cujo módulo é um número par.
 - e) da reta é nulo.

Resolução

O coeficiente linear pode ser obtido observando o valor da imagem de $f(0)$, assim $n =$

4.

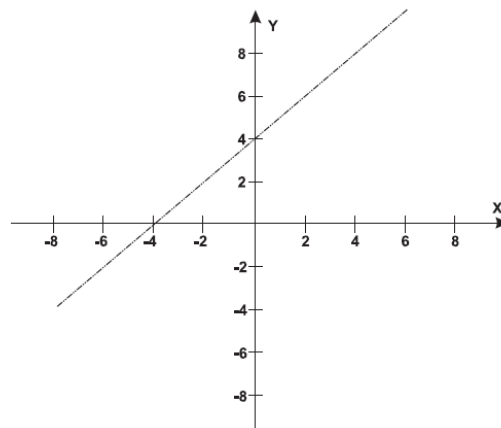
$$y = mx + 4$$

$$0 = m \cdot 2 + 4 \rightarrow -\frac{4}{2} = m$$

$$y = -2x + 4$$

Segue que a resposta d) é alternativa correta.

3) (ENEM 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto.

- a) $(-5, 0)$.
- b) $(-3, 1)$.
- c) $(-2, 1)$.
- d) $(0, 4)$.
- e) $(2, 6)$.

Resolução:

Apenas os pontos B(-3; 1), D(0; 4) e E (2; 6), correspondentes às alternativas propostas, pertencem à reta de equação $y = x + 4$.

A distância do ponto P ao ponto B é:

$$\sqrt{(-5 - (-3))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20} < 5$$

Logo, a estação prevista em (-3; 1) satisfaz o pedido da comunidade. Então a resposta correta é a letra **b**.

4) (PMES 2013). Dadas as retas r e s, determinadas respectivamente pelas equações $2x + y = 3$ e $3x - 4y = -23$, é correto afirmar que r e s são retas:

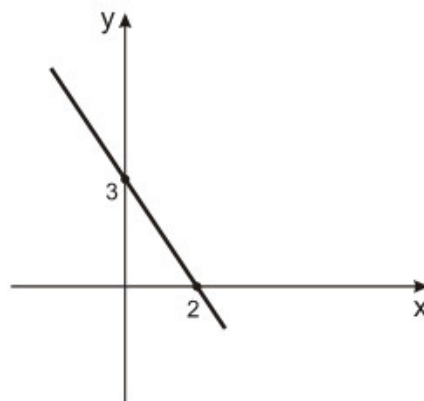
- a. concorrentes
- b. iguais
- c. paralelas
- d. perpendiculares

Resolução

O que determina a relação relativa entre retas é o valor do coeficiente angular. A primeira reta possui coeficiente angular igual a -2, enquanto a outra, tem coeficiente angular igual a $\frac{3}{4}$. Vemos assim, que essas duas retas não são paralelas, muito menos iguais. Tais retas são concorrentes, pois $-2 \neq -\frac{4}{3}$.

Logo a resposta correta é alternativa a).

5) (Ifsul 2011) A equação da reta, representada no gráfico abaixo, é:



Resolução

$$n = 3 \text{ e } 0 = m \cdot 2 + 3 \rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3.$$

6) (PUC RIO) Qual deve ser o valor de x para que os pontos $(1,3)$, $(-2,4)$, e $(x,0)$ do plano sejam colineares?

Resolução

Pontos colineares pertencem a mesma reta. Assim temos a seguinte relação

$$m = \frac{4 - 3}{-2 - 1} = \frac{0 - 4}{x - (-2)}$$

$$\frac{1}{-3} = \frac{-4}{x + 2} \rightarrow x + 2 = 12 \rightarrow x = 10.$$

7) (Unaerp) A equação, no plano, $x - 3 = 0$, representa:

- a) Um ponto do eixo das abcissas
- b) Uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas
- c) Uma reta perpendicular à reta $x + y = 0$
- d) Uma reta concorrente à reta $x + y = 0$
- e) Uma reta x' paralela à reta $y - 3 = 0$

Resolução

Escrevendo a reta dada pela eq. geral da reta, temos $0y + 1x - 3 = 0$. Essa reta é paralela ao eixo das abcissas, e consequentemente paralela ao eixo das ordenadas.

6.2. RELATÓRIO 6º ENCONTRO

No dia 21 de setembro de 2019, nos encontramos nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para iniciar as atividades do PROMAT. Antes de iniciarmos as atividades do sexto encontro, organizamos a sala de aula para a chegada dos alunos, organizamos as carteiras de modo que fossem criados grupos.

Próximo das 8 horas da manhã, os alunos foram chegando e para iniciarmos os trabalhos do sexto encontro, estavam presentes 22 alunos e iniciamos a aula retomando o que havíamos estudado no encontro anterior. Neste encontro abordamos os conteúdos de equação geral e reduzida da reta, posições relativas entre duas retas no plano.

Na sequência, entregamos aos alunos o material com as atividades a serem realizadas neste encontro, pedimos aos mesmos que realizassem a atividade 1 e enquanto realizavam nós estaríamos os auxiliando e tirando as dúvidas dos mesmos.

A atividade 1 constava de seis gráficos de retas, em vários sentidos, e uma tabela. Os alunos teriam que, escolher dois pontos de cada reta e preencherem a tabela com esses dados, na última coluna desta tabela eles teriam que fazer a seguinte relação $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Após realizarem a atividade, fizemos a correção com os alunos e analisamos as informações obtidas, e pedimos aos mesmos se eles sabiam o que significava a relação que se tinha na tabela. Os alunos não souberam responder, então explicamos a eles que esta relação era a tangente de um ângulo α , ou melhor dizendo era o coeficiente angular da reta e que a reta q não possuía coeficiente angular, pois a tangente deste ângulo, no caso de 90° , não existe.

Mostramos aos alunos que através da fórmula do coeficiente angular podemos encontrar a equação da reta, e que o coeficiente linear é o que determina onde a reta intercepta o eixo y . Após todas essas conclusões, formalizamos a equação reduzida da reta.

Em seguida, indagamos os alunos sobre a reta q , se ela possuía uma equação de reta reduzida, já que a mesma não possui coeficiente linear. Os alunos disseram que não, então pedíamos a eles se era possível encontrar uma representação para esta reta, os mesmos não souberam responder, então explicamos a eles que qualquer reta do plano pode ser representada através da equação geral da reta e os apresentamos a sua fórmula, os alunos não apresentaram dúvidas, então pedimos para que os mesmos realizassem os exercícios 2 e 3 do material do aluno.

Deixamos um tempo para que os realizassem, depois realizamos a correção com os alunos, tirando as suas dúvidas. Como já estava na hora do intervalo, liberamos os mesmos e continuaríamos na volta.

Retornando do intervalo, continuamos o conteúdo com um novo tópico, que era se um ponto pertence ou não pertence a reta, para introduzir esse assunto utilizamos o Geogebra e o projetor, com o intuito de que os alunos pudessem ter uma visualização melhor do conteúdo.

Apresentamos aos alunos um problema e fizemos algumas indagações referente ao mesmo, e a figura apresentada no Geogebra, os alunos estavam participativos, respondendo às perguntas realizadas e interagindo conosco.

Ao final das indagações, formalizamos o conteúdo, mostrando aos alunos que um ponto pertence a reta, se quando este ponto for substituído na equação da reta, o mesmo terá que estar presente na reta. Após as explicações realizamos, juntamente com os alunos, o exercício 4, referente ao conteúdo apresentado acima.

Na sequência, pedimos aos alunos que realizassem a atividade, abaixo do exercício 4. Esta atividade apresentava algumas retas e os alunos teriam que achar o coeficiente angular de cada reta, verificando se esses coeficientes possuíam alguma relação.

Os mesmos, perceberam que as retas apresentadas possuíam coeficientes angulares iguais, então com a ajuda do Geogebra, mostramos aos alunos que as retas eram retas

paralelas, e explicamos que se duas retas possuem coeficiente angular igual elas serão paralelas.

Explicamos aos alunos que as retas podem ser chamadas de concorrentes, e que neste caso duas retas podem ser concorrentes se as mesmas se interceptam em um único ponto, pois se tiverem mais que um ponto em comum elas são coincidentes, ou iguais, assim utilizamos o Geogebra para mostrar um exemplo aos mesmos deste caso.

Neste momento, percebemos que não tínhamos mais tempo, então terminamos as explicações e pedimos aos alunos que realizassem os outros exercícios que estavam no material do aluno, em casa, encerrando assim mais um encontro.

7. PLANO DE AULA 7º ENCONTRO – 28/09/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender conceitos do Geometria Analítica, de modo que seja capaz de identificá-los, entender suas definições bem como realizar operações com os mesmos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Geometria Analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar posições relativas envolvendo ponto.
- Compreender equação geral e reduzida da circunferência.
- Compreender circunferência e reta;
- Resolver problemas que envolvam o conteúdo.

Conteúdo:

Geometria Analítica: Equação geral e reduzida da circunferência, posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios e Geogebra.

Encaminhamento metodológico:

1. Início da aula e retomada de conteúdos

Iniciaremos a aula lembrando o último conteúdo da aula anterior, propondo uma atividade simples sobre o posicionamento das retas.

Identifique a relação entre as retas e suas influências com os coeficientes.

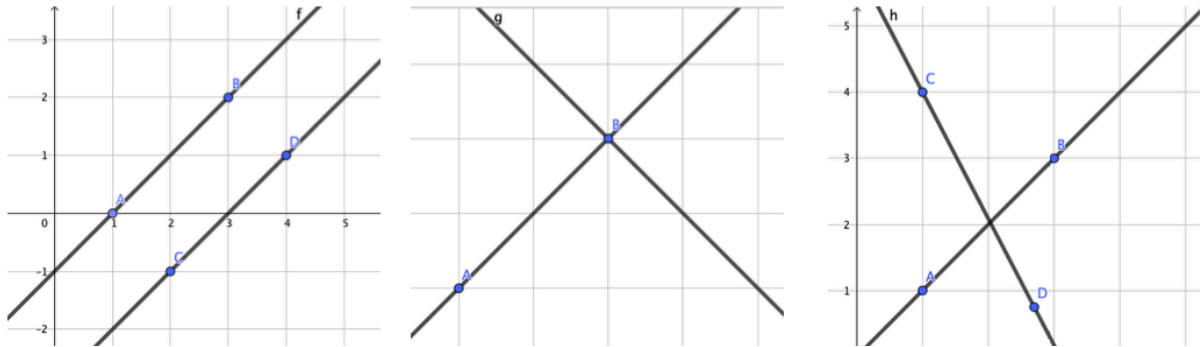


Figura 37: Tipos de retas.
Fonte: Acervo das autoras.

Deixaremos um tempo para que os alunos realizem a atividade, corrigindo em seguida.

Para iniciarmos o conteúdo desta aula, indagaremos os alunos como podemos obter uma circunferência, e então prosseguiremos lembrando algumas fórmulas e conceitos da circunferência.

Comprimento da circunferência:

$$C = 2\pi r$$

Área de uma figura circular:

$$A = \pi r^2$$

2. Início conteúdo de circunferência

Utilizando barbante e giz será desenhado uma circunferência no quadro, mostrando que uma característica importante, é que qualquer ponto que diste uma medida R do centro, pertence à circunferência.

Assim questionaremos os alunos como pode ser calculado a distância entre dois pontos no plano cartesiano, com o intuito de recordar a fórmula deduzida na aula 5:

$$d_{AO} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Como a distância entre o centro $O = (a, b)$ e qualquer ponto que pertence a circunferência mede R , substituindo na fórmula anterior, obtemos que

$$R = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Ou equivalentemente:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

A equação anterior é denominada de **equação reduzida** da circunferência.

Podemos expandir a equação reduzida, realizando a expansão dos quadrados, e reorganizando os termos, obtendo assim: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=R^2$ ou, de forma equivalente:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$

Essa é a **equação geral** ou **equação normal** da circunferência.

3. Exercício de fixação

Neste momento iremos propor aos alunos o exercício 1 e 2 do material do aluno, deixando que eles resolvam e será realizada a correção na sequência.

4. Posições relativas entre um ponto e uma circunferência:

No plano cartesiano, um ponto $P(x_0, y_0)$ em relação a uma circunferência λ de uma equação $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ tem uma dentre três posições possíveis: P pode ser interior a λ , pode pertencer a λ ou pode ser exterior a λ .

- **P é interior a λ** se, e somente se, a distância entre P e o centro C da circunferência é menor que o raio R .

$$CP < R \Rightarrow \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} < R$$

Como os dois membros dessa desigualdade são inúmeros não negativos, podemos quadrá-los, obtendo:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < R^2$$

Ou, de forma equivalente:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - R^2 < 0$$

- **P é pertence a λ** se, e somente se, a distância entre P e o centro C da circunferência é igual ao raio R .

$$CP = R \Rightarrow \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} = R$$

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$$

Ou, de forma equivalente:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

- **P é exterior a λ** se, e somente se, a distância entre P e o centro C da circunferência é maior que raio R .

$$CP > R \Rightarrow \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} > R$$

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > R^2$$

Ou, de forma equivalente:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - R^2 > 0$$

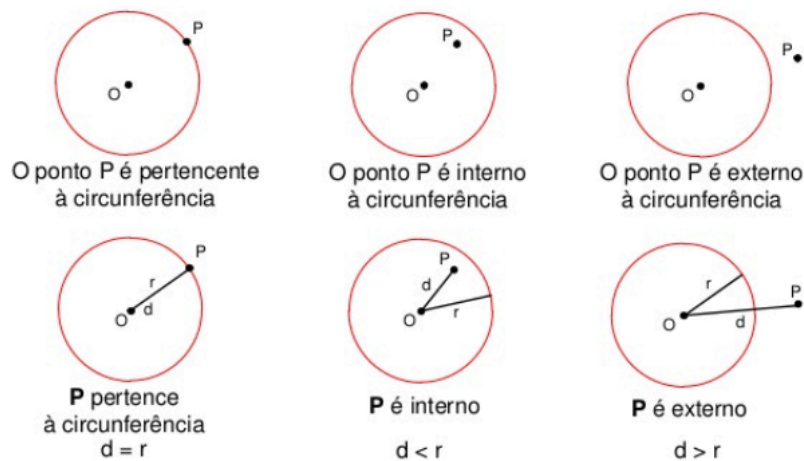


Figura 38: Posição relativa de pontos e circunferência.

Fonte: <https://pt.slideshare.net/lucnbr/apresentao-circulo-e-circunferencia>

5. Exercício de fixação

Neste momento iremos propor aos alunos os exercícios 3 e 4 do material do aluno, deixando que eles resolvam e será realizada a correção na sequência.

6. Posições relativas entre uma reta e uma circunferência:

No plano cartesiano, temos três posições relativas possíveis entre uma reta e uma circunferência, sendo elas: exterior, tangente e secante.

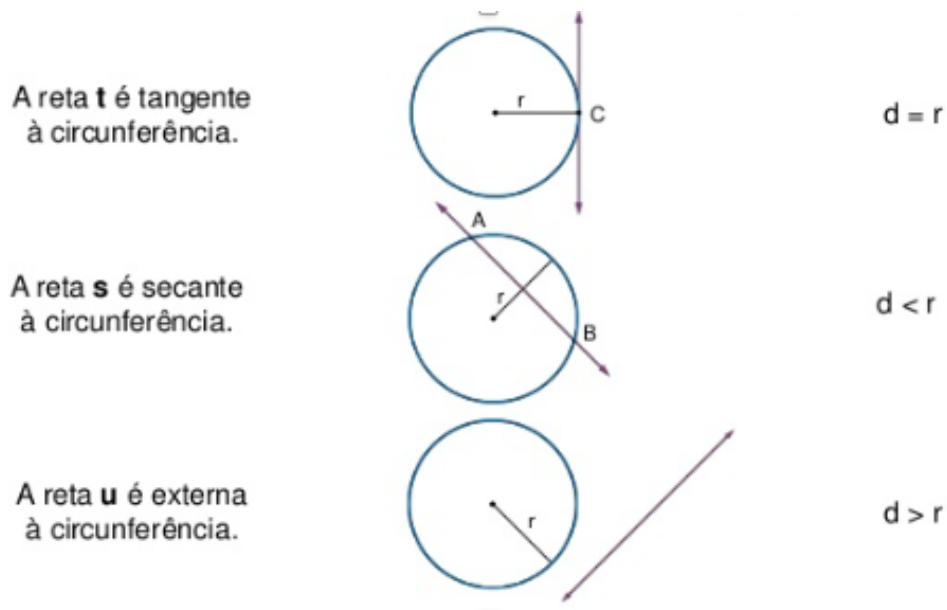


Figura 39: Posição relativa reta e circunferência.

Fonte: <https://pt.slideshare.net/lucnbr/apresentao-circulo-e-circunferencia>

7. Exercício de fixação

Neste momento iremos propor aos alunos o exercício 5 do material do aluno, deixando que eles resolvam e será realizada a correção na sequência.

8. Exercícios

Os alunos terão mais alguns exercícios no material do aluno, os quais poderão ser resolvidos em sala, caso de tempo, esclarecendo as dúvidas dos alunos, caso contrário ficará para que resolvam em casa.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed. Responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 3. 2. Ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. Vol. 3. 2. Ed. São Paulo: Moderna, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilce de.

Matemática: ciência e aplicações. Vol. 3. 7. Ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

7.1. MATERIAL DO ALUNO 7º ENCONTRO

- 1) (FEI-SP) Determine a equação da circunferência com centro no ponto C(2, 1) e que passa pelo ponto A(1, 1).

Resolução:

Temos que a equação reduzida da circunferência é do tipo:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Sendo (a,b) as coordenadas do centro da circunferência e C (2,1), temos:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$$

Sabendo um ponto por onde passa a circunferência, substituímos em (x,y), para descobrirmos o raio desta circunferência. Logo, A (1,1):

$$(1 - 2)^2 + (1 - 1)^2 = r^2$$

Então,

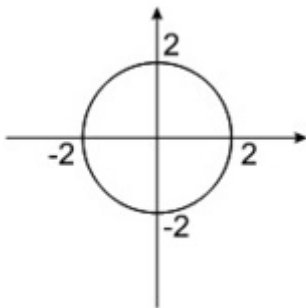
$$r^2 = 1 + 0 = 1$$

$$r = 1$$

Sendo o raio igual a 1, temos a seguinte equação:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

- 2) (G1 – cftsc 2010) Dada a figura abaixo cujas medidas estão expressas em centímetros,



e as proposições:

- I – é uma circunferência de diâmetro 2 cm.
- II – é uma circunferência de área $4\pi\text{cm}^2$.
- III – é uma circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

Considerando as proposições apresentadas, assinale a alternativa correta:

- a) Apenas as proposições I e III são verdadeiras.
- b) Apenas as proposições I e II são verdadeiras.
- c) Apenas a proposição III é verdadeira.
- d) Apenas as proposições II e III são verdadeiras.
- e) Apenas a proposição II é verdadeira.

Resolução:

Para este exercício devemos analisar as proposições:

- I- É falsa, pois o raio da circunferência é 2, logo o diâmetro é 4 cm.
 II- É verdadeira, pois sendo o raio 2 cm e a área $A = \pi r^2$, $A = 2^2\pi = 4\pi$.
 III- É verdadeira, pois sendo o raio 2 e o centro C (0,0), $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$, logo $x^2 + y^2 = 4$.

Logo a alternativa correta é letra D.

- 3) (G1 - CFTMG 2004 - adaptado) Analisando a equação da reta $r : x - 2y = 0$ que passa pelos pontos (0,0), (2,1) e da circunferência é: $(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 20$, podemos afirmar que:
- a reta é tangente a circunferência.
 - a reta é secante a circunferência.
 - a reta é exterior a circunferência.
 - a reta está em plano distinto da circunferência.

Resolução:

Sabemos que o centro da circunferência $C = (0,5)$, e sabemos alguns pontos da reta, podemos então calcular a distância dos pontos ao centro:

$$d_{AC} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{0 + 25} = \sqrt{25} = 5$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Verificando que a distância do ponto B ao centro é igual ao raio da circunferência, podemos concluir que a reta é tangente a circunferência. Logo a alternativa correta é letra A.

- 4) Dos pontos a seguir, qual deles é externo à circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$?
- (0, 0)
 - (-1, 1)
 - (-1, 2)
 - (-3, 2)
 - (-5, 1)

Resolução:

Para que o ponto seja externo, aplicando a distância do centro ao ponto, a distância é maior que o raio, ou ainda, substituindo o ponto na equação da circunferência e encontrando valores maiores que o raio ao quadrado. Logo:

- a. $(0 + 1)^2 + (0 - 1)^2 = 1 + 1 = 2 < 5$, logo (0,0) é ponto interno da circunferência.

- b. $(-1 + 1)^2 + (1 - 1)^2 = 0 + 0 = 0 < 5$, logo $(-1,1)$ é ponto interno da circunferência.
- c. $(-1 + 1)^2 + (2 - 1)^2 = 0 + 1 = 1 < 5$, logo $(-1,2)$ é ponto interno da circunferência.
- d. $(-3 + 1)^2 + (2 - 1)^2 = 4 + 1 = 5 = r^2$, logo $(-3,2)$ pertence a circunferência.
- e. $(-5 + 1)^2 + (1 - 1)^2 = 16 + 0 = 16 > 5$, logo $(-5,1)$ é ponto externo da circunferência.

5) (UFAL - adaptado) Assinale a alternativa correta. As sentenças abaixo referem-se à circunferência C, de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

- a. O ponto $(-2, 2)$ pertence ao exterior de C.
- b. O ponto $(1, 6)$ pertence ao interior de C.
- c. O ponto $(-1, -1)$ pertence a C.
- d. O ponto $(-5, 0)$ pertence ao interior de C.
- e. O ponto $(0, 1)$ pertence ao exterior de C.

Resolução:

Com a equação geral da circunferência, basta substituímos os pontos para descobriremos se P é interior, exterior ou pertence a circunferência.

- a. $(-2,2)$

Substituindo o ponto na equação:

$$(-2)^2 + (2)^2 + 2 * (-2) - 4 * 2 - 4 = 4 + 4 - 4 - 8 - 4 = -8 < 0$$

Logo o ponto é interior e a sentença é falsa.

- b. $(1,6)$

Substituindo o ponto na equação:

$$1^2 + 6^2 + 2 * 1 - 4 * 6 - 4 = 1 + 36 + 2 - 24 - 4 = 11 > 0$$

Logo o ponto é exterior e a sentença é falsa.

- c. $(-1,-1)$

Substituindo o ponto na equação:

$$(-1)^2 + (-1)^2 + 2 * (-1) - 4 * (-1) - 4 = 1 + 1 - 2 + 4 - 4 = 0$$

Logo o ponto pertence a circunferência e a sentença é verdadeira.

- d. $(-5,0)$

Substituindo o ponto na equação:

$$(-5)^2 + 0^2 + 2 * (-5) - 4 * 0 - 4 = 25 - 10 - 4 = 11 > 0$$

Logo o ponto é exterior e a sentença é falsa.

- e. $(0,1)$

Substituindo o ponto na equação:

$$0^2 + 1^2 + 2 * 0 - 4 * 1 - 4 = 1 - 4 - 4 = -7 < 0$$

Logo o ponto é interior e a sentença é falsa.

Então a alternativa correta é letra C.

6) (Mackenzie - adaptado) Qual o raio da circunferência que passa pelos pontos (1, 3) e (3, 1) e que tem o centro na reta $x-4=0$?

Resolução:

Para encontramos o raio desta circunferência, sabemos que o seu centro está na reta $x-4=0$ e que passa pelos pontos (1,3) e (3,1), logo podemos montar um sistema com essas informações:

$$\begin{cases} (3-4)^2 + (1-b)^2 = r^2 & (1) \\ (1-4)^2 + (3-b)^2 = r^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + (1-2b+b^2) = r^2 \\ 9 + (9-6b+b^2) = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + (1 - 2b + b^2) = r^2 \\ 9 + (9 - 6b + b^2) = r^2 \end{cases}$$

Igualando as duas expressões, teremos:

$$2 - 2b + b^2 = 18 - 6b + b^2$$

$$4b = 16 \Rightarrow b = \frac{16}{4} = 4$$

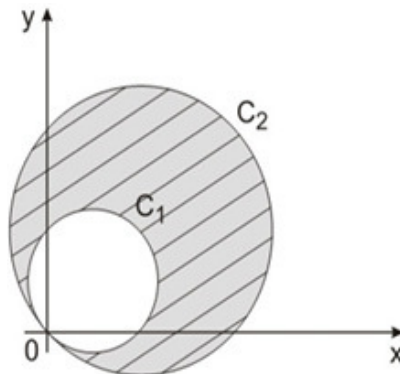
Substituindo b em um (1):

$$(3-4)^2 + (1-4)^2 = r^2$$

$$1 + 9 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{10}$$

Portanto, o raio desta circunferência é $r = \sqrt{10}$.

7) Considere as equações das circunferências $C_1 = (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ e $C_2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$, cujos gráficos estão representados abaixo, qual a área da região hachurada?



Resolução:

Sabemos que a área da circunferência é dada por $A = \pi r^2$ e analisando as equações das circunferências, encontramos que o raio de C_1 é $r = \sqrt{2}$ e o raio de C_2 é $r = \sqrt{8}$. Portanto, devemos encontrar a área das duas circunferências:

$$A_1 = \pi r^2 = \pi * (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

$$A_2 = \pi r^2 = \pi * (\sqrt{8})^2 = 8\pi$$

Como queremos saber a área hachurada e C_1 está dentro de C_2 , devemos subtrair a área de C_1 em relação a C_2 :

$$A_{hachurada} = A_2 - A_1 = 8\pi - 2\pi = 6\pi.$$

8) (UFPB- adaptada) Considerando as seguintes proposições relativas à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano cartesiano, identifique a(s) verdadeira(s):

- O ponto P(-1,1) é interior à circunferência.
- O ponto P(-2,2) é exterior à circunferência.
- O ponto P(- $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$) está sobre a circunferência.
- A reta de equação $y = x$ intercepta a circunferência em dois pontos.

Resolução:

Com a equação geral da circunferência, basta substituímos os pontos para descobrirmos se P é interior, exterior ou pertence a circunferência.

a. (-1,1)

Substituindo o ponto na equação:

$$(-1)^2 + (1)^2 = 1 + 1 = 2 < 4$$

Logo o ponto é interior e a sentença é verdadeira.

b. (-2,2)

Substituindo o ponto na equação:

$$(-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 > 4$$

Logo o ponto é exterior e a sentença é verdadeira.

c. (- $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)

Substituindo o ponto na equação:

$$(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4$$

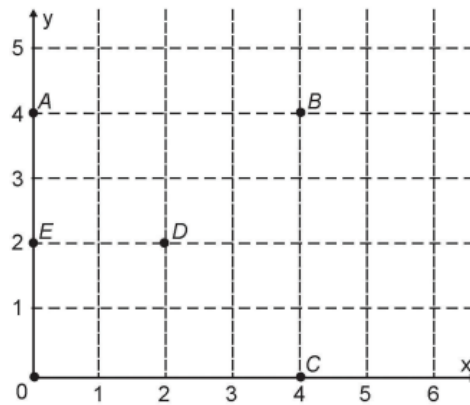
Logo o ponto pertence a circunferência e a sentença é verdadeira.

d. Esta alternativa é verdadeira, pois, sendo $y = x$, temos que a equação

$$x^2 + y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 = 4$$

possui duas soluções distintas.

8) (ENEM 2018) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando “tiros”, seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0 ; 4), B(4 ; 4), C(4 ; 0), D(2 ; 2) e E(0; 2).



Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

Resolução:

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

7.2. RELATÓRIO 7º ENCONTRO

O objetivo desta aula foi trabalhar com conteúdos relacionados ao círculo e circunferência, tais como: relembrar fórmula da área do círculo, comprimento da circunferência, deduzir a equação da circunferência e trabalhar com as posições relativas entre circunferência e ponto, circunferência e reta.

Demos início a aula retomando a fórmula da área do círculo e do comprimento da circunferência por meio de slides, já que esses assuntos haviam sido trabalhados no PROMAT, no primeiro semestre.

Dando continuidade, questionamos os alunos o que caracteriza uma circunferência, ou em outras palavras, o que precisamos saber para construir uma circunferência. Por meio de questionamentos os discentes chegaram a conclusão que todo ponto “a” da circunferência dista a mesma distância até o centro que qualquer outro ponto b da circunferência. Logo para construir uma circunferência basta conhecer o centro e o seu raio. Para enfatizar geometricamente que isto é verdade, realizamos a construção de uma circunferência no quadro, fazendo uso de barbante e giz. Em seguida deduzimos a equação da circunferência, utilizando a fórmula da distância trabalhada nas duas aulas anteriores.

Perguntamos para os alunos o que acontece com a circunferência se mudamos o seu centro, por exemplo, dado uma circunferência centrada na origem, determinada pela equação $x^2 + y^2 = 1$, o que acontece com a circunferência se mudar sua equação para $(x - 1)^2 + y^2 = 1$? E se mudássemos para $(x - 2)^2 + y^2 = 1$? A cada pergunta deixávamos que os alunos pensassem um pouco e depois fazíamos no GeoGebra. Com isto observaram que a circunferência era translada de acordo com a variação dada, o mesmo foi feito para o uma mudança no eixo y, e depois para o raio. Pedimos assim, para que fizessem os exercícios 1 e 2 do material do aluno, para que praticassem, após foram liberados para o intervalo.

Demos início a segunda parte da aula, trabalhando com posição relativa entre circunferência e ponto. Para isto, foi construído três circunferências de centro e raio genéricos, com três pontos de localizações distintas, um “dentro”, um “fora” e outro na circunferência. Em seguida os alunos foram questionados sobre a relação entre a distância de cada um desses pontos até o centro de cada uma das circunferências, e a localização dos pontos. Sendo mostrado que os pontos interiores, exteriores e da circunferência possuem uma distância menor, maior e igual ao raio respectivamente. Assim solicitamos que os alunos fizessem os exercícios 4 e 5 do material do aluno. Após 20 minutos foram corrigidos, sendo que os alunos não apresentaram dificuldade em fazê-los.

Por fim, foi trabalhado com a posição relativa entre circunferência e reta. Para isso, colocamos no quadro a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e da reta $x = 1$. Os alunos tiveram dificuldade em visualizar o gráfico da reta dada, para tentar contornar isto, escrevemos a reta na equação geral (r: $1x + 0y - 1 = 0$), mas a dificuldade de visualização ainda estava presente, então fomos construindo o gráfico da reta com os alunos, sendo observado que essa reta e a circunferência possuíam um ponto em comum, em seguida foi

realizado o mesmo procedimento para a reta $s: x = y$ e $t: x = 2$, salientando que a circunferência e a reta s possuem dois pontos em comum e a reta t não possui nenhum ponto em comum, sendo dada as devidas nomenclaturas da posição relativa em cada um dos três casos, tangente, secante e exterior.

Saindo da geometria e indo para a álgebra, destacamos que para um ponto pertencer a reta e circunferência, este ponto deve satisfazer a equação da reta e da circunferência ao mesmo tempo, ou seja, devemos resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 = 1. \\ s: x = y. \end{cases}$$

Entretanto, os alunos não estavam compreendendo o que deveria ser feito. Conversando com os discentes, vimos que a dificuldade estava na notação. No momento em que escrevemos apenas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1. \\ x = y. \end{cases}$$

os alunos entenderam como prosseguir.

Assim pudemos concluir que após somar as equações, obtemos uma equação quadrática em x , ou em y , e assim bastava olhar para o discriminante da equação para determinar quantos pontos satisfazem as duas equações. Após foi realizado um resumo no quadro acerca do discriminante e a posição relativa entre reta e conferência. No restante da aula, cerca de 10 minutos, os alunos realizaram os demais exercícios da lista e tiraram dúvidas.

8. PLANO DE AULA 8º ENCONTRO – 05/10/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender o princípio fundamental da contagem.

Objetivos Específicos:

- Observar a regularidade do PFC (Princípio Fundamental da Contagem);
- Compreender o Princípio fundamental da contagem (PFC);
- Deduzir o PFC;

- Utilizar o PFC para resolver problemas.
- Compreender o que é uma Permutação;
- Resolver problemas envolvendo Permutação Simples.

Conteúdo:

Princípio Fundamental da Contagem e Permutação Simples.

Recursos Didáticos:

Material impresso, quadro negro e giz.

Encaminhamento metodológico:

1. Início da aula e apresentação da proposta da aula

Esta aula é baseada na metodologia de ensino e aprendizagem Resolução de Problemas. Para isso, iremos propor sete problemas em que suas resoluções envolvem o PFC. Sendo proposto os problemas para os alunos resolverem em grupos, as professoras acompanharão, auxiliarão e incentivarão os alunos na resolução.

Ao final, será realizada uma socialização, para isto pediremos para que um aluno de cada grupo vá ao quadro e resolva um dos problemas propostos, para que em seguida, façamos uma plenária.

Esta aula é baseada no trabalho de CALISTI (2016) realizado no PDE. As resoluções dos problemas propostos e mais atividades podem ser encontrados online.

2. Problemas propostos

Para o primeiro Problema, entregaremos para cada grupo uma cartolina e um envelope com as imagens dos sanduiches, refrigerantes e sorvetes descritos na tabela 1 do problema a seguir:

Problema 1 - Adaptado do livro de Dante (2014, p.247)

Numa lanchonete há 4 tipos de sanduiches, 3 tipos de refrigerante e dois tipos de sobremesa, como mostra a tabela: 17 Tabela 1:

Sanduiches	Refrigerantes	Sobremesa
X-tudo	Laranja	Sorvete
X-bacon	Morango	Cupcake
X- salada	Limão	-----
X-calabresa	-----	-----

Quadro 1: Quadro dos lanches.

Fonte: Acervo dos autores.

- a) De quantas maneiras diferentes podemos comer um sanduiche com um refrigerante sem a sobremesa?
- b) De quantas maneiras diferentes podemos comer um lanche completo, ou seja, um sanduiche, um refrigerante e uma sobremesa?

Esperamos que os alunos utilizem as figuras para montar as possíveis combinações de lanches.

Problema 2 - Adaptado do livro de Bianchini e Paccola (1990, p.127). Uma casa comercial tem à disposição de seus clientes três marcas de refrigeradores (Consul, Electrolux e Brastemp), cada uma em quatro tamanhos diferentes (260L, 352L, 437L e 573L) e três cores diferentes (Branca, Inox e Marrom).

- a) Em relação à marca e ao tamanho, de quantos modos possíveis um cliente pode escolher um desses refrigeradores?
- b) Em relação à marca, ao tamanho e à cor, de quantos modos possíveis um cliente pode escolher um desses refrigeradores?

Problema 3 - (UFES – Adaptado) Um Shopping Center possui 6 portas de entrada para o andar térreo, 3 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do Shopping Center pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

Problema 4 - (Adaptado do livro de Paiva.) Volume Único – 1ª Edição, (2005, p.255) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco, mas na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 6 algarismos e começa com 4. Qual o número máximo de possibilidades que a pessoa tem para acertar a senha?

Problema 5 – Em uma escola de ensino médio há seis turmas nas três séries (1ºA, 1ºB, 2ºA, 2ºB, 3ºA e 3ºB). Está sendo realizado um torneio de futebol de salão, no qual cada turma será representada por uma equipe. Admitindo que não haja empates, qual é o número possível de resultados para as três primeiras colocações?

Problema 6 - (Adaptado do livro: Matemática para o 2º grau de: Gentil, Marcondes, Greco, Bellotto e Sérgio (1997, p.240) De quantos modos podemos pintar de cores diferentes, só as

faces laterais de uma pirâmide pentagonal regular, utilizando 7 cores diferentes, sendo cada face de uma única?

Problema 7 - Será colocado duas cadeiras na frente do quadro e solicitado que dois alunos se sentem nelas. Então questionaremos de quantos modos distintos os dois alunos podem se sentarem nas cadeiras. Em seguida realizaremos as trocas de lugares dos alunos, sendo anotado no quadro cada combinação possível. Neste caso, temos duas possibilidades.

Dando continuidade acrescentaremos uma cadeira e solicitaremos que um aluno, diferente dos outros dois escolhidos inicialmente, sente na cadeira acrescentada. Realizaremos o mesmo processo do que no caso que tínhamos duas cadeiras.

Obtendo, neste caso, seis permutações.

E se tivéssemos quatro cadeiras quantos modos distintos podemos dispor quatro alunos?

Princípio Fundamental da Contagem

Se um evento é composto por m etapas diferentes sucessivas e independentes de tal maneira que a etapa 1 tenha n_1 possibilidades, que a etapa 2 tenha n_2 possibilidades, ..., que tenha n_m possibilidades, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$. Esse é o Princípio Fundamental de Contagem.

Vejamos: No caso em que tínhamos duas cadeiras poderíamos dispor dois alunos de dois modos diferentes. Já quando tínhamos três cadeiras, o 1º aluno tem três opções de lugares, fixando este aluno em uma das cadeiras, sobram duas opções para o 2º aluno, e seguindo este raciocínio, sobra uma cadeira para 3º aluno.

Logo pelo Princípio fundamental da contagem há $3 \times 2 \times 1 = 6$. Assim, quando temos quatro cadeiras teríamos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ combinações.

3. Formalização do conteúdo

Permutação simples

Note que os problemas 5, 6 e 7 são problemas de permutações, assim, após formalizarmos o PFC, enfatizaremos que esses problemas são de permutações simples.

Problema de permutação

Todo problema que deseje saber de quantos modos diferentes é possível ordenar n objetos distintos de um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é um ***problema de Permutação***.

Fatorial:

Em problemas de contagem é comum aparecer $n!$ Que é definido conforme abaixo.

Seja n um número natural, com $n \geq 2$. Define-se o **fatorial de n** , representado por $n!$, como o produto dos números naturais consecutivos $n, n-1, n-2, \dots, 1$. Isto é:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

Ou

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Permutação simples

É um caso particular de arranjos simples. Os agrupamentos só diferem entre si pela ordem de seus elementos.

$$P_n = A_n^n = n!$$

P_n - Permutação simples de n elementos.

A_n^n - Arranjos simples de n elementos formados n a n .

Permutação com repetição

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_r!}$$

com $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n$.

4. Exercícios

Após a socialização de todos os problemas, os alunos terão exercícios que envolvem o conteúdo apresentado. Até o término da aula (caso haja tempo), pediremos aos alunos que resolvam os exercícios enquanto os auxiliamos e realizaremos as correções.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua, através da observação do desenvolvimento dos alunos com os problemas propostos.

Referências:

CALISTI, Amarildo Sidney. **O ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NA ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**: uma abordagem sem o uso de fórmulas. 2016. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_unespar-apucarana_amarildosidneycalisti.pdf>. Acesso em: 16 set. 2019.

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed. responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. 2º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar**: combinatória, probabilidade. Vol. 5. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática**: Ensino Médio. Vol. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

VIDIGAL, Cássio. **ANÁLISE COMBINATÓRIA, BINÔMIO DE NEWTON E PROBABILIDADES**. 2016. Disponível em: <<http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/wp-content/uploads/sites/12/2016/06/apostila-matematica-3-01-AN%C3%81LISE-COMBINAT%C3%93RIA-cassio.pdf>>. Acesso em: 16 set. 2019.

8.1. MATERIAL DO ALUNO 8º ENCONTRO

1) (Unifor–CE) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

Resolução:

Como todos os filhos devem ficar entre os pais, há duas possibilidades de escolha para os lugares que os pais estarão na foto, podemos ter

Pai- Filhos- Mãe e Mãe- Filhos - Pai.

Agora basta saber quantos modos, distintos, os quatro filhos podem posar para a foto, que de acordo com o princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ tipos, e como, há duas

possibilidades para os pais, existem $2 \cdot 24 = 48$ modos distintos de a família posar para tirar a foto.

2) As portas de acesso de todos os apartamentos de certo hotel são identificadas por meio de números ímpares formados três algarismos que podem ser 0,1,2,3,4 ou 5, de modo que o número formado por estes três algarismos seja ímpar. Quantos apartamentos há no hotel?

Resolução:

Para descobrir quantos apartamentos há no hotel, devemos impor à nossa contagem de apartamentos que o último número do algarismo seja ímpar. Segundo a informação dada pelo problema as opções de números ímpares são “1, 3 e 5” e os números podem ser repetidos, desta forma existem 3, 6 e 6 opções para o terceiro, segundo e primeiro algarismo, 6 6 3, logo, pelo princípio multiplicativo existem 108 apartamentos ao todo nesse hotel.

3) As portas de acesso de todos os apartamentos de certo hotel são identificadas por meio de números ímpares formados três algarismos distintos que podem ser 0,1,2,3,4 ou 5, de modo que o número formado por estes três algarismos seja ímpar. Quantos apartamentos há no hotel?

Resolução:

Vamos impor à nossa contagem de apartamentos que o último número do algarismo seja ímpar e que os números não podem ser repetidos. Segundo a informação dada pelo problema as opções de números ímpares são “1, 3 e 5”, desta forma existem 3, 5 e 4 opções para o terceiro, segundo e primeiro algarismo, 4 5 3, logo, pelo princípio multiplicativo existem 60 apartamentos ao todo nesse hotel.

4) O código Morse usa duas “letras”, ponto e traço, e as “palavras” representadas utilizam essas letras, podendo ser palavras com 1 letra, 2 letras, 3 letras ou 4 letras. Quantas são todas as palavras representadas no código Morse?

Resolução:

Observe que o código Morse pode gerar palavras de 1, 2, 3 ou 4 letras em quantidades diferentes. Assim, nossa estratégia é a de usar o Princípio Multiplicativo para contar separadamente estas palavras e, depois, aplicar o Princípio Aditivo para contabilizar o total desejado. Note que, há 2 palavras de uma letra.

Por outro lado, utilizando o Princípio Multiplicativo, há $2 \times 2 = 4$ palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois modos de escolher a segunda

letra. Analogamente, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ palavras de três letras e $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ palavras de 4 letras.

Logo, aplicando o Princípio Aditivo, concluímos que o número total de palavras é $2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

5) Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

Resolução:

Cada casal pode sentar-se em duas posições diferentes: o namorado à esquerda e a namorada à direita e vice-versa. Como são dois casais, pelo princípio multiplicativo, temos quatro casos para esses posicionamentos. Além disso, os dois casais podem sentar-se em duas posições diferentes: um à direita e outro à esquerda do banco e vice-versa.

Pelo princípio multiplicativo, segue que $4 \times 2 = 8$ é o total de casos desejado.

8.2. RELATÓRIO 8º ENCONTRO

No dia 05 de outubro de 2019, nos encontramos nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para iniciar as atividades do PROMAT. Antes de iniciarmos as atividades do oitavo encontro, organizamos a sala de aula para a chegada dos alunos, organizamos as carteiras de modo que fossem criados grupos.

Próximo das 8 horas da manhã, os alunos foram chegando e para iniciarmos os trabalhos do oitavo encontro, estavam presentes 22 alunos. Neste encontro abordamos o conteúdo de uma forma diferente, dos encontros passados, utilizamos a resolução de problemas, para introduzir o conteúdo a ser estudado, que era o Princípio fundamental da contagem (PFC).

Iniciamos a aula entregando aos alunos seis problemas envolvendo o PFC, e pedimos aos mesmos, que resolvessem em grupo, do jeito que eles achavam correto, enquanto nós os auxiliávamos. No primeiro problema entregamos, por grupo, uma cartolina e figuras de sanduiches, refrigerantes, sorvete e *cupcake*, para que os mesmos tivessem um auxílio a mais para montar as combinações possíveis que se pedia no problema.

Conforme foram resolvendo os problemas, nos chamávamos para os auxiliarem nos exercícios que tiveram dúvidas, e assim se seguiu até umas nove e meia. Após pedimos para que um aluno de cada grupo viesse até o quadro e fizesse a resolução de um dos problemas propostos.

Enquanto os alunos colocavam suas resoluções, íamos tirando as dúvidas dos outros alunos. Após terem colocados suas resoluções, liberamos os mesmos para o intervalo e continuamos na volta.

Quando retornamos do intervalo, pedimos para os alunos que escreveram a resolução dos exercícios no quadro, que viessem até a frente e dissessem para os colegas e as professoras o que havia realizado. Os alunos foram ao quadro, um por um, nos dizendo o que havia feito, conforme eles iam explicando, nós íamos os ajudando na explicação, os demais alunos ouviam e participavam das explicações dos colegas.

Ao final de todas as explicações realizadas pelos alunos, fizemos a formalização do conteúdo, explicando aos alunos que os problemas apresentados a eles e as resoluções que os mesmos realizaram eram do PFC e após passamos a definição. Neste momento os alunos estavam participativos e prestando atenção nas explicações.

Conforme fomos formalizando o conteúdo, também apresentamos aos alunos alguns exemplos que utilizavam o PFC, e realizamos com os alunos o um problema do ENEM 2013, com o intuito de que os alunos pudessem observar que precisamos tomar cuidado com algumas informações que temos no nosso problema, para não tomarmos o caminho errado da resolução.

Após, pedimos aos alunos que realizassem o exercício, que pedia para formar anagramas com algumas palavras, com o intuito de que os mesmos percebessem a diferença quando possuímos palavras com letras repetidas e sem letras repetidas.

Na sequência, apresentamos a eles a definição de fatorial, pois em exercícios de contagem é comum aparecer $(n!)$, alguns alunos não sabiam ou nem lembravam do fatorial, então este momento foi de lembrar este conceito.

Apresentamos aos alunos, a definição, a fórmula e as diferenças de permutação simples e com repetição, através das resoluções e observações realizadas no exercício proposto de anagramas.

Após pedimos aos alunos que realizassem os outros exercícios do material do aluno, enquanto nós os ajudávamos nas carteiras. E assim foi até o final da aula.

9. PLANO DE AULA 9º ENCONTRO – 19/10/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de permutação, arranjo, combinação e probabilidade, de modo que seja capaz de identifica-los, entender suas definições bem como realizar operações com os mesmos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com arranjo e combinação, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar situações que envolvam o conteúdo;
- Mostrar ao aluno a importância dos processos de Contagem em problemas diversos;
- Exercitar a prática de construção de esquemas e modelos que ajudem na resolução de um problema;
- Desenvolver habilidades na resolução de problemas, diferenciando-os, quanto aos tipos de agrupamento;
- Possibilitar que o aluno desenvolva a percepção quanto à formação dos grupos que se diferenciam somente pela natureza de seus elementos ou não, de acordo com o desafio proposto.
- Compreender definições do cálculo de probabilidades;
- Resolver problemas e exercícios que envolvam o conteúdo;

Conteúdo:

Arranjo, combinação e probabilidade.

Recursos Didáticos:

Material impresso, quadro negro e giz.

Encaminhamento metodológico:

1. Início da aula e encaminhamento da aula

A turma será dividida em seis grupos de no máximo de quatro pessoas. Em seguida será entregue uma das atividades a 3 grupos e a segunda atividade a outros três grupos para que discutam e interajam entre si.

2. Atividade 1

1) Uma turma do 3º ano do Ensino Médio possui 22 alunos.

(i) Aproximando-se da formatura, esta turma precisa organizar-se com os preparativos e decidiram escolher entre estes, 3 alunos para formar um comitê de formatura. Quantas são os possíveis comitês que podem ser formados?

(ii) Ainda na organização desta formatura, é necessário escolher entre os 12 professores, três para compor a mesa de recepção dos formandos. Quantos são as diferentes possíveis escolhas?

2) A Série A do Campeonato Brasileiro, desde 2007, é disputado por 20 clubes. Cada clube enfrenta outro clube duas vezes durante todo o campeonato que dura de Maio à Dezembro (Um jogo como mandante e outro como visitante). Ao final de todas as partidas, seguindo o sistema de pontos corridos, é campeão o clube que totalizar mais pontos. Os quatro últimos colocados são rebaixados para a Série B do Campeonato Brasileiro. Sabendo disso, responda:

(i) Ao todo, quantas são as partidas no Campeonato brasileiro?

(ii) De quantas maneiras podemos ter os quatro clubes rebaixados entre todos os participantes? (Ignore a classificação entre os rebaixados).

3. Atividade 2

1) Uma turma do 3º ano do Ensino Médio possui 22 alunos.

(i) Aproximando-se da formatura, esta turma precisa organizar-se com os preparativos e decidiram escolher entre estes, 3 alunos para formar um comitê de formatura. Estes três membros do comitê terão funções específicas. Um deles deve cuidar de definir e contratar o local da festa. Outro será responsável por arrecadar e juntar as verbas entre os formandos. O terceiro pela definição e contratação do bufê. Quantas são os possíveis comitês que podem ser formados?

(ii) Ainda na organização desta formatura, é necessário escolher entre os 12 professores, três para compor os cargos de patrono, paraninfo e amigo da turma. Quantos são as diferentes possíveis escolhas?

2) A Série A do Campeonato Brasileiro, desde 2007, é disputado por 20 clubes. Cada clube enfrenta outro clube duas vezes durante todo o campeonato que dura de Maio à Dezembro (Um jogo como mandante e outro como visitante). Ao final de todas as partidas, seguindo o sistema de pontos corridos, é campeão o clube que totalizar mais pontos. Os quatro últimos colocados são rebaixados para a Série B do Campeonato Brasileiro. Sabendo disso, responda:

(i) De quantas maneiras podemos ter os quatro clubes rebaixados entre todos os participantes? (Considere relevante a classificação entre os rebaixados).

Incentivaremos os alunos a realizarem esboços, esquemas ou modelos que lhes ajudem na formação dos agrupamentos.

Após cada grupo encontrar suas soluções, pediremos para que troquem a lista e novamente tentem resolver os problemas propostos. Talvez, os alunos podem pensar se tratar dos mesmos problemas. Assim insistiremos para que leiam com atenção o enunciado.

Agora discutiremos os resultados encontrados, podendo ser realizadas as seguintes perguntas:

- Os problemas, de uma lista para outra, eram diferentes?
- Em que os problemas se diferenciavam?
- Vocês encontraram soluções diferentes para cada uma das listas?

Espera-se que os alunos percebam que a diferença principal entre as duas atividades está ligada à importância quanto à ordem dos elementos.

1)

- i) 1540 comitês.
- ii) 220 escolhas.

2)

- i) 380 partidas.
- ii) 4845 maneiras.

4. Formalização do conteúdo

Arranjos simples

Nos arranjos simples, os agrupamentos diferem pela ordem ou pela natureza de seus elementos.

$$A_{n,p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ com } n \geq p.$$

A_n^p - Arranjos simples de n elementos formados p a p .

Combinação simples

Nas combinações simples, os agrupamentos só diferem entre si pela natureza de seus elementos.

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } n \geq p.$$

$\binom{n}{p}$ - Número binomial

C_n^p – Combinação simples de n elementos tomados p a p

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}.$$

	Arranjo	Combinação
Ordem	Importa	Não importa
Significado	Arranjo refere-se às diferentes maneiras de organizar um conjunto de objetos em uma ordem sequencial.	Combinação refere-se às várias maneiras de escolher itens entre um grande conjunto de objetos, de modo que sua ordem não importa.
O que é	Elementos ordenados	Elementos não ordenados.
Fórmula	$A_{n,p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ <p>A_n^p - Arranjos simples de n elementos formados p a p.</p>	$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ <p>C_n^p - Combinação simples de n elementos tomados p a p.</p>

Quadro 2: Quadro de comparação.

Fonte: Acervo das autoras.

5. Exercícios

Neste momento até o intervalo, pediremos aos alunos que resolvam os exercícios de arranjo e permutação, esclarecendo possíveis dúvidas.

6. Probabilidade

Atividade software R

Problema: Vamos jogar dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Jogando os dois dados simultaneamente e, em seguida, somando os valores das faces voltadas para cima. Nestas condições qual é a soma mais provável de ocorrer?

Em seguida iremos ler o problema com os alunos, solicitando que cada aluno marque qual é a soma que ele acredita que seja mais provável de acontecer. Em seguida, os alunos devem discutir com os colegas o valor escolhido, realizando o experimento de jogar os dados 30 vezes e marcando quantas vezes saiu cada soma possível.

Então discutiremos com os alunos os dados obtidos esperando que os alunos cheguem a conclusão que a soma sete é mais provável de ocorrer. Em seguida colocaremos os dados no Software R e geraremos as probabilidades.

7. Socialização e correção da atividade

Neste momento diremos para os alunos que o ato de jogar os dados e observar qual é a soma dos dados em cada jogada consiste num experimento aleatório, *ou seja é um experimento que, quando repetido de várias vezes e sob as mesmas condições, apresenta entre as possibilidades, resultados imprevisíveis.*

Em seguida anotaremos como par ordenado os possíveis resultados de cada jogada, do experimento. Este é o espaço amostral do experimento e cada par ordenado deste conjunto é denominado de elemento.

Considera-se que o espaço amostral apresenta n elementos e o que se pretende determinar, no caso o evento A , apresenta a elementos. Vale, portanto, a relação que indica o número de elementos pretendidos pelo número de elementos totais do universo em questão.

$$p(A) = \frac{a}{n}$$

Logo no nosso problema temos as possibilidades abaixo:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tabela 2: Tabela das possibilidades.

Fonte: Acervo das autoras.

Vemos que há mais possibilidades de ocorrer soma sete, visto que

$$p(\text{soma } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Enquanto a possibilidade de ocorrer soma seis é

$$p(\text{soma } 6) = \frac{5}{36} = p(\text{soma } 8).$$

8. Exercícios

Neste momento deixaremos que os alunos resolvam os exercícios do material do aluno, referente aos conteúdos abordados. Acompanharemos os alunos, esclarecendo dúvidas e realizando correções dos exercícios necessários.

Avaliação

A avaliação será realizada de forma contínua, com observações do desenvolvimento dos alunos nas atividades e exercícios.

Referências:

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed. responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações**. 2º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar: combinatória, probabilidade**. Vol. 5. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. Vol. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Lopes dos Santos de. **Análise Combinatória: Raciocínio recursivo e processos de enumeração**. 2017. Disponível em: <<http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/16092015Carlos-Alberto-Lopes-dos-Santos-de-Oliveira.pdf>>. Acesso em: 20 set. 2019.

9.1. MATERIAL DO ALUNO 9º ENCONTRO

1) Quantas comissões de 4 alunos podemos formar com 20 alunos de uma turma?

Resolução:

Desejamos escolher quatro dos 20 alunos de uma turma, como não há “cargos” determinados para cada integrante da comissão, concluímos que a ordem de escolha não importa. Logo, utilizando a fórmula de combinação para realizar esta contagem, obtendo

$$C_{20}^4 = \frac{20!}{(20-4)!4!} = 4845.$$

2) Em época de eleição para o grêmio estudantil do colégio, tiveram 12 candidatos aos cargos de presidente, vice-presidente e secretário. De quantos modos diferentes estes candidatos poderão ocupar as vagas deste grêmio?

Resolução:

Nesse problema a ordem de “escolha” afeta na contagem, ou seja, a ordem importa, logo o problema é de arranjo. Portanto, existem

$$A_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = 1320$$

Modos diferentes que esses candidatos poderão ocupar as vagas do grêmio.

3) Em uma competição de xadrez existem 8 jogadores. De quantas formas diferentes poderá ser formado o pódio (primeiro, segundo e terceiro lugares)?

Resolução:

Este problema é de arranjo, já que, deseja determinar a formação do pódio, assim a ordem importa. Portanto existem

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

Formas de formação do pódio.

4) (UFOP - Minas Gerais) No meio da “invasão tecnológica” que toma conta de nossas vidas, dona Antônia esqueceu sua senha bancária justamente na hora de efetuar um saque. Ela lembra que a senha é formada por quatro algarismos distintos, sendo o primeiro 5 e o algarismo 6 aparece em alguma outra posição. Qual é o número máximo de tentativas que o banco deveria permitir para que dona Antônia consiga realizar o saque?

Resolução:

Como o primeiro algarismo é formado pelo número 5, então existem nove algarismos que podem compor os outros três algarismos da senha da dona Antônia. Ainda, há três opções para o número 6 compor a senha da dona Antônia, sendo necessário determinar os outros dois algarismos da senha, e como os algarismos são distintos, existem $8 \cdot 7 = 56$ opções, que ainda podem ser permutados de três modos diferentes, já que existem três lugares que o algarismo seis poderia ocupar na senha, portanto, seriam necessárias $3 \cdot 56 = 159$ tentativas para que dona Antônia consiga realizar o saque.

5) (Unirio – RJ) Com os algarismos de 1 a 9, qual o total de números de 4 algarismos diferentes, formados por 2 algarismos pares e 2 ímpares?

Resolução:

Sejam P um algarismo par e I um algarismo ímpar. De acordo com o solicitado pelo problema, poderíamos formar números do tipo PPII; IIPP; PIIP; PIPI; IPPI; IPIP. Em qualquer um dos seis casos, existem 4, depois 3 opções de algarismos pares, e 5, depois 4 opções de algarismos ímpares. Portanto existem $6 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4) = 1440$ números.

6) (PIC OBMEP) Palíndromos são números inteiros positivos que são lidos da mesma forma, tanto da esquerda para direita como da direita para a esquerda. Por exemplo: 8143418, 34211243, 787 e 444 são palíndromos. Qual a probabilidade de obter um número palíndromo de quatro algarismos, sorteando-se de forma equiprovável um número dentre aqueles que tenham quatro algarismos?

Resolução:

A quantidade de números de quatro algarismos é igual a 9.000. De fato, isso pode ser calculado pelo princípio multiplicativo: há 9 possibilidades para o algarismo das unidades de milhar e 10 para cada um dos outros, totalizando $9 \times 10^3 = 9.000$ possibilidades. Como a escolha do número de quatro algarismos é equiprovável, resta apenas calcular a quantidade deles que são palíndromos.

Para determinar um palíndromo de quatro algarismos, basta escolhermos os seus dois primeiros algarismos (pois estes determinam os outros dois). Como há 9 possibilidades para os algarismos das unidades de milhar e 10 para o algarismo das centenas, temos pelo princípio multiplicativo $9 \times 10 = 90$ números palíndromos de quatro algarismos. Logo a probabilidade de um dos números sorteados ser palíndromo é: $90/9000 = 1/100 = 1\%$.

7) (PIC OBMEP) Gustavo escreve todos os números $n=abc$, formado por três algarismos não nulos a , b e c , distintos e que possuem a mesma paridade. Qual a probabilidade de que, ao escolhermos um desses números, ele seja par?

Resolução:

Os três algarismos escolhidos fazem parte dos conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ou $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Com os elementos do conjunto A temos 5 possibilidades para o primeiro algarismo, 4 para o segundo e 3 para o terceiro, totalizando $5 \times 4 \times 3 = 60$ números com 3 algarismos distintos.

Já com os elementos do conjunto B temos 4 possibilidades para o primeiro algarismo, 3 para o segundo e 2 para o terceiro, totalizando $4 \times 3 \times 2 = 24$ números com três algarismos distintos. Assim, é possível formar $60 + 24 = 84$ números. De todas as possibilidades calculadas, apenas as geradas pelo conjunto B são números pares.

Portanto, a probabilidade pedida é $24/84 = 2/7$.

8) (PIC OBMEP) Pedro e João combinaram de lançar uma moeda 4 vezes e observar a face superior que saiu. Pedro apostou que, nesses 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas, João aceitou a aposta. Quem tem maior probabilidade de ganhar a aposta?

Resolução:

Vamos considerar todas as sequências possíveis de resultados. Como em cada lançamento sai cara (C) ou coroa (K), há 2 possibilidades; logo, o número total de possibilidades é igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Todas essas sequências têm a mesma probabilidade de ocorrência, já que o resultado de um lançamento não afeta os demais e há a mesma chance de sair cara ou coroa:

CCCC, CCKK, CCKC, CKCC, KCCC, KKKC, KKCK, KCKK, CKKK, CCKK, CKCK,
CKKC, KCKC, KCCK, KKCC, KKKK.

Vamos agora verificar quais dessas sequências levam à vitória de Pedro.

- Se sair somente coroas (KKKK);
- Se sair uma cara somente (CKKK, KCKK, KKCK, KKKC);
- Com duas caras saindo, Pedro vence nos casos (KCKC), (CKCK) e (CKKC).
- Quando saem três ou mais caras, Pedro perde. Logo, o número de sequências favoráveis a Pedro é igual a 8, e sua probabilidade de vitória é igual a $8/16 = 1/2$. Portanto, Pedro e João têm a mesma chance de vitória.

9.2. RELATÓRIO 9º ENCONTRO

No dia 19 de outubro de 2019, nos encontramos nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para realizarmos o nono encontro do PROMAT. Antes de iniciarmos as atividades, organizamos a sala de aula para a chegada dos alunos, organizamos as carteiras de modo que fossem criados grupos.

Organizamos a sala com 6 grupos e dividimos entre eles problemas, que envolviam arranjo e combinação. Três grupos receberam os problemas sobre arranjo e os outros três sobre combinação, conforme os grupos os concluía, entregávamos os outros. Os alunos se mantiveram resolvendo estes problemas, enquanto os auxiliávamos até umas nove e meia da manhã, então pedimos que os alunos se voluntariassem para resolver os exercícios no quadro e explicar seu raciocínio.

Enquanto alguns alunos realizavam seus cálculos no quadro, explicávamos alguns exercícios para outros alunos. Quando todos os exercícios estavam resolvidos no quadro, liberamos os alunos para o intervalo.

Voltando do intervalo os alunos explicaram seus raciocínios para a resolução das atividades e então formalizamos o conteúdo realçando algumas diferenças importantes entre

arranjo e combinação para que os alunos possam preencher a tabela de comparação do material do aluno.

Hávamos planejado resolver alguns exercícios, mas como as resoluções levaram um tempo maior que o previsto, nos encaminhamos para a atividade do software R de probabilidade. Iniciamos esta atividade lendo o problema com os alunos e então os questionamos sobre qual a soma mais provável: cada aluno votou nos valores de 2 a 12, tivemos diversos resultados votados e o que teve mais votos foi a soma 8.

Apresentamos aos alunos o software R, e então explicamos como realizaríamos a simulação dos jogos dos dados, e então realizamos várias simulações nas quais os alunos puderam observar qual a soma mais provável, a saber: soma 7.

Explicamos como poderíamos determinar isto, sem a utilização do software, seguindo a definição do cálculo de probabilidade. Inicialmente apresentamos aos alunos o espaço amostral, ou seja, todas os pares ordenados possíveis, no total 36. Então, junto com os alunos, observando os pares que resultam em determinada soma, então fomos determinando as quantidades de pares para cada resultado. Determinando desta forma, pudemos perceber que para a soma 7, temos 6 casos em 36, logo a probabilidade é $\frac{6}{36}$ e é a mais provável, pois as demais somas possuem menos pares.

Como durante a aula tivemos alguns atrasos, formalizamos a parte do cálculo de probabilidade, explanando aos alunos, a fórmula que sempre relaciona os casos que queremos com o total de casos no espaço amostral.

Finalizamos os conteúdos a serem apresentados e pedimos que os alunos realizassem a aula após a formalização pedindo que os alunos realizassem os exercícios da lista, menos o exercício 6, pois ele era um desafio para eles, então poderiam resolver em casa e trazer na próxima aula.

Os alunos permaneceram resolvendo os exercícios até o horário final da aula e então encerrando, lembrando-os que nossa próxima aula seria a última e teríamos a confraternização.

10. PLANO DE AULA 10º ENCONTRO – 26/10/2019

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos do cálculo de probabilidades, de modo que seja capaz de identifica-los, entender suas definições bem como realizar operações com os mesmos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com probabilidade, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar situações que envolvam o conteúdo;
- Compreender definições do cálculo de probabilidades;
- Resolver problemas e exercícios que envolvam o conteúdo;

Conteúdo:

Probabilidade.

Recursos Didáticos:

Material impresso, quadro negro, sacos pretos, bolas de isopor e giz.

Encaminhamento metodológico:

1. Início da aula e problema gerador

Iniciaremos a aula com um problema gerador, para depois formalizarmos o conteúdo e seguir com problemas que envolvam as definições.

2. Problema Gerador:

Problema: (PROFMAT - IMPA) Duas bolas são retiradas seguidamente e sem reposição de uma urna com 3 bolas brancas e 5 pretas, todas idênticas, a menos da cor. Qual é a chance de que a primeira seja branca e a segunda preta?



Figura 40: Caixa de bolinhas.
Fonte: PROFMAT - IMPA

Solução:

O espaço amostral adequado é o que considera que há oito bolas b_1, b_2, \dots, b_8 na urna e considera todos os possíveis pares (b_i, b_j) , sendo $i \neq j \geq 8$ de bolas distintas retiradas.

Como todas as bolas são idênticas, todos os pares possíveis têm a mesma chance de ocorrer (um modelo equiprovável!).

Número de casos possíveis:

A primeira bola pode ser qualquer uma das 8.

A segunda pode ser qualquer uma das outras 7.

O número de casos possíveis é $8 \times 7 = 56$.

Número de casos favoráveis:

A primeira bola pode ser qualquer uma das 3 bolas brancas. A segunda pode ser qualquer uma das 5 bolas pretas.

O número de casos favoráveis é $3 \times 5 = 15$.

A probabilidade é $15/56 = 0,268$.

3. Socialização

Após deixarmos um tempo para a resolução do problema, realizaremos a socialização da solução abordando detalhes da solução.

4. Formalização do conteúdo

A probabilidade de ocorrência de algum evento está entre zero e um,

$$0 \leq p(A) \leq 1.$$

$$P(A) = \frac{N^\circ \text{ de elementos o qual ocorrem o evento } A}{N^\circ \text{ de elementos do espaço amostrar}}$$

Sendo que $p(A) = 0$ quando o evento é impossível;

Ainda $p(A) = 1$ quando o evento é certo;

Temos ainda A' complementar de um evento A quando $A' \cup A = S$, neste caso

$$p(A) + p(A') = 1.$$

Exemplo: Seja A o evento em que a soma é um número par, temos que a possibilidade de ocorrência deste evento é de 50%. Então A' é o evento no qual a soma é um número ímpar na qual pode ser obtido utilizando que

$$p(A) + p(A') = 1$$

$$\frac{1}{2} + p(A') = 1 \Rightarrow P(A') = \frac{1}{2} = 50\%.$$

5. Probabilidade da união

Utilizando o mesmo problema exploraremos a probabilidade da união, para isto questionaremos os alunos sobre a probabilidade de obter soma par ou soma múltipla de três. Em seguida será formalizado a probabilidade da união

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B).$$

ATIVIDADE: A atividade a seguir é uma aplicação, com material manipulativo, de uma questão da segunda fase do nível 3 da 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

(OBMEP 2010) André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre eles. Para isso, colocaram três bolas brancas e uma preta em uma caixa e combinaram que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tiraria uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirasse a bola preta ganharia o livro.

- a) Qual a probabilidade de André ganhar o livro?
- b) Qual a probabilidade de Dalva ganhar o livro?

Iniciaremos a atividade selecionando quatro alunos e listando em ordem alfabética seus nomes no quadro.

Entregaremos aos alunos a atividade e em seguida, diremos aos estudantes que será feito um sorteio em que a turma deverá julgar se as regras são justas, ou seja, permitiam probabilidades iguais de vitória para cada concorrente.

Mostraremos as quatro bolinhas idênticas, indicando que uma delas está marcada com um “x”, representando a bolinha que dará o prêmio para quem a retirar. Explicaremos aos estudantes que cada aluno, dos quatro alunos escolhidos para o sorteio, irá retirar uma bolinha do saco, sendo que as retiradas ocorrem uma por vez e na ordem que os nomes foram listados. Após a realização do sorteio, que pode ser repetido algumas vezes, questionaremos a turma se o mesmo é justo.

Caso haja muitas dificuldades apresentadas pelos estudantes, sugeriremos a utilização de um problema similar mais simples, o qual seria: propor uma situação de sorteio similar a anterior, com apenas duas bolinhas em um saco e com dois jogadores, retirando uma bolinha de cada vez. Assim como no momento anterior, na discussão e resolução desta atividade, será

elaborada no quadro, com a participação dos alunos, uma árvore de possibilidades como a apresentada na Figura 1:

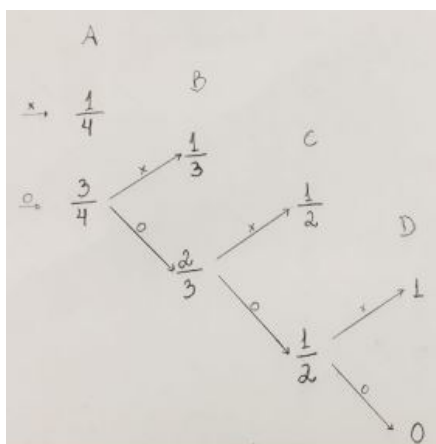


Figura 41: Árvore de probabilidade.

Fonte: <http://www.dmat-unioeste.mat.br/files/estagios/promat%20-%20Ana%20Maria,%20Ana%20C.,%20Daniele%20e%20Viviane.pdf>

Concluiremos que:

- Para André ganhar o livro ele deve retirar a bola preta. Como a caixa contém quatro bolas das quais apenas uma é preta, a probabilidade de ele retirar bola preta é $1/4$.
- Para Dalva ganhar o livro, André, Bianca e Carlos devem retirar bolas brancas. Como inicialmente a caixa contém 3 bolas brancas, a probabilidade de André retirar uma bola branca é $3/4$. Supondo que André tire uma bola branca, sobrarão na caixa 2 bolas brancas e 1 preta; assim, a probabilidade de Bianca tirar uma bola branca é $2/3$.

Do mesmo modo, se André e Bianca tirarem bolas brancas, a probabilidade de Carlos tirar uma bola branca será $1/2$. Assim, a probabilidade de André, Carlos e Bianca tirarem bolas brancas é $3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = 1/4$, que é a probabilidade de Dalva ganhar o livro.

Mostraremos que raciocínio semelhante mostra que a probabilidade de qualquer um dos amigos ganhar o livro é $1/4$, ou seja, o sorteio é justo e a ordem em que eles retiram as bolas não tem importância.

6. Probabilidade condicional

A probabilidade de um evento A ocorrer, dado que um outro evento B ocorreu, é chamada probabilidade condicional do evento A dado B . Com dois eventos, A e B , a probabilidade condicional de A dado B é denotada por $P(A|B)$, e calculada como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Referências:

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed. responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações**. 2º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar: combinatória, probabilidade**. Vol. 5. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. Vol. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

10.1. MATERIAL DO ALUNO 10º ENCONTRO

1) (OBMEP) Construimos todos os números inteiros positivos de dois algarismos distintos que podem ser escritos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Qual é a probabilidade de escolher ao acaso, dentre esses números, um número par?

Resolução:

Temos 7 possibilidades de escolha do primeiro algarismo dos números e 6 escolhas do segundo algarismo (os números não podem ter algarismos repetidos). Assim, temos $7 \times 6 = 42$ casos possíveis. Para o número ser par deverá terminar em 2, 4 ou 6. Assim, para o número ser par há 3 possibilidades para o algarismo das unidades e 6 possibilidades para o algarismo das dezenas (não podem ter algarismos repetidos). Assim, temos $3 \times 6 = 18$ casos favoráveis.

Logo, a probabilidade de o número sorteado ser par é igual a

$$\frac{18}{42} = \frac{3}{7}.$$

2) (ENEM 2015) Em uma central de atendimento, com pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

- A) 1/100
- B) 19/100
- C) 20/100
- D) 21/100
- E) 80/100

Resolução:

O espaço amostral que são as senhas que serão sorteadas, possui 100 elementos. O número de elementos do conjunto formado pelas senhas de 1 a 20, é 20. Utilizando a definição de probabilidade, temos que existem

$$P(x \in [1,20]) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 20\%.$$

- 3) (OBMEP) Uma microempresa é composta por 7 pessoas: 4 mulheres e 3 homens. Duas pessoas serão enviadas para uma convenção. Qual é a probabilidade de serem selecionadas 2 mulheres?

Resolução:

O espaço amostral (ou número de casos possíveis) está composto pelo número total de formas de escolher as duas pessoas que serão enviadas para a convenção. Isto pode ser feito de

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21 \text{ formas.}$$

O número de casos favoráveis está composto pelo número de formas de escolher 2 mulheres dentre as 4 mulheres, o que pode ser feito de

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ formas.}$$

Logo, a probabilidade procurada é

$$\frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

- 4) (ENEM 2015) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%. Qual a probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo?

Resolução:

Para que a aula ocorra no domingo é necessário que chova sábado e não chova domingo, assim precisamos da interseção entre esses dois eventos.

$$P(\text{chuva sab} \cap \text{não chuva dom}) = \frac{30}{100} \frac{25}{100} = 22,5\% .$$

5) (ENEM 2015- adaptada) Um bairro residencial tem cinco mil moradores, dos quais mil são classificados como vegetarianos. Entre os vegetarianos, 40% são esportistas, enquanto, entre os não vegetarianos, essa porcentagem cai para 20%. Uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, é esportista. Qual é a probabilidade de ela ser vegetariana:

Resolução:

Como 4000 não são vegetarianos e 1000 vegetarianos, segue que 40% de 1000= 400 são esportistas dos vegetarianos e 20% dos não vegetarianos são esportistas, ou seja, 800 pessoas. Portanto, há 400+800=1200 esportistas nesse bairro. Logo, a probabilidade de ser vegetariana é $\frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$.

6) (OBMEP) Em uma caixa há 4 bolas verdes, 4 azuis, 4 vermelhas e 4 brancas. Se tirarmos, sem reposição, 4 bolas desta caixa, uma a uma, qual a probabilidade de tirarmos, nesta ordem, 1 bola verde, 1 azul, 1 vermelha e 1 branca?

Resolução:

Como são 16 bolas, podemos retirar 4 bolas de $16 \times 15 \times 14 \times 13$ formas (casos possíveis). Observe que temos 4 formas de retirar primeiro uma bola verde. Como ainda restam 4 bolas azuis, temos 4 formas de retirar em segundo lugar uma bola azul. Da mesma forma, temos 4 formas de retirar uma bola vermelha e 4 formas de retirar uma bola branca. Assim, a probabilidade de tirar, nessa ordem, bolas nas cores verde, azul, vermelha e branca é

$$\frac{4 \times 4 \times 4 \times 4}{16 \times 15 \times 14 \times 13} = \frac{16}{15 \times 14 \times 13} = \frac{8}{15 \times 7 \times 13} = \frac{8}{1365}.$$

10.2. RELATÓRIO 10º ENCONTRO

No dia 26 de setembro de 2019, nos encontramos nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para realizar o décimo e último encontro do PROMAT. Neste encontro haviam 16 estudantes presentes.

Antes de iniciarmos a aula, entregamos os certificados e os estudantes assinaram a lista de retirada. Após isso questionamos se a turma preferia se juntar em grupo, como estávamos acostumados, ou montar uma meia lua, a maioria optou por meia lua.

Então iniciamos a aula retomando alguns conceitos trabalhados na aula anterior, lembrando que a probabilidade de um evento está entre zero e um e introduzindo novos conceitos: evento impossível, evento certo e probabilidade de A mais probabilidade de A'(complementar).

Com uma urna e bolinhas de isopor brancas e pretas realizamos o primeiro problema do material do aluno, realizamos três vezes o sorteio, cada vez um aluno diferente retirava uma bolinha, os resultados eram anotados no quadro.

Montamos com a participação dos alunos o diagrama de árvore, e realizamos alguns exemplos: a probabilidade de serem duas bolinhas brancas, probabilidade de serem duas pretas, probabilidade da primeira ser preta, probabilidade de ser pelo menos uma branca, probabilidade de serem diferentes. A partir disso, introduzimos o conceito de Probabilidade da União, fazendo questionamentos e respondendo dúvidas que surgiam durante a explanação. Realizamos alguns exemplos de probabilidade da união por meio do diagrama de árvore construída para o problema 1.

Após isso pedimos que um dos alunos fizesse a leitura do problema 2 do material para darmos continuidade à aula. Então pedimos quatro voluntários para simularmos o sorteio do problema. Primeiro questionamos quem possuía maiores chances de ganhar o sorteio, surgiram muitas opiniões e justificativas. Então realizamos quatro sorteios, a cada sorteio, fazíamos alguns questionamentos e as opiniões e justificativas iam se alterando.

Então montamos o diagrama árvore no quadro com a participação dos alunos e calculamos a probabilidade de cada um dos participantes do sorteio ganharem, realizamos alguns comentários e observações importantes para a resolução de exercícios e respondemos a algumas dúvidas que surgiram, pedimos que resolvessem os exercícios das listas, enquanto circulávamos entre as carteiras auxiliando-os com as resoluções.

Por fim, realizamos a resolução do exercício 6 do material do aluno no quadro, montando o diagrama de árvore com a colaboração dos alunos, então com esse exercício explicamos rapidamente o conceito de probabilidade condicional.

Terminamos a aula mais cedo, às 10:30, para realizamos a confraternização, nos despedimos e desejamos sucesso nos concursos, vestibulares e na vida, entregamos os bombons e tiramos algumas fotos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizando este período do estágio pudemos refletir sobre todo o desenvolvimento realizado abrangendo as aulas e dinâmicas propostas. A experiência oportunizada neste estágio foi muito produtiva, no intuito de propiciar colocarmos em prática os conhecimentos adquiridos até o momento no curso de graduação.

O Promat nos oportunizou realizar planejamentos explorando diversas abordagens para os conteúdos. Sem prender nossas aulas a somente uma metodologia, nos permitiu explorar tanto a metodologia tradicional quanto outras, como, por exemplo, a Resolução de Problemas, e com isso incentivar os estudantes a ter uma certa independência na apropriação do conhecimento.

Desde a elaboração dos planos de aula e materiais do aluno, do planejamento até a reflexão realizada após as aulas, e na elaboração dos relatórios, foram de grande contribuição para nossa formação. Procuramos constantemente realizar as aulas de modo interativo, buscamos conquistar a confiança dos alunos, fornecendo liberdade para realizarem perguntas, apresentarem dúvidas e resoluções.

É importante destacarmos, que durante as preparações sempre elencamos a necessidade de uma aula bem planejada, analisando possíveis questionamentos que poderiam surgir e ainda durante as aulas, desenvolvemos nossa prática, estando preparadas para as necessidades que poderiam vir a surgir. Apesar de termos um planejamento para todas as aulas, nem sempre era possível segui-lo cem por cento, pois durante as aulas, observando dificuldades dos alunos, algumas mudanças se faziam necessárias, para auxiliá-los com seu aprendizado.

Buscamos explorar conhecimentos prévios, realizar confecções entre conteúdos e situações do dia a dia, realizamos as atividades em grupo para estimular a interação entre os alunos e promover debates acerca das atividades e resoluções.

Enfim, este foi um período de grande contribuição para nossa formação, auxiliando a reconhecer e moldar nosso perfil profissional e nos reconhecer como educadores matemáticos.

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno. SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática: Aula por aula**. Ensino médio, Volume único. Ed 2015: Minas Gerais: FDT, 2015.

CALISTI, Amarildo Sidney. **O ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NA ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**: uma abordagem sem o uso de fórmulas. 2016. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospede/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_unespar-apucarana_amarildosidneycalisti.pdf>. Acesso em: 16 set. 2019.

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed. responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 1. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed. responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

EDITORA MODERNA. (Org.) LEONARDO, Fabio Martins de (ed. responsável). **Conexões com a matemática**. Vol. 3. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Estatística Descritiva. <<https://studiumfocus.blogspot.com/2017/05/estatistica-descritiva.html>>. Acesso em: 15 jun. 2019.

Geometria Analítica – As principais fórmulas com exercício resolvido. Disponível em: <<https://blogdoenem.com.br/geometria-analitica-matematica-enem/>>. Acesso em: 28 ago. 2019.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar**: combinatória, probabilidade. Vol. 5. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. 1º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. 2º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. 3º ano. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Lopes dos Santos de. **Análise Combinatória: Raciocínio recursivo e processos de enumeração**. 2017. Disponível em: <<http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/16092015Carlos-Alberto-Lopes-dos-Santos-de-Oliveira.pdf>>. Acesso em: 20 set. 2019.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 1º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 3º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática**: Ensino Médio. Vol. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

VIDIGAL, Cássio. **ANÁLISE COMBINATÓRIA, BINÔMIO DE NEWTON E PROBABILIDADES**. 2016. Disponível em: <<http://vidigal.ouropreto.ifmg.edu.br/wp-content/uploads/sites/12/2016/06/apostila-matematica-3-01-AN%C3%81LISE-COMBINAT%C3%93RIA-cassio.pdf>>. Acesso em: 16 set. 2019.