UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

GUILHERME VIEIRA BOCHI
JOÃO ALFREDO SIMON SANTOS
MATHEUS ALEXANDRE ALVES ANZOLIN

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

CASCAVEL
2019

GUILHERME VIEIRA BOCHI
JOÃO ALFREDO SIMON SANTOS
MATHEUS ALEXANDRE ALVES ANZOLIN

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado II.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Tavares Juliani

CASCAVEL
2019

AGRADECIMENTOS

Agradecemos em primeiro lugar a Deus, em segundo ao nosso orientador que com muito esmero nos corrigiu e em terceiro, ao apoio mútuo que houve entre nós estagiários.

.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este Relatório de Estágio Supervisionado aborda as oportunidades e desafios enfrentados no período estagiado no projeto Promat do ano de 2019, no qual exercemos a prática docente, preparando e executando o referido projeto.

Por meio de relatos pessoais, análises e descrições das aulas, detalhamos como se deu o processo de ensino-aprendizagem pelas partes envolvidas no projeto, os alunos e nós, futuros professores. Apresentamos, todos os tipos de materiais usados durante os encontros, ressaltando exercícios, materiais manipuláveis e outros tipos de métodos que tiveram importância no decorrer do projeto.

Com a análise dos relatórios de aula é possível entender por quais situações, nós futuros professores passamos em sala de aula, além de perceber limitações e fatos que contribuíram para a nossa formação docente.

Durante dez sábados entre os meses de agosto e outubro, conduzimos esse projeto, com duração de dez aulas, totalizando 40 horas de prática em sala de aula. Ao final do mesmo, elaboramos esta pasta descrevendo e relatando tudo o que foi feito neste período.

2. PLANEJAMENTO

2.1. PROMAT

O Promat, Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática, tem como objetivo oferecer um curso preparatório na área matemática, visando a permanência dos alunos nos cursos de graduação nas diversas universidades do país.

O projeto é desenvolvido pelo colegiado do curso de licenciatura em matemática no modelo de prática docente, e visa atender alunos da rede pública estadual de ensino que buscam acesso aos cursos superiores. Podem participar preferencialmente alunos matriculados na 3ª série do ensino médio sendo possível atender alunos da 2ª e 1ª série ou egressos, caso haja vagas remanescentes.

As aulas são ministradas pelos alunos estagiários do curso de licenciatura em matemática, sob a supervisão e orientação dos professores do colegiado de matemática, e serve, juntamente com esse relatório, como composição de nota final da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino.

O foco de estudos que o Promat aborda são os principais para os alunos realizarem provas tais como o Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM, e demais vestibulares.

No primeiro semestre, alunos do terceiro ano do curso de matemática, matriculados na primeira parte da disciplina, que ministraram as aulas para os alunos. Já no segundo semestre, nós do quarto ano, cursando já a segunda parte da disciplina, ficamos encarregados e responsáveis pelas turmas.

2.2. Opção Teórica E Metodológica Para O Desenvolvimento Das Aulas

Nosso grupo optou por não adotar uma metodologia fixa para trabalhar em sala. Utilizamos de diversos recursos, referenciais teóricos e outras fontes para que nossos alunos pudessem ter a melhor aprendizagem possível.

O retroprojetor foi um grande aliado. Obviamente, é um aparelho eletrônico e, constantemente, está propenso a falhas. Porém, não tivemos problemas e nos poupou bastante tempo, que pudemos aproveitar ao máximo.

Outra tecnologia relevante que fizemos a utilização foi o software GeoGebra. Grande aliado principalmente na construção de gráficos, o programa de computador foi de grande valia, principalmente pela possibilidade de utilizarmos seus controles deslizantes, para que a imaginação dos alunos ficasse ainda mais fértil.

A investigação matemática também esteve presente em nossas aulas. Proporcionando aos alunos construírem o conhecimento enquanto anotavam dados e observavam os resultados, eles puderam ter uma melhor percepção dos conteúdos, principalmente nas partes em que as aulas exigiam um pouco de saber geométrico.

Outra tendência utilizada que nos apropriamos foi a resolução de problemas. Trabalhando, em maioria, com problemas de resolução fechada, conseguimos conduzir os alunos à resolverem os exercícios de modo que pudéssemos prosseguir com as explicações baseando-se em suas respostas.

Enfim, com a diversidade de metodologias que proporcionamos aos alunos, acreditamos que os mesmos puderam desfrutar das aulas de maneira boa e que também notassem que há diversas formas de se aprender matemática.

2.2.1. Cronograma

DIA	CONTEÚDO	DIA	CONTEÚDO
10/08	Tratamento da Informação	21/09	Geometria Analítica
17/08	Trigonometria	28/09	Geometria Analítica
24/08	Trigonometria	05/10	Análise Combinatória
31/08	Trigonometria	19/10	Análise Combinatória
14/09	Geometria Analítica	26/10	Análise Combinatória

Tabela 1: Cronograma Promat.

3. MÓDULO 1 – TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

3.1. Plano de Aula Dia 10/08/2019 – Interpretação de Gráficos, Tabelas e Esquemas.

1º ENCONTRO

3.1.1. Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

3.1.2. Tempo de execução:

3.1.3. Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de tratamento da informação.

3.1.4. Objetivos Específicos: Ao se trabalhar com equações, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Trabalhar com moda, média e mediana.
- Analisar gráficos, histogramas e gráficos de setores;
- Resolver exercícios que abordem as questões de tratamento da informação.

3.1.5. Conteúdo: Tratamento da Informação**.**

3.1.6. Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4**.**

3.1.7. Encaminhamento metodológico:

3.1.7.1. ETAPA 1

Primeiramente faremos uma dinâmica com alunos, começando com uma apresentação nossa e depois pedindo os nomes dos alunos e quais cursos estão pensando em ingressar a partir do vestibular. Posteriormente explicaremos o que é o PROMAT, Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas, e que teremos 10 encontros nos sábados, com o intuito de ajudá-los a entender os conceitos matemáticos que poderão vir a estar em questões de vestibulares.

3.1.7.2. ETAPA 2

População: Entende-se por *população* ou *universo estatístico* o conjunto cujos elementos apresentam, pelo menos, uma característica comum, e que será analisado com o objetivo de tirar algum tipo de conclusão.

Amostra: Quando se quer tirar algum tipo de conclusão sobre determinada população formada por muitos elementos. O que se faz é trabalhar com um subconjunto da população, que chamamos de *amostra,* e as conclusões tiradas são consideradas para toda a população.

Distribuição de frequência: Depois de feita uma coleta de dados, eles ainda não estão pronto para uma análise, pelo fato de não estarem numericamente organizados, devido a isso, são chamados de *dados brutos*.
Se organizarmos os dados brutos, em ordem crescente ou decrescente, a lista recebe o nome de *rol*.
Para se ter uma tabela mais compacta, utiliza-se as classes e a frequência com que cada uma delas ocorre. Por exemplo:

Salários (R$)	Número de Empregados
300 ⊢ 500	30
500 ⊢ 700	40
700 ⊢ 900	50
900 ⊢ 1.100	40
1.100 ⊢ 1.300	40

Tabela 2: Distribuição de Frequências salários por trabalhadores.

Moda: O que é a "Moda" na estatística? Será que é só o elemento que aparece mais vezes em distribuição?

A Moda de uma amostra se dá por: o elemento que ocorre com maior frequência em um conjunto, ou seja, é o elemento mais repetido ou mais comum. Será indicado por Mo.

Exemplos: 1) O conjunto 3, 3, 7, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 13, 14 tem uma única moda Mo = 8 que ocorre com frequência 4. É chamado de unimodal.
2) O conjunto 3, 7, 8, 10, 13, 14, 17, 20 não tem moda. É chamado de amodal.

3) O conjunto 2, 4, 4, 4, 6, 6, 9, 9, 9, 15 tem as modas Mo = 4 e Mo = 9, que ocorrem ambas com a mesma frequência 3. É chamado de bimodal.

Para analisar algumas variáveis quantitativas, a Moda pode ser bastante útil para identificar qual o tipo de ocorrência mais frequente. É especialmente útil quando a amplitude de valores possíveis é menor.

Média Aritmética: A média aritmética de um conjunto de *n* números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ será indicado por $\overline{x}$ e é definido como quociente da soma dos números por *n*. Sendo definida pela expressão:

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}=\sum_{i=1}^{n} x_n$$

Exemplos: A média dos números 2, 5, 8, 10 e 12 é 7,4.

$$\overline{x}=\frac{2+5+8+10+12}{5}=\frac{37}{5}=7{,}4$$

Mediana: A mediana de um conjunto de números, ordenados em ordem de grandeza, é definida como o valor central ou como a média aritmética dos dois valore centrais. Será indicado pro Md. Ela faz parte de uma estatística robusta, com o ponto de ruptura de 50%, ou seja, queremos encontrar valores que estão acima e abaixo desta porcentagem.

Exemplos: 1) O conjunto dos números 2, 5, 5, 7, 9, 12, 12, 12, 15 tem mediana Md = 9. Quando a mediana possui um número ímpar de elementos do conjunto, temos que o valor dele é uma aproximação de 50% dos dados fornecidos.

2) O conjunto dos números 4, 4, 7, 9 11, 13, 13, 14 tem mediana Md = 10. Pois,

$Md = \frac{9+11}{2} = 10$. Isso se dá pelo conjunto possuir um número par de elementos, o que torna de sua mediana correto.

Média Aritmética Ponderada: Nessa situação ocorre um caso particular da média aritmética, na qual deve ser considerado o peso de cada um dos valores. Que é dada por:

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + ... + x_n * p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Ao apresentar essas definições aos alunos, será utilizado o software do GeoGebra para que os alunos possam notar a diferença das medidas e qual delas se torna mais apropriada para utilização. Após isso, pediremos para que os alunos resolvam os exercícios de 1 a 4 do material do aluno.

Comparação da Média com Mediana: A média geralmente é a medida mais popular a vir ser utilizada quando se trabalha com valores do conjunto. Mas, ela possui sua desvantagem, pois pode ser afetada por valores individuais, ou seja, valores maiores ou menores no conjunto do que o restante. Logo a mediana é uma medida adotada para se localizar o ponto médio, para casos em que um pequeno número de valores discrepantes podem distorcer a média drasticamente.
Para mostrar este fato, utilizaremos o software GeoGebra para dar alguns exemplos aos alunos.

3.1.7.3. ETAPA 3

Histograma: É um gráfico de frequência que tem por objetivo ilustrar como uma determinada amostra ou população de dados está distribuída. Ele mede quantas vezes temos determinado valor dentro dessa nossa distribuição de dados. Vejamos o seguinte exemplo:

Classes	Frequências
1 - 15	8
16 - 30	7
31 - 45	6
46 - 60	2
61 - 74	6
75 - 89	1

Tabela 3: Tabela referência para histograma.

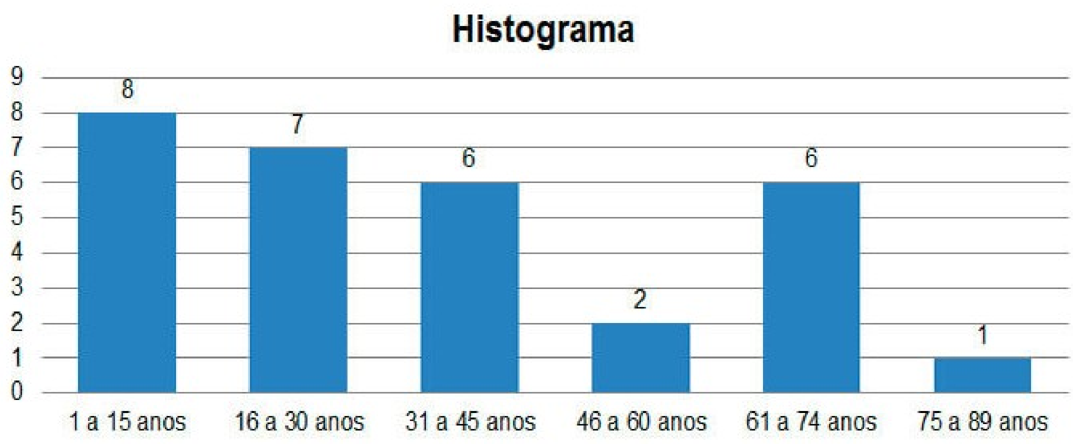


Figura 1: Histograma. Fonte: Os Autores.

Assim temos o gráfico do histograma, que é formado pelos retângulos justapostos do modo como foi feito. Como foram feitas apenas seis classes, temos seis retângulos no gráfico. Ainda em histogramas, podemos associar o gráfico de polígono de frequências, que é dado pelo seguinte exemplo:

1) Considere as idades de 50 funcionários de uma empresa, agrupados conforme a tabela a seguir

Classes	Intervalos das classes	f_i
1	18 ├── 25	6
2	25 ├── 32	10
3	32 ├── 39	13
4	39 ├── 46	8
5	46 ├── 53	6
6	53 ├── 60	5
7	60 ├── 66	2
Somas		**50**

Tabela 4: Tabela referência para histograma com gráfico polígono.

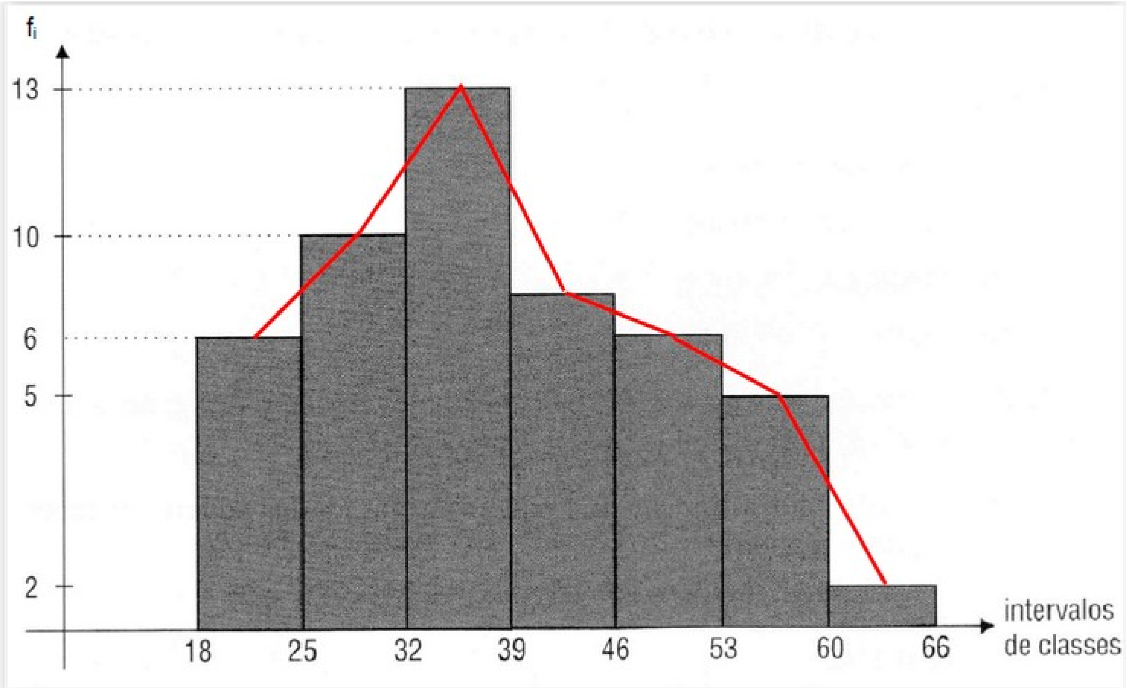


Figura 2: Histograma com gráfico polígono. Fonte: Os Autores.

O polígono de frequência, a partir do histograma, consiste em ligar os pontos médios de cada coluna.

3.1.7.4. ETAPA 4

Gráficos: Nos gráficos, poderemos ter uma ideia imediata da distribuição de valores analisados e uma noção mais completa das concentrações e dispersões dos referidos valores. É separado em cinco tipos, os quais são:

1. **Gráfico de linha:** Nesse tipo de gráfico, os dados são colocados num sistema de eixos coordenadas cartesianos ortogonais e os pontos são ligados, formando uma sequência de reta.

Mês	Número de filmes locados
Janeiro	300
Fevereiro	220
Março	100
Abril	150
Maio	250
Junho	110

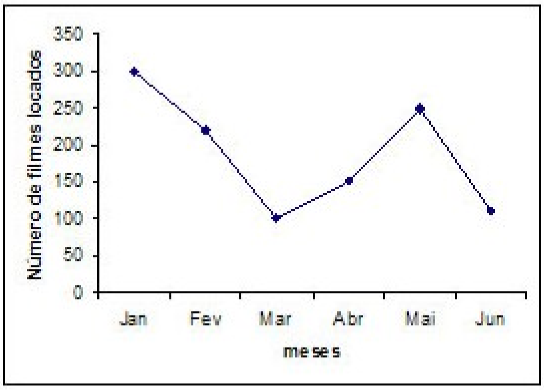


Figura 3: Gráfico de linha. Fonte: Os Autores.

Como pode-se notar, o gráfico do polígono de frequência é dado por um gráfico de linhas.

2. **Gráfico de colunas ou barras:** Nessa modalidade, os dados são dispostos verticalmente, em colunas, ou horizontalmente em barras. Dada pelo exemplo a seguir:

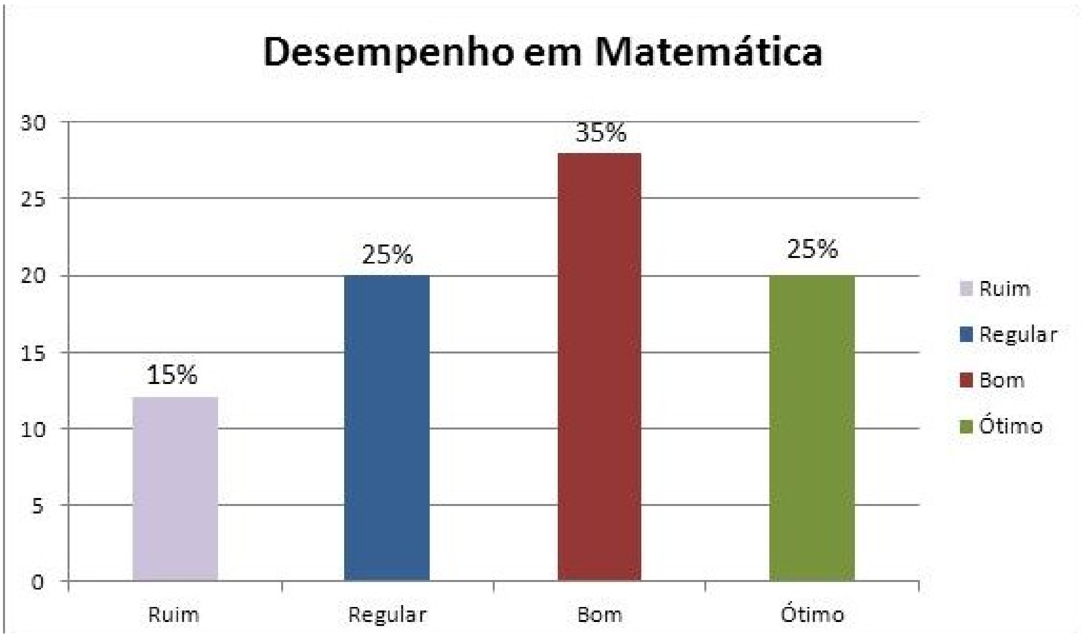


Figura 4: Gráfico de colunas. Fonte: Os Autores.

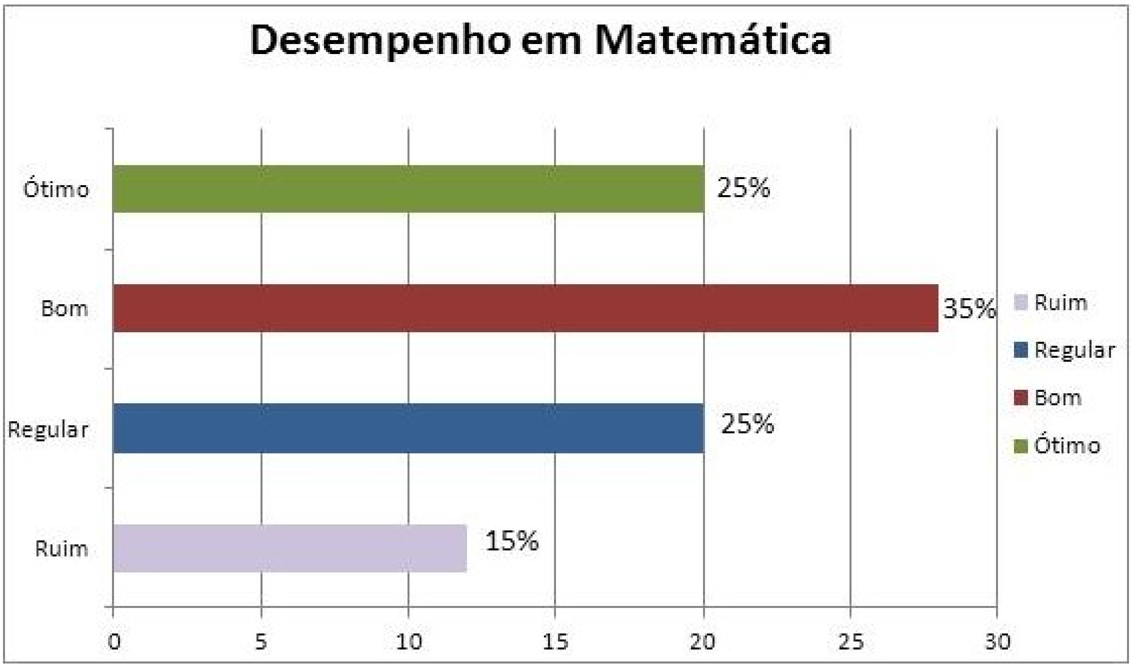


Figura 5: Gráfico de barras. Fonte: Os Autores.

O histograma também pode ser visto como um gráfico de barras, mas com elas justapostos a partir dos seus intervalos de classes.

3. **Gráficos em colunas ou barras agrupadas:** Utilizado para a comparação de grandezas representadas na horizontal ou vertical. Diferente da anterior, estes são agrupados.

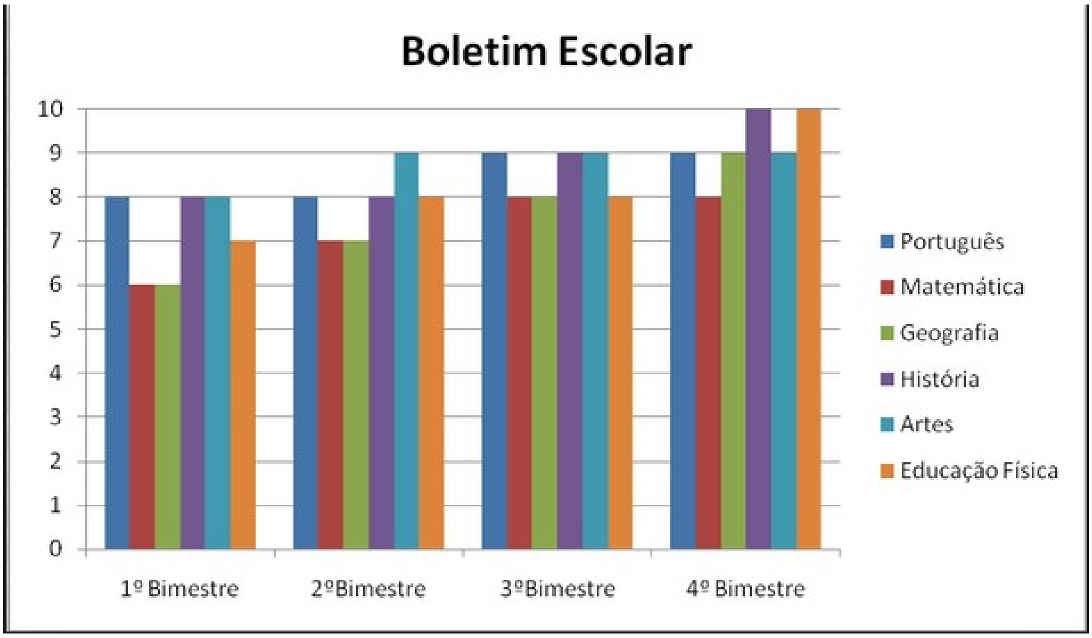


Figura 6: Gráfico de colunas agrupado. Fonte: Os Autores.

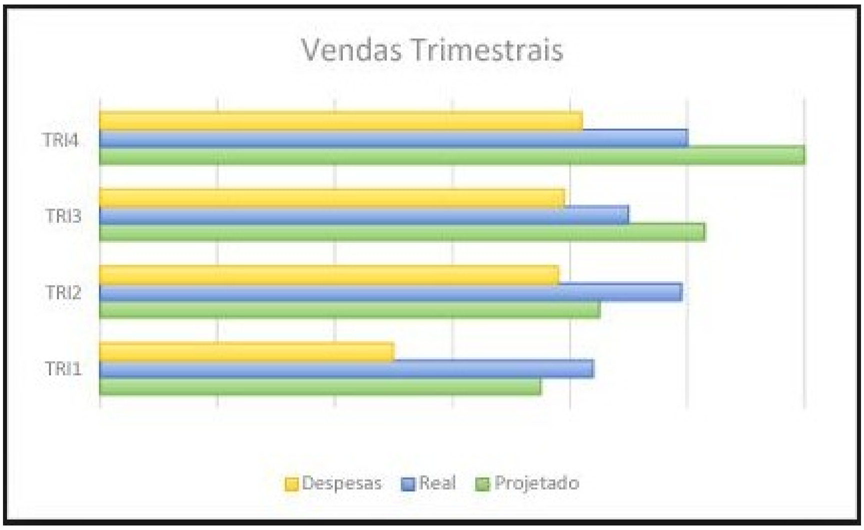


Figura 7: Gráfico de barras agrupado. Fonte: Os Autores.

4. **Gráfico pictórico ou pictograma:** Frequente em jornais e revistas, temos um conjunto de figuras que representam como as grandezas variam. São expressas por meio de maior ou menor número de símbolos, que são autoexplicativos.

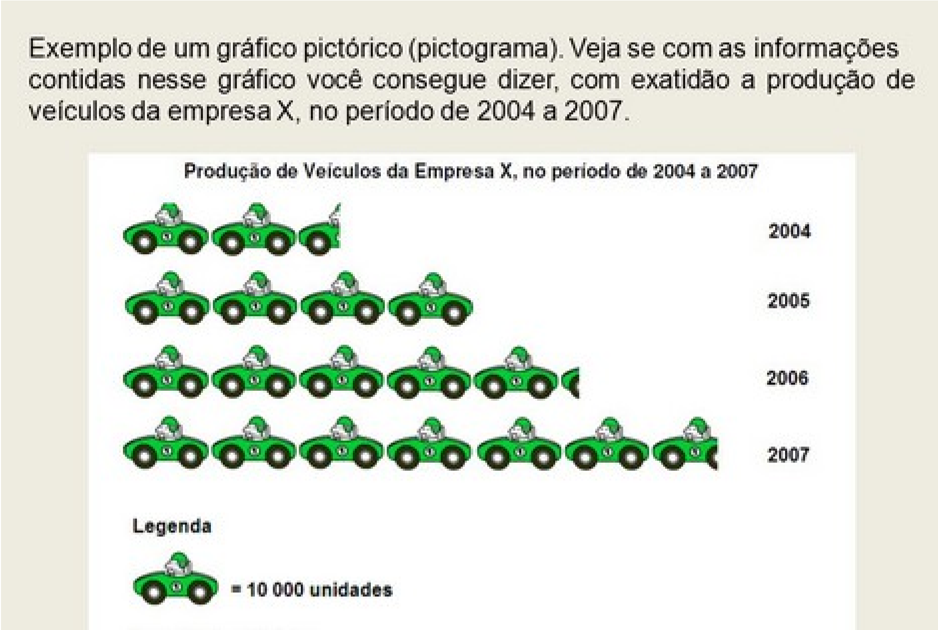


Figura 8: Pictograma. Fonte: Os Autores.

5. **Gráfico de Setores:** Os dados são representados em setores circulares, sendo suas áreas proporcionais aos valores que representam. Costumam ser usados em situações que envolvem comparação de percentual. A separação do círculo indica a frequência relativa de uma variável. Por exemplo, em uma entrevista com 250 pessoas obtivemos as seguintes respostas:

Basquete	40
Vôlei	60
Futebol	100
Futsal	30
Handebol	20

Tabela 5: Tabela referência para gráfico de setores.

No gráfico de setores teríamos,

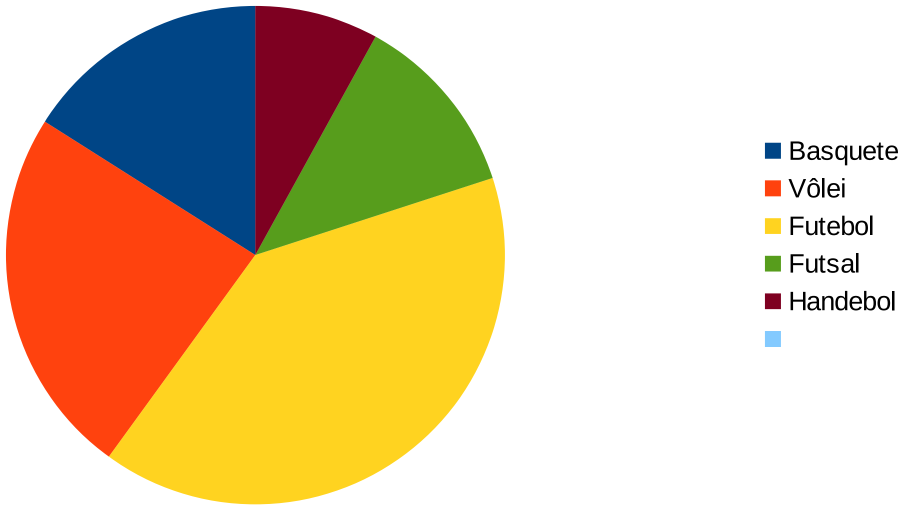


Figura 9: Gráfico de setores. Fonte: Os Autores.

3.1.7.5. ETAPA 5

Após a apresentação dos gráficos, será feito uma análise de gráficos com os alunos, utilizando o projetor para auxiliar na visualização dos gráficos e suas escalas.

3.1.8. Avaliação: A avaliação se dará pela participação e envolvimento dos alunos em aula.

4. ANEXO

4.1. MATERIAL DO ALUNO

1) Os salários de sete funcionários de uma empresa são: R$550,00 , R$980,00 , R$800,00 , R$700,00 , R$1850,00 , R$960,00 e R$670,00. Qual seria a medida mais adequada para se utilizar?

RESOLUÇÃO: Colocando em ordem o conjunto (550; 670; 700; 800; 960; 980; 1850), temos um conjunto de 7 termos. Como os valores não se repetem, a moda não nos convêm a ser utilizada e por ser de ordem ímpar, a mediana será aproximada. Logo a média será a melhor a medida a ser tomada. $\frac{6510}{7}=930$

2)A distribuição de salários de uma empresa é fornecido pela tabela a seguir:

Salários (R$)	Funcionários
500,00	10
1 000,00	5
1 500,00	6
2 000,00	15
5 000,00	8
10 000,00	2

Calcule a média salarial dessa empresa.

RESOLUÇÃO: Neste caso será utilizado a média aritmética ponderada.

$$\bar{x} = \frac{500*10 + 1000*5 + 1500*6 + 2000*15 + 5000*8 + 10000*2}{46} = 2360,56 \quad .$$

3) A tabela abaixo representa a distribuição de frequência dos salários de um grupo de 50 empregados de uma empresa, em certo mês. O salário médio desses empregados, nesse mês, foi de:

Número da classe	Salário do mês – R$	Número de empregados
1	1 000 → 2 000	20
2	2 000 → 3 000	18
3	3 000 → 4 000	9
4	4 000 → 5 000	3

a) R$ 2 637,00

b) R$ 2 520,00

c) R$ 2 500,00

d) R$ 2 420,00

e) R$ 2 400,00

RESOLUÇÃO: Primeiramente será feito a média de cada classe, para que se tenha um valor estimado para quanto ela ganha. Posteriormente será feita a média pondera com as médias das classes.

$$C1=\frac{1000+2000}{2}=1500;\acute{}\,C2=\frac{5000}{2}=2500;\ C3=\frac{7000}{2}=3500;\ C4=\frac{9000}{2}=4500$$

Logo, pela média ponderada das classes,

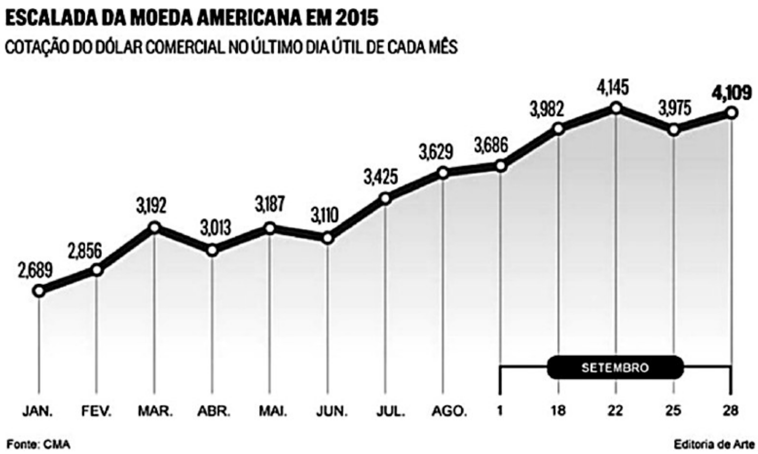
$$\frac{1500*20+2500*18+3500*9+4500*3}{50}=\frac{120000}{50}=+2400$$

4) Em um grupo de pessoas, as idades são : 10, 12, 15 e 17 anos. Caso uma pessoa de 16 anos junte-se ao grupo, o que acontece com a média das idades do grupo? E qual seria a moda e a mediana?

RESOLUÇÃO: O conjunto será dado por A= {10, 12, 15, 16, 17}. Sendo ele amodal, pois não possui nenhum elemento que se repete. Tendo mediada igual a 15, pois o número de elementos do conjunto é ímpar. E a média será

$$\bar{x}=\frac{10+12+15+16+17}{5}=\frac{70}{5}=14$$ **.**

5)



Com base exclusivamente nos dados apresentados no gráfico quanto à cotação do dólar comercial no último dia útil de cada mês de 2015, assinale a alternativa correta.

a) Em dezembro de 2014, a cotação do dólar comercial foi menor que 2,689.

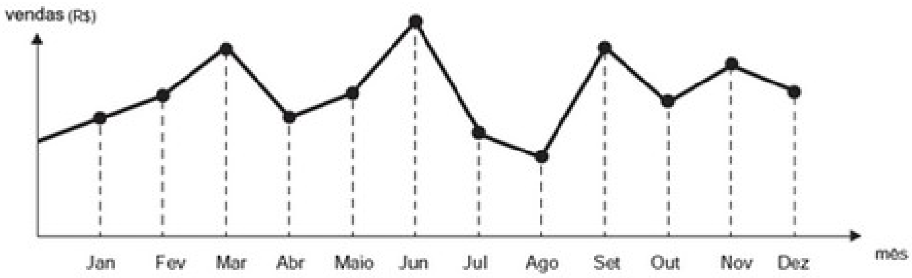
b) O maior valor para a cotação do dólar comercial foi verificado em 28 de setembro.

c) A função que representa o valor da cotação do dólar comercial em relação ao tempo é crescente, no intervalo apresentado no gráfico.

d) A diferença entre os valores da cotação do dólar comercial de maio e de março foi menor que um centavo de real.

e) Em 15 de agosto, o valor da moeda foi menor que 3,629.

6) (ENEM 2012) O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que representa a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.



De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram:

1. Março e Abril
2. Março e Agosto
3. Agosto e Setembro
4. Junho e Setembro
5. **Junho e Agosto**

7) (ENEM 2012) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.

O administrador do blog sorteará um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por

A) 0,09

B) 0,12

C) 0,14

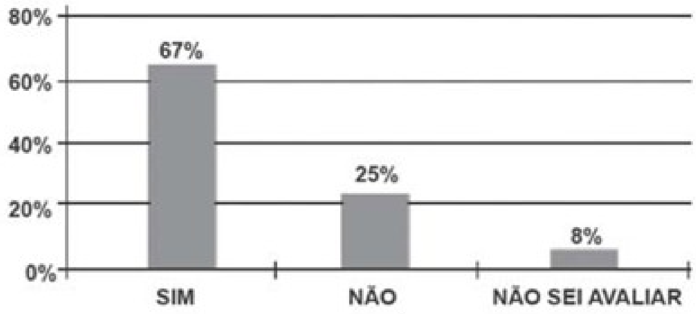
D) 0,15

E) 0,18

RESOLUÇÃO: Como queremos o número de pessoas que acham “Chato”, devemos utilizar uma regra de três simples para encontrar o número de pessoas que marcaram esta opção. Posteriormente o mesmo deverá ser feito com o número de pessoas que escolheram “Não opinaram”.

Com isso subtraímos a 500 pelo número de “Não opinaram” e depois dividimos o número de pessoas que escolheram “Chato” e dividimos pela subtração.

8) (ENEM 2011) Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três as alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.

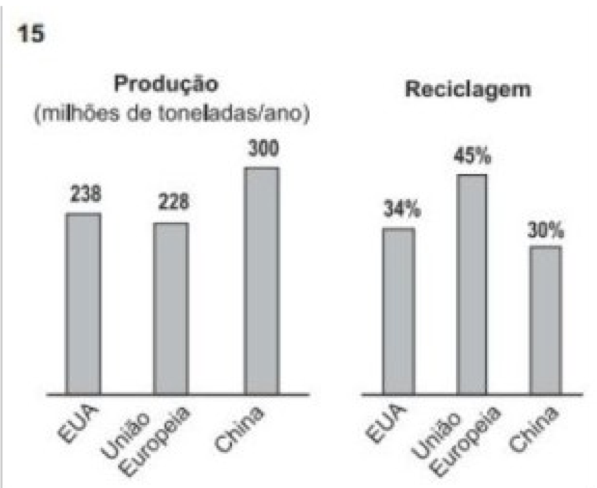


Época. Ed. 619, 29 mar. 2010 (adaptado).

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam "NÃO" à enquete?

A) Menos de 23.
B) Mais de 23 e menos de 25.
C) Mais de 50 e menos de 75.
D) Mais de 100 e menos de 190.
E) Mais de 200.

9) (BB – Cesgranrio). Os gráficos abaixo apresentam dados sobre a produção e a reciclagem de lixo em algumas regiões do planeta.



Baseando-se nos dados apresentados, qual é, em milhões de toneladas, a diferença entre as quantidades de lixo recicladas na China e nos EUA em um ano?

(A) 9,08

(B) 10,92

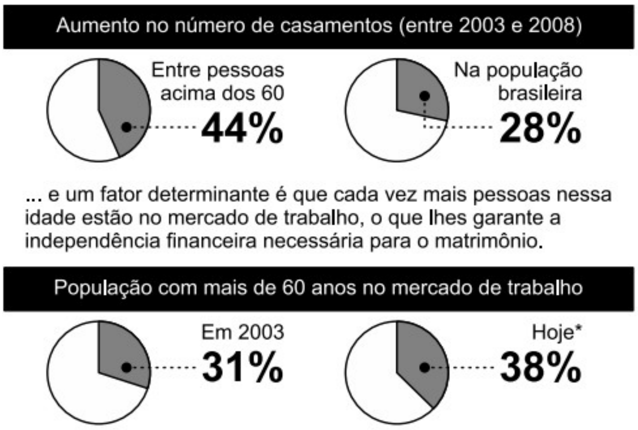
(C) 12,60

(D) 21,68

(E) 24,80

RESOLUÇÃO: Utilizando uma regra de três simples para achar quantas toneladas os Estados Unidos e a China reciclam durante o ano. Após achar os valores, subtraísse o aquele que mais recicla pelo que menos recicla, encontrando assim o valor de 9,08.

10) (ENEM - 2013) Um novo levantamento do IBGE mostra que o número de casamentos entre pessoas na faixa dos 60 anos cresce, desde 2003, a um ritmo 60% maior que o observado na população brasileira como um todo.



Os gráficos expõem dados estatísticos por meio de linguagem verbal e não verbal. No texto, o uso desse recurso:

a) Exemplifica o aumento da expectativa de vida da população.

b) Explica o crescimento da confiança na Instituição do casamento.

c) Mostra que a população brasileira aumentou nos últimos cinco anos.
d) Indica que as taxas de casamento e emprego cresceram na mesma proporção.
e) Sintetiza o crescente número de casamentos e de ocupação no mercado de trabalho.

4.1.1. Relatório

No sábado, dia 10 de agosto de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o primeiro encontro do Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar os conceitos sobre o tratamento da informação e a análise de gráficos.

Inicialmente fizemos uma dinâmica de apresentação com ao alunos, na qual todos deveriam se apresentar segurando um barbante, afim de que no final fizéssemos um círculo com o barbante.

Após a dinâmica, voltamos para a sala de aula e começamos a apresentar o conteúdo que seria abordado no encontro. Na primeira parte que se possuía mais elementos das estatística – moda, média, mediana, frequência – , os alunos não tiveram muitas dúvidas e mostraram participação quando algo era perguntado. Em alguns momentos os alunos perguntaram sobre o símbolo de somatório, $\sum_{i=1}^{n} x_i$, o qual não conheciam, então foi feito um breve exemplo do que era esta notação.

No decorrer da aula, a análise de gráficos foi algo bem debatido em sala, com vários exemplos e exercícios para fazer com o auxílio dos alunos. Em alguns exercícios de gráficos, nos remetemos tanto na sua análise, quanto em sua contas. Pois alguns exemplos se remetiam a contas para a comparação entre gráficos, assim podendo concluir a resposta da questão. Durante estes exercício no quadro, surgiu uma dúvida de um dos alunos que do porque a regra de três tinha aquela era uma multiplicação cruzada, então foi explicado que era na verdade uma igualdade de uma equação.

Após o término dos exercícios feitos em quadro, foi proposto aos alunos fazerem os exercícios do material do aluno. Alguns demonstraram dúvidas na parte em que parte da média nos primeiros exercícios e outros na interpretação do gráfico.

5. MÓDULO 2 – TRIGONOMETRIA

5.1. Plano de Aula Dia 17/08/2019 – Seno, Cosseno e Tangente no Triângulo Retângulo

2º ENCONTRO

5.1.1. Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

5.1.2. Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

5.1.3. Objetivo Geral:

Trabalhar com os conceitos básicos da trigonometria para que os conteúdos de funções trigonométricas possam ser entendidos de forma clara.

5.1.4. Objetivos Específicos:

- Relembrar os conceitos de triângulo retângulo e do Teorema de Pitágoras;
- Introduzir as razões de seno, cosseno e tangente;
- Construir a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis;

5.1.5. Conteúdo: Seno, Cosseno e Tangente no Triângulo Retângulo.

5.1.6. Recursos Didáticos: Quadro negro, giz, folha sulfite, lápis, tesoura, barbante, fita métrica.

5.1.7. Encaminhamento metodológico:

5.1.7.1. ETAPA 1 – INTRODUÇÃO

Começaremos relembrando um pouco do conceito de trigonometria, nomenclaturas de elementos do triângulo retângulo e também o Teorema de Pitágoras.

Dado um triângulo retângulo, chamamos de **catetos** os lados que formam o ângulo de 90 graus e de **hipotenusa** o lado oposto a esse ângulo.

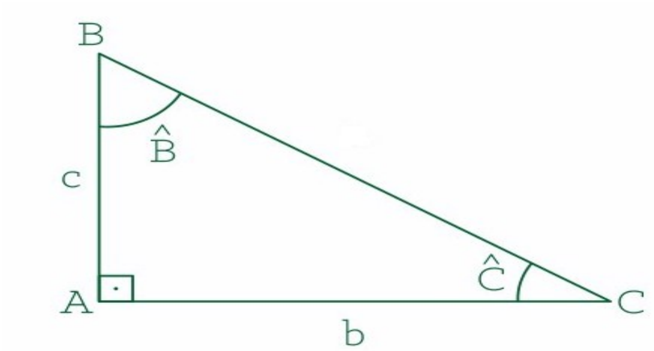


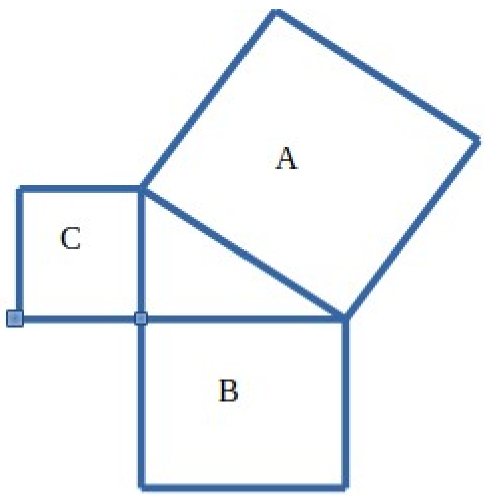
Figura 10: Triângulo retângulo e nomenclatura de seus lados. Fonte:

Dado um triângulo retângulo, podemos estabelecer a seguinte relação, atribuída a Pitágoras, sendo o tamanho da hipotenusa igual a **a** e o tamanho dos catetos iguais a **b** e **c:**

$$a^2=b^2+c^2$$

Para abordarmos esse teorema, utilizaremos um método mais visual.

Pediremos que cada aluno construa um triângulo retângulo e, em cada lado do triângulo, desenhar um quadrado, da forma que segue:



O objetivo dessa atividade é que os alunos percebam que a área do quadrado A é igual a área dos quadrados B e C somados. Faremos isso recortando os quadrados B e C de forma que os dois “caibam dentro” do quadrado A, ficando contidos no mesmo.

Como exemplo, pediremos que os alunos resolvam os exercícios 1 e 2 do material do aluno desse encontro, para posterior correção no quadro, com participação dos alunos.

5.1.7.2. ETAPA 2- SENO, COSSENO E TANGENTE

Dado um triângulo retângulo, podemos encontrar algumas razões presentes nele.

Para alguns cálculos, utilizamos as funções seno, cosseno e tangente.

Faremos uma atividade interativa para introduzir as razões de seno e cosseno.

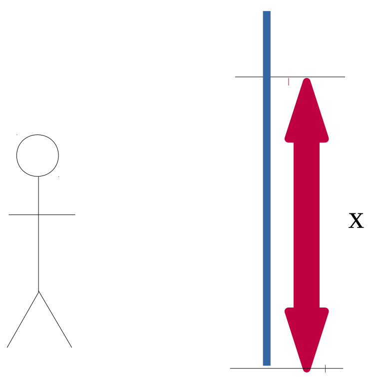
Dividiremos a sala em 6 grupos e, para cada grupo, entregaremos uma tabela, como segue:

RAZÃO	α=20º	α=35º	α=50º
Altura x			

Tabela 6: Tabela para realização da atividade sugerida.

Explica-se:

Para cada grupo, a medida x, dada em centímetros, será diferente. Essa medida x será fixada na parede, do modo que segue:



Será pedido que os alunos construam o segmento y, que vai do “topo” da medida x até o chão, porém, deverá fazer um ângulo α com a parede. Nos espaços em branco, será pedido aos alunos que escrevam a razão entre a medida x e a medida y e entre a medida z – que será a medida do chão – e a medida y. Para medição, os alunos utilizarão uma fita métrica.

Os valores obtidos em todos os grupos deve ser o mesmo para todos os ângulos α. Com isso, explicaremos existem razões – seno, cosseno e tangente – que simplificam esse trabalho, que são tabeladas e que servem para qualquer triângulo retângulo. A tabela do seno, cosseno e tangente de todos os ângulos está no material do aluno.

Os valores de seno, cosseno e tangente são calculados tomando um ângulo do triângulo retângulo como referência, diferentes de 90 graus.

Tomando como α o ângulo referência, especificamos os catetos como **oposto** e **adjacente**, como segue:

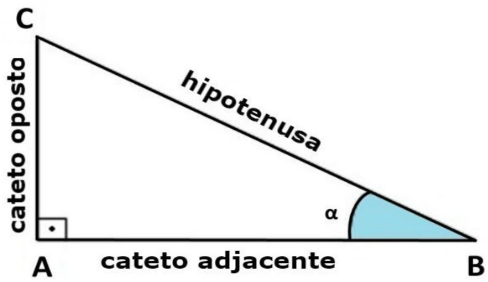


Figura 11: Nomenclatura dos catetos no triângulo retângulo, com relação ao ângulo destacado.

Denotaremos **cateto oposto** como **co, cateto adjacente** como **ca** e **hipotenusa** como **h.**

Nesse momento, resolveremos juntamente com os alunos o exercício 3 do material do aluno, dado como situação.

Considerando o ângulo α de referência, o **seno de α** é calculado pela razão entre o tamanho do cateto oposto e o tamanho da hipotenusa.

$$sen(\alpha)=\frac{co}{h}$$

Considerando o ângulo α de referência, o **cosseno de α** é calculado pela razão entre o tamanho do cateto adjacente e o tamanho da hipotenusa.

$$\cos(\alpha)=\frac{ca}{h}$$

Considerando o ângulo α de referência, a **tangente de α** é calculada pela razão entre o tamanho do cateto oposto e o tamanho do cateto adjacente.

$$\tan(\alpha)=\frac{co}{ca}$$

Outra forma de encontrarmos o valor da tangente é obtendo a razão entre o valor do seno pelo cosseno do ângulo α de referência.

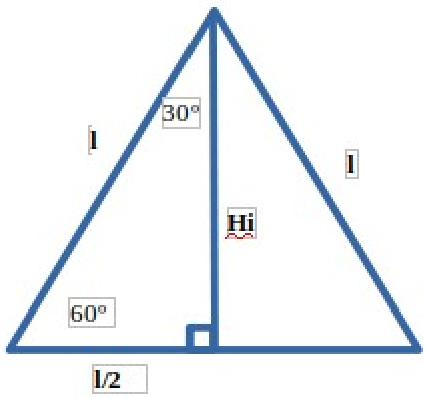
$$\tan(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{co}{h}}{\frac{ca}{h}}=\frac{co}{ca}$$

No material do aluno, estará contida a tabela de seno, cosseno e tangente.

Pediremos que os alunos resolvam os exercícios 4, 5, 6 e 7 do material do aluno, para posterior correção no quadro.

5.1.7.3. ETAPA 3- ÂNGULOS NOTÁVEIS

Para os ângulos de 30º, 45º e 60º – os chamados ângulos notáveis – podemos encontrar seus "valores exatos" fazendo algumas contas com um triângulo generalizado.



Considere um triângulo equilátero, de lado **l** e altura Hi**.** A altura Hi divide a base desse triângulo em dois lados de medida $\frac{l}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado – com catetos de tamanho **Hi** e **l/2** e **l** hipotenusa de tamanho **l** – temos que:

$$l^2=Hi^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow Hi=\frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Assim, podemos aplicar as relações de seno, cosseno e tangente vistas anteriormente, tomando, primeiramente, o ângulo de 30º como referência.

$$sen(30^o) = \frac{co}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30^o) = \frac{ca}{h} = \frac{Hi}{l} = \frac{l\frac{\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(30^o) = \frac{co}{ca} = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{l\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

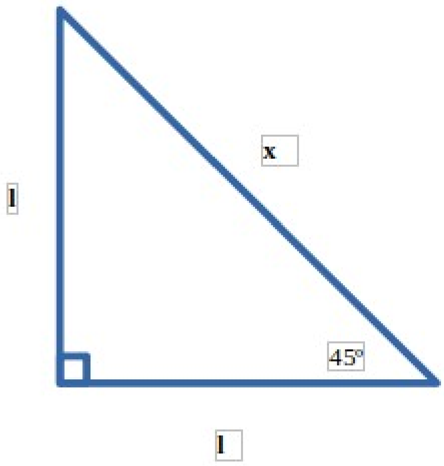
Agora, tendo o ângulo de 60º como referência, procedemos da mesma forma:

$$sen(60^o) = \frac{ca}{h} = \frac{Hi}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60^o) = \frac{co}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(60^o) = \frac{co}{ca} = \frac{Hi}{\frac{l}{2}} = \frac{l\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$$

Agora, para encontrarmos esses mesmos valores para um ângulo de 45º, consideramos um triângulo retângulo com os dois catetos tendo medidas iguais (**l**) e de hipotenusa com tamanho **x**.



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$l^2 + l^2 = x^2 \Rightarrow x = l\sqrt{2}$$

Tomando um dos ângulos de 45º como referência, fazemos os cálculos:

$$sen(45^o)=\frac{co}{h}=\frac{l}{x}=\frac{l}{l\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(45^o)=\frac{ca}{h}=\frac{l}{x}=\frac{l}{l\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45^o)=\frac{co}{ca}=\frac{l}{l}=1$$

Tabelar esses resultados favorecem a memorização desses valores. Para montarmos essa tabela com os alunos, ensinaremos o processo mecânico de construção, para melhor memorização.

Temos a seguinte tabela incompleta:

Tabela 7: Tabela dos ângulos notáveis incompleta.

ÂNGULO	**30º**	**45º**	**60º**
SENO			
COSSENO			
TANGENTE			

Preenchemos a primeira linha da tabela – linha dos senos - com os números 1, 2 e 3 respectivamente e a segunda linha – linha dos cossenos – ao contrário,com os números 3, 2 e 1 respectivamente:

Tabela 8: Tabela dos ângulos notáveis – primeiro passo para preenchimento.

ÂNGULO	**30º**	**45º**	**60º**
SENO	1	2	3
COSSENO	3	2	1
TANGENTE			

Agora, dividimos por 2 todos os números que foram preenchidos:

Tabela 9: Tabela dos ângulos notáveis – segundo passo para preenchimento.

ÂNGULO	**30º**	**45º**	**60º**
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$

COSSENO	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE			

Feito isso, aplicamos a operação raíz quadrada em todos os numeradores, lembrando que raíz quadrada de 1 é igual a 1:

Tabela 10: Tabela dos ângulos notáveis – terceiro passo para preenchimento.

ÂNGULO	**30º**	**45º**	**60º**
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE			

Para o cálculo da tangente, como vimos anteriormente, podemos obter a razão dos valores do seno pelo cosseno:

Tabela 11: Tabela dos ângulos notáveis preenchida.

ÂNGULO	**30º**	**45º**	**60º**
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Após essa explicação, pediremos que os alunos resolvam os exercícios até o término da aula.

6. ANEXO

6.1. MATERIAL DO ALUNO

θ	Senθ	Cosθ	tgθ
1°	0,017	1	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,07	0,998	0,07
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,99	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,249	0,97	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,94	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
26°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,51
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,5	0,866	0,577

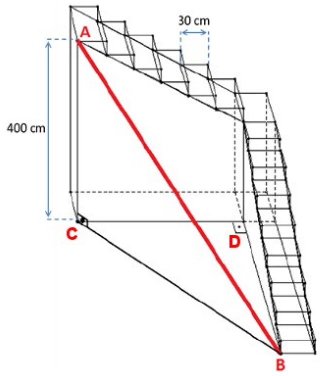
θ	Senθ	Cosθ	tgθ
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,53	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,7
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,81
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,9
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,734	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,15
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,28
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,54
58°	0,848	0,53	1,6
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,5	1,732

θ	Senθ	Cosθ	tgθ
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,469	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,05
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,94	0,342	2,747
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,97	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,332
78°	0,978	0,208	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,99	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,43
86°	0,998	0,07	14,3
87°	0,999	0,052	19,08
88°	0,999	0,035	28,63
89°	0,999	0,017	57,29

ÂNGULO	**30º**	**45º**	**60º**
SENO			
COSSENO			
TANGENTE			

1- Um avião percorreu a distância de 5 000 metros na posição inclinada, e em relação ao solo, percorreu 3 000 metros. Determine a altura que o avião se encontra.

2- (IFSC/2015) Para acessar o topo de uma plataforma de saltos a 400 cm de altura, um atleta deve subir uma escadaria que possui 8 degraus no primeiro lance e 6 degraus no segundo lance de escada, conforme mostra a figura ao lado. Sabendo que cada degrau possui 30 cm de profundidade, é CORRETO afirmar que o comprimento, em cm, da haste metálica AB utilizada para dar sustentação à plataforma é:



3- Imagine a seguinte situação:

Numa festa junina, um balão vai ser solto. O balão sobe em linha reta em direção ao céu. Há três pontos que se pode observar a subida do balão: do chão, de uma plataforma um pouco acima do chão e um pouco mais longe do ponto de lançamento do balão e do telhado do salão do local, mais alto que a plataforma e também mais longe do lançamento que a plataforma. Por conta das cores do balão, só é possível começar a vê-lo quando ele estiver em linha reta com o observador e ele some de vista do observador quando esse observa o balão num ângulo de 60º. Com base nisso, calcule o que for pedido:

Dados – Observador do chão: 5 metros de distância do balão.

Para de enxergar o balão quando atinge 7 metros.

Observador da plataforma: 8 metros de distância do balão.

Para de enxergar o balão quando atinge 13,2 metros.

Observador do telhado: 12,8 metros de distância do balão.

Para de enxergar o balão quando atinge 21,92 metros.

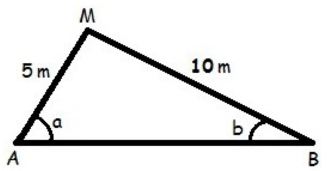
Plataforma está a 2 metros do chão e o telhado está a 4 metros do chão.

a) Calcule a distância entre o balão e o observador, em cada caso, quando o balão está na altura máxima para o observador ser capaz de enxergá-lo.

b) Calcule a razão, em cada caso, do observador até o ponto de lançamento do balão pela altura máxima de visão que o balão atinge.

4- (CEFET-MG - adaptado) Uma escada que mede 6m está apoiada em uma parede. Sabendo-se que ela forma com o solo um ângulo α e que cos α $=\frac{\sqrt{5}}{3}$ a distância de seu ponto de apoio no solo até a parede, em metros, é:

5- Determine os ângulos a e b, sabendo que a soma deles resulta em 90°.



6- Calcule seno e cosseno de

a) 63º b)27º

Dica: utilize o exercício anterior

7- (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, vale quanto?

8- (PUCCAMP) Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio. Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60°. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30°?

9- Considerando o triângulo ABC, equilátero, cujo lado mede 10 cm, qual a é medida de sua altura?

10- Calcule o valor do seno e tangente dos ângulos abaixo, sabendo que:

a) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6.1.1. Relatório

Neste dia tivemos a oportunidade de ministrar 4 horas/aulas – 240 minutos, de matemática no segundo encontro do PROMAT, na UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, para os alunos interessados no ingresso e/ou aperfeiçoamento dos conhecimentos matemáticos.

Dado que o conteúdo deste encontro fora trigonometria, a aula começou com algumas explicações de nossa parte a respeito dos elementos básicos da trigonometria, que são, triângulos retângulos, uma recapitulação do Teorema de Pitágoras e as relações de seno, cosseno e tangente de um ângulo.

Com isso se fez propício propormos uma atividade diferenciada para os discentes, que em grupos, seriam incumbidos de construir um triângulo retângulo com um ângulo que nós de antemão disponibilizamos, bem como um dos lados do triângulo. Com o triângulo construído, eles teriam que medir os lados dele e descobrir os valores das razões de, por exemplo, um dos lados pela hipotenusa.

Ao fim da atividade, perguntamos a todos os grupos, em relação a um dos ângulos dados, quanto eles descobriram na razão de um dos lados pela hipotenusa, assim fizemos com que eles intuíssem que não importa o tamanho do triângulo, sendo retângulo, eles mantém sempre uma proporção, explicamos a eles que isso se dá por conta do ângulo que tomamos como referencial.

Também comentamos a respeito dos dados de diferentes grupos, não serem exatamente iguais, que isso se dava por causa da realidade ser diferente do mundo matemático, em que neste último uma reta não tem dimensão, o que na realidade é impossível.

Partimos para os exercícios, mesmo os alunos que nunca viram nada sobre o assunto, não tiveram dúvidas significativas, mas, mesmo assim, pudemos notar certa clareza em suas ações, a respeito de trigonometria, somente no momento dos exercícios.

7. Plano de Aula Dia 24/08/2019 – Arcos, Ângulos, Unidades de Medidas dos Ângulos e Circunferências

3º ENCONTRO

7.1.1. Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

7.1.2. Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

7.1.3. Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de arcos, ângulos, unidades de medida e circunferência.

7.1.4. Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Conceito de circunferência e círculo;
- Interpretação de arcos;
- Diferença entre as medidas de ângulos;
- Resolver exercícios que abordam medidas de ângulos.

7.1.5. Conteúdo: Trigonometria.

7.1.6. Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

7.1.7. Encaminhamento metodológico:

7.1.7.1. ETAPA 1

Primeiramente, será feita a última parte do encontro anterior, que se refere a ângulos notáveis, na qual todo o procedimento será feito com os alunos, assim retomando os conceitos de trigonometria vistos anteriormente.

7.1.7.2. ETAPA 2

“O que é uma circunferência? E seus aspectos?”. Esta será a primeira pergunta feita aos alunos, tentando fazer com que eles busquem os conceitos de uma circunferência. Após as repostas deles, falaremos um pouco acerca da circunferência e seus conceitos – área, raio, diâmetro, corda, perímetro – e também da sua diferença em relação ao círculo.

Uma circunferência tem como característica o fato de seus pontos possuírem a mesma distância em relação a um ponto como chamado de centro da circunferência; essa distância se chama raio. Tomando por base a figura 1, a distância entre os pontos E (ponto da circunferência) e D (centro da circunferência) é igual à distância entre DF e é chamada de raio da circunferência.

Para construir uma circunferência, podemos usar um compasso ou até mesmo um barbante preso em um ponto fixo (centro), com o comprimento do raio e na extremidade livre do barbante, colocar um lápis (giz, caneta etc).

Temos que uma circunferência tem como um de seus aspectos o perímetro, o qual é dado por:

$$p=2\pi r$$

Seu diâmetro é dado pelo segmento que passa pelo seu centro tocando nas bordas dela.

A diferença entre o círculo e a circunferência é que o círculo possui uma área, enquanto que a circunferência se refere apenas a borda ou o contorno, não possuindo uma área A circunferência seria como uma aliança e o círculo, um disco ou CD.

A área do círculo é dada por:

$$a=\pi r^2$$

7.1.7.3. ETAPA 3

Nesta etapa será abordado o conceito das medidas de ângulos. Utilizando as medidas em graus, radianos e porcentagem. Sendo está última mais utilizada na engenharia, por exemplo na construção de rampas para o acesso dos cadeirantes.

Grau: Se dividirmos a circunferência em 360 arcos congruentes, cada um desses arcos é chamado de *arco de 1º*. Logo a circunferência é um aro de 360º. Caso o ângulo seja maior que 360º, o mesmo deve ser divido por uma volta completa, assim sabe-se quantas voltas foram dadas na circunferência e quantos graus sobraram.

Fato histórico: Ainda utilizamos a medida 360 para denotar uma volta completa pelo fato de termos herdados a notação babilônica. Como eles trabalhavam com a base sexagesimal e acreditavam que um ano possuía 360 dias, então andávamos 1º por dia. Outra fato que vem dos babilônicos é o sistema de fuso horário, pois se dividirmos 360º por 24 resta 15º, o que compõe a longitude do mapa mundial e seus fusos horários.

Radianos: Consideremos uma circunferência qualquer de centro *O* e raio *R* e, nessa circunferência, um pedaço da circunferência *s*, sendo α a medida do ângulo central correspondente a esse pedaço. Diz-se que esse pedaço da circunferência é de um 1 *rad* se seu comprimento *s* for igual ao comprimento de *R*.

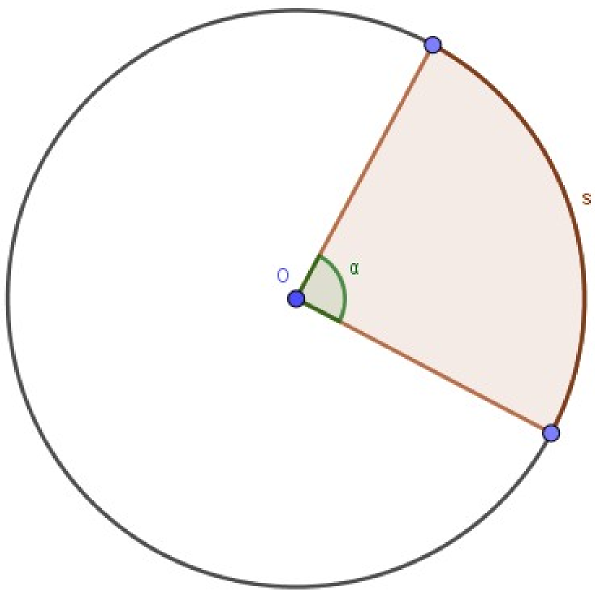


Figura 12: Setor da circunferência. Fonte: Os Autores.

Sua razão é dada por $\alpha = \frac{s}{R}$.

Exemplo: Sabendo que R = 8cm e s = 40cm, calcule quantos radianos o ângulo possui.

Porcentagem: Esta medida é mais utilizada na engenharia, para cálculo de inclinação como o de telhados, por exemplo. Também é utilizado para a construção de rampas para cadeirantes, na qual o percentual deve estar 6,25% e 8,33% para uma altura de até 80cm, segundo as normas de acessibilidade. Sua forma de cálculo se dá por:

$$i = \frac{CO}{CA} 100$$

Sendo o CO a altura e CA, o comprimento, visto que o ângulo de referência é o que a rampa faz com o solo na parte mais baixa. Ou seja, essa porcentagem se refere ao tamanho do cateto oposto em relação ao adjacente.

Exemplo: Deseja-se construir uma rampa para o acesso de cadeirantes em uma escola. Sabendo que a rampa terá 50cm de altura, qual deverá ser comprimento da rampa de forma a respeitar a norma de 8% de inclinação?

$$CO = 50$$
$$i = 8$$
$$8 = \frac{50}{CA} 100$$

Logo, CA, ou seja, o comprimento será de 625cm (6,25m).

7.1.7.4. ETAPA 4

Começaremos essa etapa com a seguinte questão para os alunos: “O que vocês entendem por arco?”. Tendo assim apenas ilustração do que ele seria, fazendo esboços no quadro em um debate com os alunos para posteriormente formalizar o conceito.

Será feito uma abordagem a noção de arcos na circunferência. Começando pelo seu conceito: “Seja uma circunferência qualquer de centro *A* e raio *R* e dois pontos distintos, *B* e *C*, que a dividem em duas partes. Cada uma dessas partes chama-se arco da circunferência.”

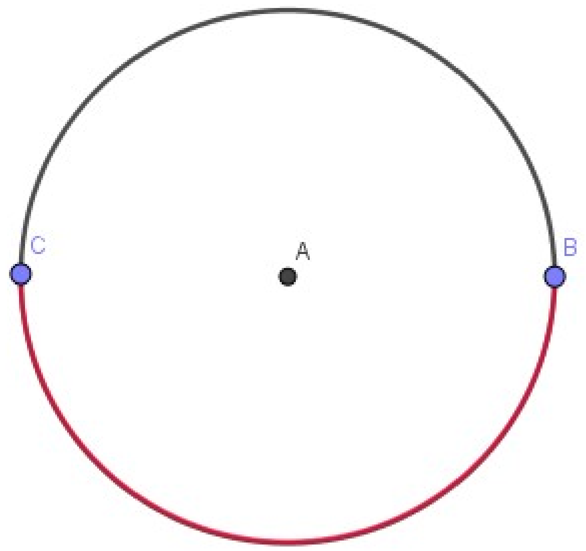


Figura 13: Circunferência de arco BC. Fonte: Os Autores.

Sendo neste, *B* e *C* as extremidades do arco.

Quando as extremidades B e C coincidem, temos um arco de uma volta ou um arco nulo. Primeiramente um arco de uma volta, no qual os *B* e *C* são iguais, ou seja, $B \equiv C$.

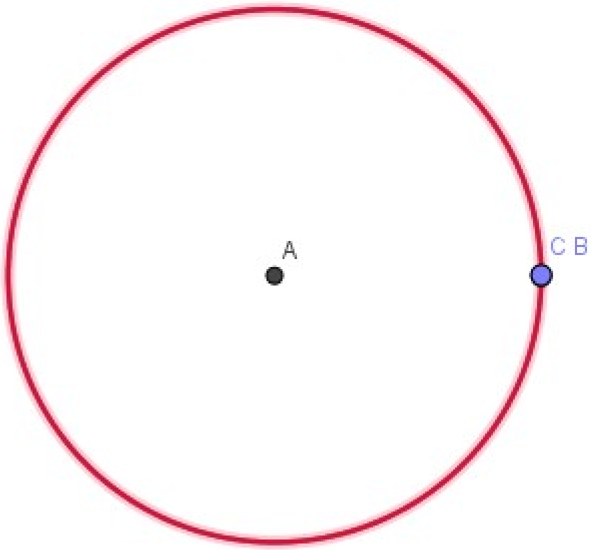


Figura 14: Arco de uma volta. Fonte: Os Autores.

O arco nulo se dá quando não existe volta nenhuma na circunferência.

Comprimento de um arco: Numa circunferência de raio *R*, vamos considerar um arco de comprimento *s* cujo ângulo central correspondente em radianos mede α. Da relação de medida em radianos, podemos concluir que:

$$s = \alpha \times R$$

Sendo *s* o comprimento do arco e R o comprimento do raio, no qual estas se referem a grandezas lineares. Já α é a medida do ângulo central em radianos, sendo ela uma grandeza angular.

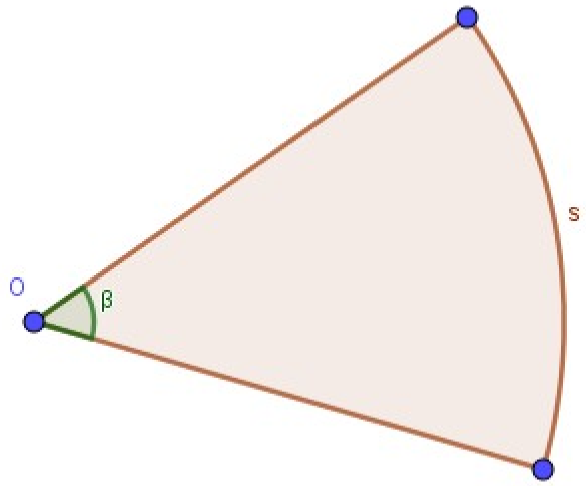


Figura 15: Comprimento de setor. Fonte: Os Autores.

Para abordar a redução ao primeiro quadrante, será feito a construção do ciclo trigonométrico pelo material do aluno.

Redução ao primeiro quadrante: Quando estamos trabalhando com ângulos que ultrapassam o primeiro quadrante e tendo que o ciclo trigonométrico é simétrico, temos uma correspondência dos demais quadrantes com o primeiro. Assim surgem as seguintes relações de redução:

- **Segundo para primeiro:** $180^o - x \;\; ou \;\; \pi - x$
- **Terceiro para primeiro:** $180^o + x \;\; ou \;\; \pi + x$
- **Quarto para primeiro:** $360^o - x \;\; ou \;\; 2\pi - x$

Avaliação: A avaliação será feita dos exercícios e dúvidas em sala de aula será feita de acordo com a participação dos alunos que estarão em grupos.

8. ANEXO

8.1. MATERIAL DO ALUNO

- **Área do círculo:** $a = \pi * r^2$
- **Perímetro da circunferência:** $C = 2 * \pi * r$

- **Diâmetro é o segmento entre dois pontos da circunferência que passa pelo centro.**
- **Raio é um segmento que parte do centro até um ponto da borda (ou ponto da circunferência).**
- **Se a circunferência** α **for maior que 360º, temos que** $\frac{\alpha}{360}$ **será o número de voltas dadas mais uma angulação.**
- **Relação do radiano:** $\alpha = \frac{s}{R}$ **;** $2\pi\ rad \Leftrightarrow 360^o \ \ ou\ \ \pi\ rad \Leftrightarrow 180^o$ **.**
- **Para porcentagem:** $i = \frac{CO}{CA} * 100$
- **Norma de acessibilidade:** $6{,}25\% \leqslant i \leqslant 8{,}33\%$ **para uma altura máxima de 80 cm.**
- **Do segundo quadrante para o primeiro:** $180^o - x \ \ ou\ \ \pi - x$
- **Do terceiro para o primeiro:** $180^o + x \ \ ou\ \ \pi + x$
- **Do quarto para o primeiro:** $360^o - x \ \ ou\ \ 2\pi - x$

1) Um marceneiro deseja impermeabilizar uma área circular no chão de madeira de sua loja, mas é necessário que seja passado duas demãos do produto. Sabendo que o raio desta circunferência é de 3 metros e que cada galão de impermeabilizante cobre uma área de 2 m². Quantos galões serão necessários para fazer este procedimento? Sabendo que ele só pode comprar galões cheios. Adote $\pi = 3{,}14$.

2) O dono de um sítio deseja criar um curral circular para deixar os animais ali dentro durante o dia. Ele estima uma um raio de 15 metros para a construção, mas para cercá-lo tem que escolher duas opções, sendo elas: Uma cerca que fecha por inteiro o espaço ou quatro fios de arame que impedem a saída do animal. O preço do arame em metros é de R$5,00 e a cerca em metros é de R$17,00. Qual é será o material em que o dono terá menor gasto? Adote $\pi = 3{,}14$.

3) Uma barreira de contenção no mar deseja parar uma contaminação de petróleo pelas águas. O cerco construído foi de aproximadamente 800 metros em torno de seu centro. Qual seria o valor do raio estipulado para que o petróleo fique preso dentro da contenção? E qual seria a área de poluição da água?

4) Quantas voltas foram dadas na circunferência nos casos:

a) 900º b) 3600° c) 473º d) $\frac{8\pi}{3}$

5) Deseja-se construir uma rampa de acesso em uma parte de um shopping. Sabendo que ela terá altura de 30cm e 4 metros de distância. Diga (e justifique) se está rampa estará dentro das normas de acessibilidade.

6) A estrutura de um telhado foi feita com 6m de comprimento e uma altura de 0,9m. Quais tipos de telha poderão ser instaladas nesse telhado de acordo com as especificações dos fabricantes, as quais se encontram na tabela abaixo? Justifique.

Tipo de Telha	**Inclinação**
Fibrocimento	Mínimo de 10%
Shingle	Maior que 16%
Portuguesa	Mínimo de 30%
Francesa	Mínimo de 36%

7) Seja uma circunferência de raio 3 cm com angulação de 5 rad. Qual seria o comprimento do arco?

8) Dada a circunferência de raio 10 cm, calcule o comprimento de arco correspondente ao ângulo centra de medida $\frac{\pi}{3}$. Use $\pi = 3{,}14$.

9) Uma circunferência possui 50 cm de comprimento de arco e uma sua medida de ângulo é $\frac{\pi}{6}$. Qual é o raio desta circunferência? Adote $\pi = 3{,}14$.

10) **(UFRGS)** Considere as afirmações a seguir:

I. tan 92° = –tan 88°

II. tan 178° = tan 88°

III. tan 268° = tan 88°

IV. tan 272° = –tan 88°

Quais estão corretas?

a) I, III

b) III, IV

c) I, II, IV

d) I, III, IV

e) II, III, IV

8.1.1. Relatório

No sábado, dia 24 de agosto de 2019, realizamos o terceiro encontro do Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE. No dia em questão, foram desenvolvidas retomados conceitos da aula passada e feito um a nova abordagem do conteúdo de trigonometria.

No início da aula o conceito de ângulos notáveis a partir do triângulo equilátero, utilizando 30º e 60º, foram abordados para ver a relação de seno e cosseno. Mas, alguns alunos que não viram a matéria ou não tiveram a mesma abordagem usada ficavam com dúvidas, sendo que poucos deles pediam para que algum passo fosse retomado para entender a construção. Na construção do ângulo de 45º, os alunos não tiveram tanta dificuldade em notar sua origem, pois era dado pela diagonal do quadrado.

Na parte de circunferência e círculos, os alunos tinham noção do que se tratava seus conceitos, porém em alguns exercícios tinham dificuldades nas interpretações, confundindo o que era área com o perímetro.

No decorrer da aula, as medidas de ângulos foram abordadas, sendo que no início eles achavam que era para dizer apenas os números e não a sua característica. O conceito de grau era bem conhecido por eles, mas o de radianos não era tão usual. Sendo que um aluno perguntou quanto valia *1 rad*, pois era apenas passado com o π. Depois de fazer uma dedução com os demais professores, a dúvida do aluno foi sanada e o porque daquela notação com apenas um número inteiro não era abordada. O conceito de porcentagem foi algo novo para eles, mas logo perceberam que era dado pela tangente multiplicado por 100. Nos exercícios, alguns alunos mostraram dúvidas na questão de voltas que era dada em uma circunferência.

9. Plano De Aula Dia 31/08/2019 – Funções Trigonométricas, Domínio E Imagem E Relações Trigonométricas

4º ENCONTRO

9.1.1. Público-Alvo:

Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

9.1.2. Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

9.1.3. Objetivo Geral:

Promover aos alunos apropriação dos conceitos relacionados a Trigonometria.

9.1.4. Objetivos Específicos:

- Construir os gráficos das respectivas funções.
- Identificar cada funções por meio de sua representação gráfica.
- Resolver exercícios envolvendo o conteúdo.

9.1.5. Conteúdo: Tipos de funções, domínio e imagem. Funções Seno, Cosseno e Tangente e seus períodos e relações Trigonométricas.

9.1.6. Recursos Didáticos: Quadro negro, giz, folha sulfite, lápis.

9.1.7. Encaminhamento Metodológico.

9.1.7.1. ETAPA 1 – 30~ 40 Min.

Começaremos a aula fazendo uma revisão dos conceitos de função, domínio e imagem de uma função, se valendo de diagramas de Venn bem como o aparato algébrico, no sentido de escrever o conjunto imagem, escrever o conjunto Domínio.

Exemplificando com diagramas de Venn o que é uma função, o que precisa para ser uma função que é, todos os elementos do domínio estarem relacionados e um elemento do domínio não possuir duas imagens diferentes.

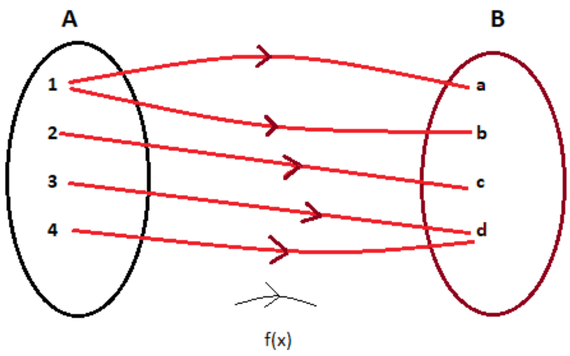


Figura 16: Diagrama de Venn. Fonte:

Em seguida, retomando a forma de como escrever um conjunto imagem de uma função qualquer, não necessariamente a do exemplo.

Im(g) = { $x \in Dom(f) / f(x) = y$ }, bem como identificar o domínio e escrevê-lo quando não for um conjunto notável (IR, IN, Z e Q).

Por conseguinte, trataremos do conceito de função periódica somente a fim de apresentação, pois possui íntima relação com as funções seno, cosseno e tangente por elas serem desta classe de funções, que compreenderá um período ínfimo, pois será apenas apresentação de alguns exemplos, como a imagem a seguir de uma função h(x):

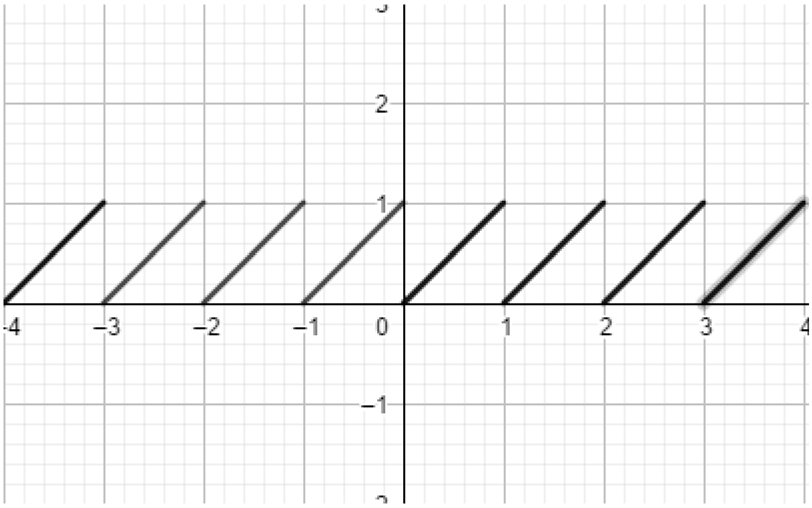


Figura 17: Função periódica. Fonte: Os Autores.

9.1.7.2. ETAPA 2 – 2 Horas e 20 min.

Para iniciarmos esta etapa, faremos uma breve introdução, justificando o próximo conteúdo, a respeito de efeitos ondulatórios e sua relação com as funções periódicas, tomando como exemplo as ondas sonoras, mostraremos a eles o vídeo abaixo:

https://www.youtube.com/watch?v=H-iCZElJ8m0

Chamaremos a atenção neste momento para perceberem que enquanto a frequência em Hz aumenta, resulta graficamente em ondas menores, sugerindo uma maior vibração, usaremos também um dispositivo interativo, que mostra a relação entre amplitude de uma onda com o som que gera, bem como a frequência de uma onda, a última se remetendo ao significado da palavra em si, quando a frequência aumenta, a incidência de picos e vales na curva, aumenta também. E por último ainda para justificar a existência de funções, nos valeremos de outro vídeo, onde mostra a onda sonora propriamente dita, visualização possível graças a água que permeia o dispositivo que emite o som, Tal momento servirá como gatilho pra justificar o motivo de existir funções seno, cosseno e tangente, o motivo de poder calcular seno, cosseno e tangente de valores negativos, que servem para modelar situações da realidade em que vivemos.

Após este momento motivacional, retomaremos o círculo trigonométrico e sua relação com cosseno, seno e tangente de um ângulo, faremos aqui uma abordagem por meio do geogebra:

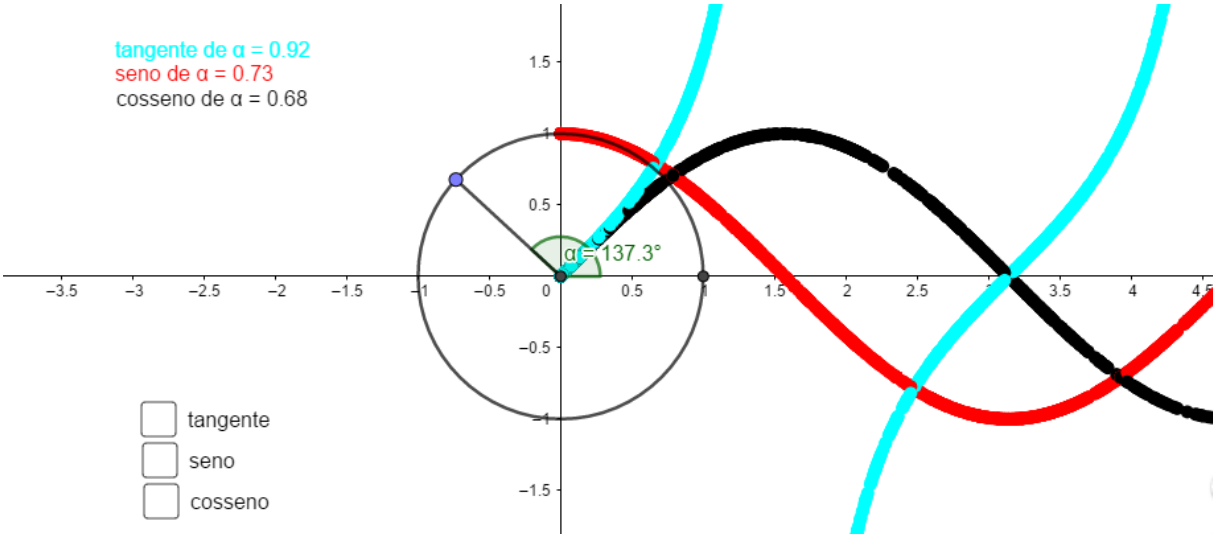


Figura 18: Trigonometria no GeoGebra. Fonte: GeoGebra.

Ressaltaremos o rastro formado pelo controle deslizante, todos relacionados ao ângulo α , denotam as chamadas funções trigonométricas, oriundas das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente de um triângulo retângulo visto dentro de uma circunferência.

Em seguida iniciaremos o conteúdo de funções trigonométricas propriamente dito, ressaltando que a ênfase será na construção e identificação dos gráficos de cada uma das funções. Começando com a função Seno.

Notação: Sen(x)

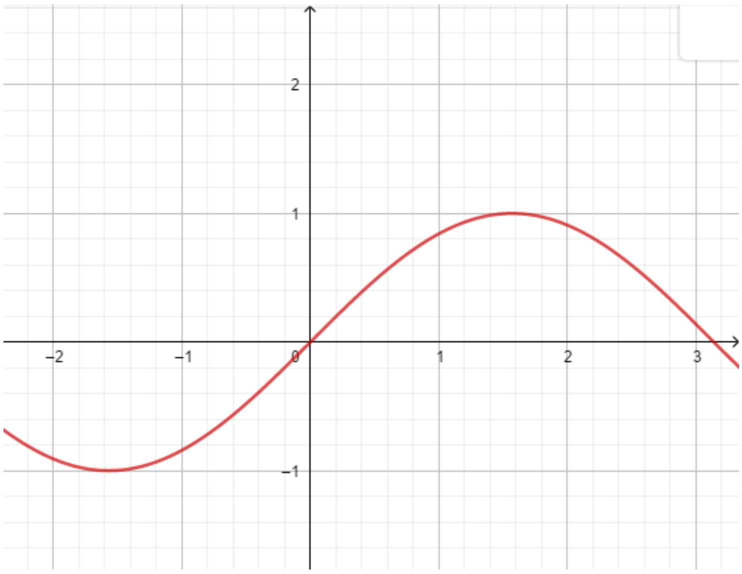


Figura 19: Gráfico do seno. Fonte: GeoGebra.

Após apresentar seu gráfico, explanaremos sobre seu domínio e sua imagem e o fato de sua imagem estar sempre limitada, bem como sobre o período desta função. Explicaremos também que período se refere a um intervalo em que a função se repete, que no caso desta função é 2π .

A próxima função a ser apresentada é a função Cosseno, também explicaremos que o período desta função é 2π e que sua imagem, tal qual a função Seno, é limitada também. Lembrando que estas explicações não necessariamente tomarão muito tempo.

Notação: Cos(x)

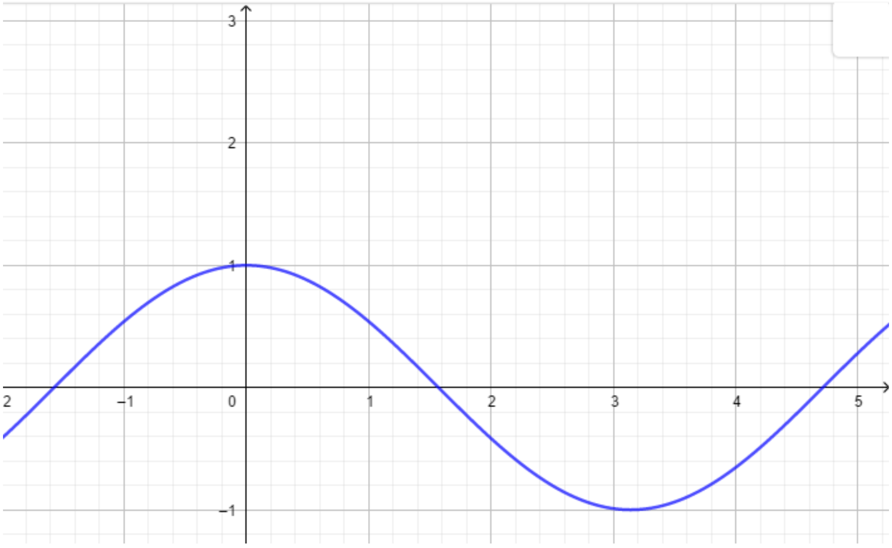


Figura 20: Gráfico do cosseno. Fonte: GeoGebra.

Por Conseguinte a outra função a ser apresentada aos alunos é a função Tangente, nesta aqui, diferente das outras anteriores, pode ser escrita como o quociente de duas funções, a saber Seno e Cosseno, desta maneira, $tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$. Também explicaremos a respeito do período, que é π bem como explicar que seu domínio é restrito, pois quando $cos(x)=0$ há uma indeterminação, por conta disto seu domínio é D = { $x \in R / x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ } bem como sua imagem não ser limitada, sendo todo os IR.

Notação: Tan(x)

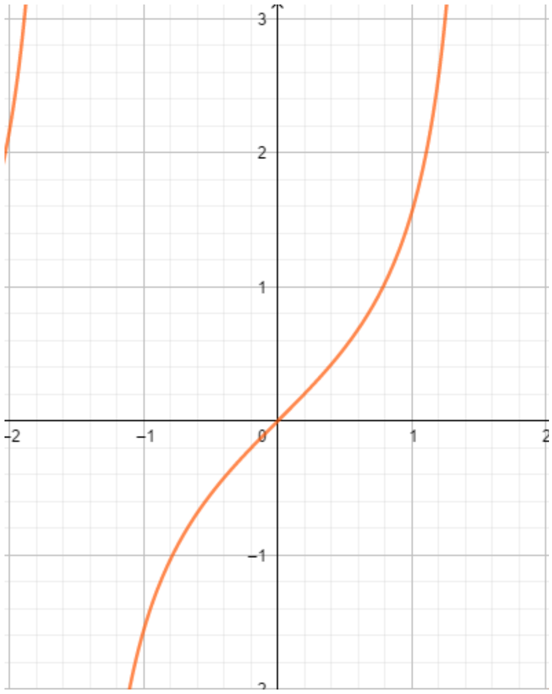


Figura 21: Gráfico da tangente. Fonte: GeoGebra.

Daqui em diante, iniciaremos outra parte, ainda sobre funções trigonométricas, que será relembrar alguns conceitos sobre funções ainda. O que acontece com o gráfico da função quando se soma e subtrai dentro e fora do argumento, quando se multiplica dentro e fora do argumento o que acontece com o gráfico desta função. Contudo as funções a serem analisadas serão, Seno, Cosseno e Tangente. Ao término desta explicação proporemos alguns exercícios de construção de gráficos, presente no material do aluno, sendo que um destes será feito em conjunto na lousa, a fim de elucidá-los.

Exercício 1) Construa o gráfico das seguintes funções:

a) 1 + Cos(x)
b) Cos(x + 1)
c) -1 – Sen(x)
d) 3Sen(2x)
e) Tan(x+2)

9.1.7.3. ETAPA 3 – O que restar da aula.

Neste momento, abordaremos as relações trigonométricas, mais especificamente a relação fundamental da trigonometria como é conhecida, explicaremos a eles que a relação fundamental dada por,

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$$

tem íntima relação com o Teorema de Pitágoras. Em seguida mostraremos a eles como se dá esta relação, visualmente, com o software geogebra da seguinte maneira,

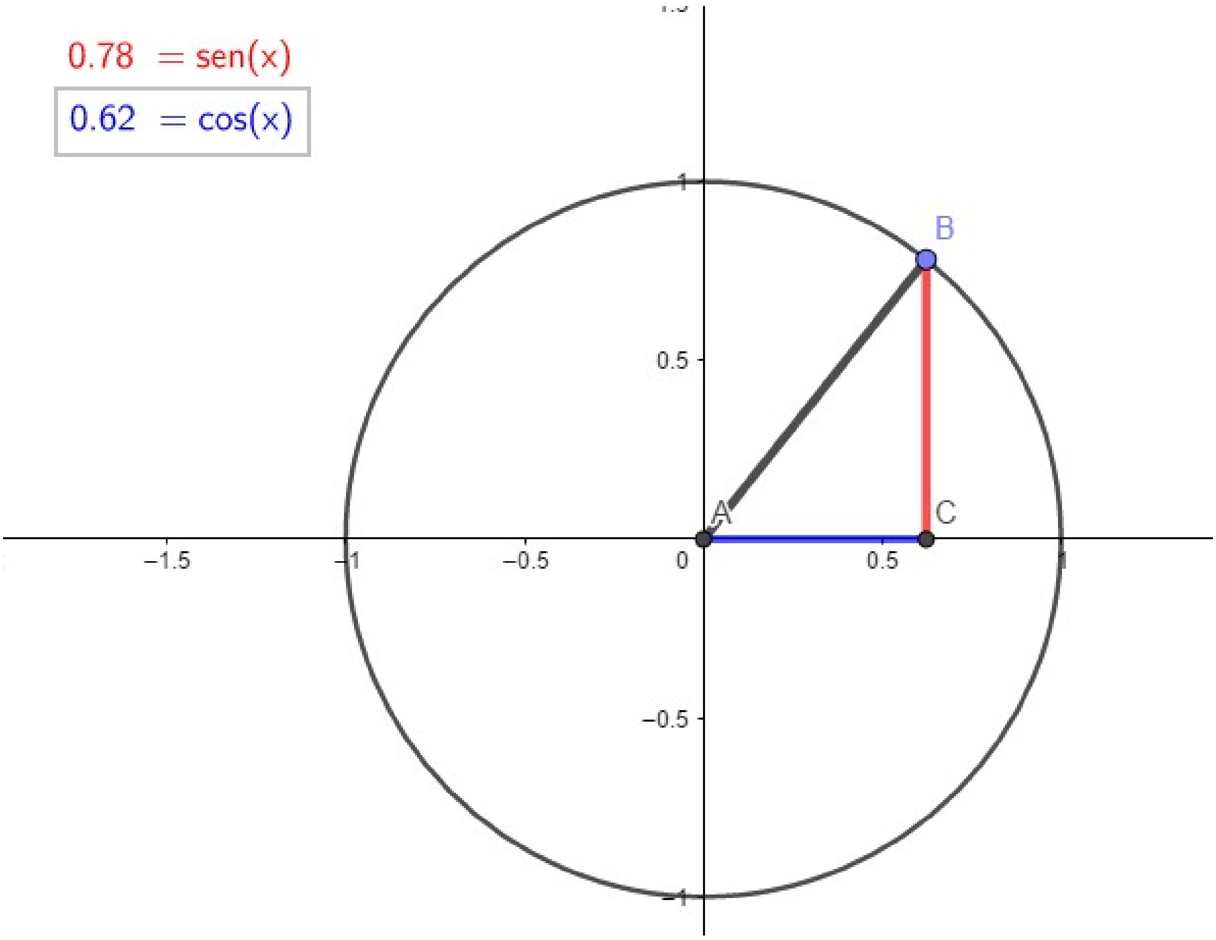


Figura 22: Relação fundamental trigonométrica. Fonte: GeoGebra.

9.1.8. Avaliação: A avaliação se dará pela participação dos alunos durante as atividades propostas.

10. ANEXO

10.1. MATERIAL DO ALUNO

Definições:

$$Cotg(x)=\frac{1}{(\tan(x))}$$

$$sec(x)=\frac{1}{(\cos(x))}$$

$$cossec(x)=\frac{1}{(sen(x))}$$

Exercício 1 - Construa o gráfico das seguintes funções:

a) 1 + Cos(x)

b) Cos(x + 1)

c) -1 – Sen(x)

d) 3Sen(2x)

e) Tan(x+2)

Exercício 2 – Mostre que é verdade as seguintes sentenças:

a) $\tan^2(x)+1=sec^2(x)$

b) $1+cotg^2(x)=cossec^2(x)$

c) $\cos^2(x)-2\sqrt{3}\cos(x)=-3$ **, dica: nesta questão basta encontrar o valor de x que satisfaça a equação.**

Exercício 3 - QUESTÃO 24/ENEM 2015

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção e consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos

mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.
A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função:

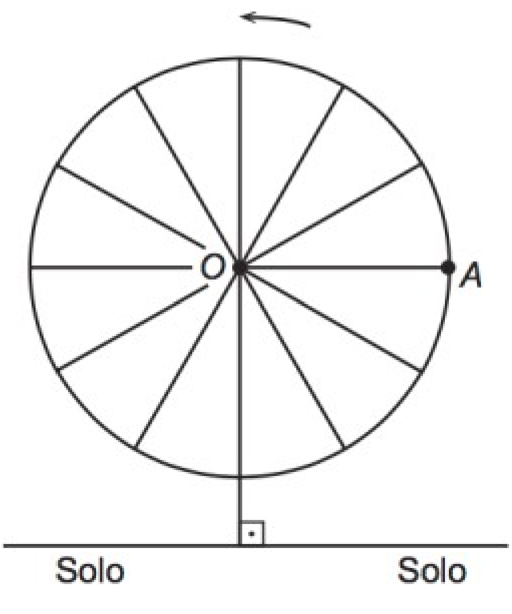
$$P(x)=8+5\cos\left(\frac{(\pi x-\pi)}{6}\right)$$

Onde x representa o mês do ano, sendo x=1 associado ao mês de janeiro, x=2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x=12 associado ao mês de dezembro.
Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

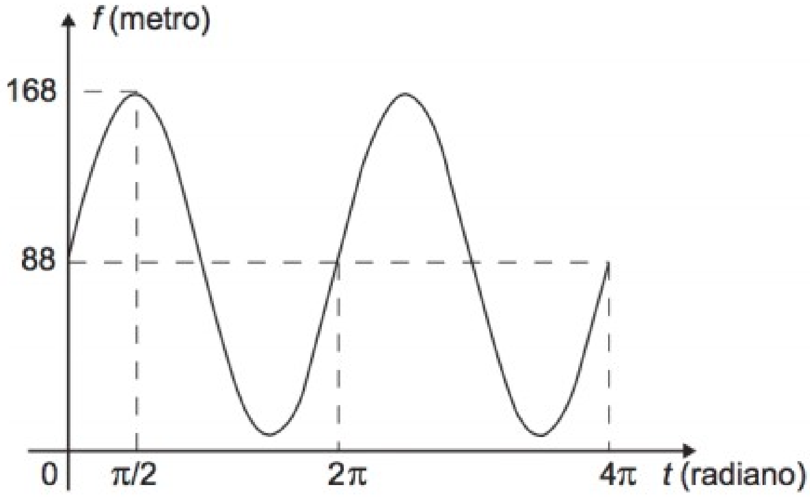
a) Janeiro.
b) Abril.
c) Junho.
d) Julho.
e) Outubro.

Exercício 4 – QUESTÃO 154/ENEM 2018

Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por:

A) f(t) = 80sen(t) + 88

B) f(t) = 80cos(t) + 88

C) f(t) = 88sen(t) + 168

D) f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)

E) f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)

Exercício 5 - (**Vunesp) A expressão** $\frac{(\cos^2(x))}{(1-sen(x))}$ **, com sen θ ≠ 1, é igual a:**

a) sen x

b) sen (x + 1)

c) tg (x) . cos (x)

d) 1

e) $\frac{(\sin(x))}{(sec(x))}$

10.1.1. Relatório

Nesta aula do dia 14 de Setembro de 2019, foi proporcionado a nós discentes, ministrarmos sobre Trigonometria para os alunos do PROMAT realizado nas dependências da UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, especificamente, foram retomados alguns conceitos sobre triângulos retângulos a fim de facilitar a apresentação do conceito de funções trigonométricas, que fora o tema principal abordado no encontro.

De começo foi feita uma revisão do conceito de função, domínio e imagem de uma mesma, bem como o que era uma função periódica. Para esta revisão, usamos uma abordagem com diagramas de Venn, para estabelecer as condições a serem cumpridas para se ter uma função, neste momento houve participação dos alunos, alguns, que sabiam de antemão sobre o conceito, ressaltando que haviam alunos de todos os anos do ensino médio.

Logo em seguida, fizemos uma introdução um tanto quanto atípica a fim de justificar as definições que viriam logo a seguir, sobre funções trigonométricas. Pretendíamos mostrar por meio de vídeos algumas aplicações e ou evidências do uso de funções trigonométricas na vida real, contudo por conta de alguns problemas técnicos não foi possível. Por conseguinte definimos o que eram as funções trigonométricas, uma a uma, seno, cosseno e tangente, bem como os gráficos, domínios e imagens de cada uma.

Em especial, neste momento conseguimos mostrar a eles por meio do geogebra, a relação intrínseca entre o triângulo retângulo circunscrito e as funções que foram definidas, relacionando as relações que envolvem os catetos e a hipotenusa com as funções através de um controle deslizante criado no software.

Por último mas não menos importante, abordamos por meio do geogebra a relação fundamental da trigonometria, com um controle deslizante que alterava um triângulo circunscrito, pedimos aos alunos para verificarem o quão próximo de 1 era a soma dos valores do seno ao quadrado com o valor do cosseno ao quadrado, ressaltando a importância do Teorema de Pitágoras e em seguida se deu a parte dos exercícios.

11. MÓDULO 3 – GEOMETRIA ANALÍTICA

11.1. Plano De Aula Dia 14/09/2019 – Coordenadas Cartesianas, Distância Entre Pontos, Ponto Médio De Um Segmento

5º ENCONTRO

11.1.1. Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

11.1.2. Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

11.1.3. Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de Geometria Analítica.

11.1.4. Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Geometria Analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Trabalhar com coordenadas cartesianas no plano.
- Aplicar o conceito de distância entre dois pontos no plano.
- Compreender o que é um ponto médio de um segmento e o que são pontos colineares.

11.1.5. Conteúdo: Geometria analítica.

11.1.6. Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

11.1.7. Encaminhamento metodológico:

11.1.7.1. ETAPA 1

Neste primeiro momento, com o intuito de introduzirmos o Plano Cartesiano a eles, relembrar para alguns, proporemos uma atividade envolvendo o jogo Batalha Naval, da seguinte forma:

- Divide-se a turma em dois grupos, elegendo um representante de cada grupo.
- Os professores se distribuirão entre os dois grupos equivalentemente, como integrantes.
- Os dois escolhidos estarão um de frente para o outro.
  Cada "grupo de marinheiros" disporá de 3 espécies de embarcações, que são Hidroaviões, Encouraçados e Destroyers respectivamente mostrados no desenho a seguir:

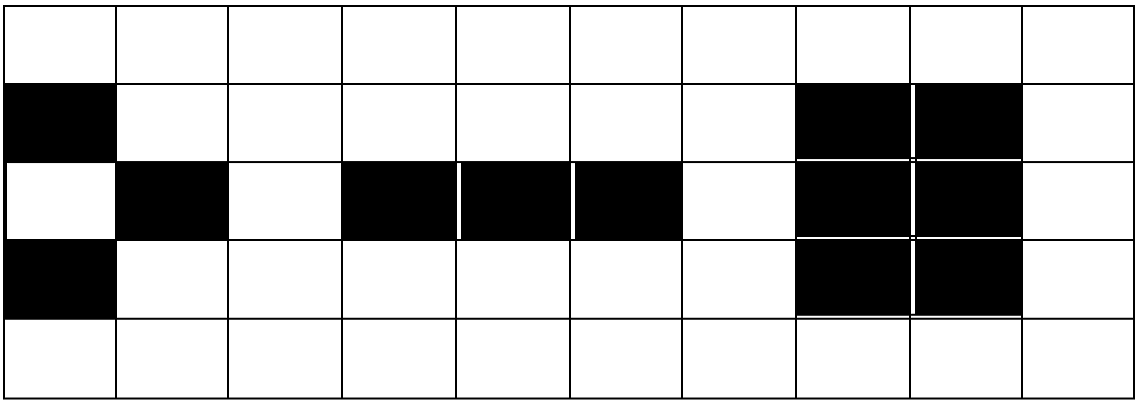


Figura 23: Embarcações do jogo batalha naval. Fonte: Os Autores.

- Cada grupo poderá utilizar 5 embarcações: 2 hidroaviões, 2 encouraçados e 1 destroyer.
- O jogo ocorrerá nas normas usuais de uma batalha naval. Contudo a cada embarcação, do oponente, derrubada, o grupo ganhará uma coordenada, este ponto estará disposto no dispositivo VR, o grupo que derrubar as 5 embarcações do oponente e encontrar as 5 coordenadas no plano, vence a dinâmica.

Em seguida, explicaremos de uma maneira um pouco menos descontraída o que é um plano cartesiano, que é o conjunto de todos os pontos do tipo (x, y), composto pela coordenada x e pela coordenada y, dispostos de maneira ortogonal, o eixo dos x, é a reta horizontal e o eixo dos y a reta vertical.

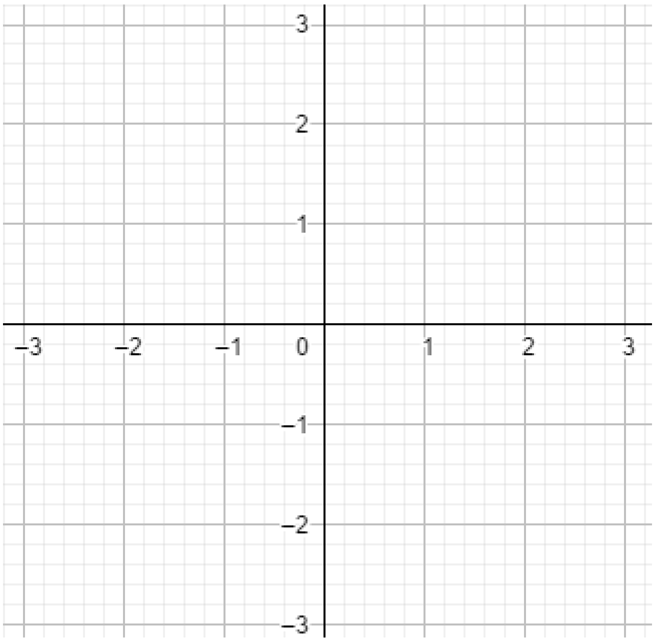


Figura 24: Plano cartesiano. Fonte: GeoGebra.

Ressaltaremos que os pontos nos eixos ordenados, obedecem uma escala, a distância entre (0,0) e (1, 0) não pode ser diferente que a distância entre (1, 0) e (2, 0).

11.1.7.2. ETAPA 2

Nesta etapa, proporemos a seguinte atividade se valendo do plano cartesiano impresso que entregaremos, em malha quadriculada, daremos a eles, dois pontos aleatórios e questionaremos a respeito da distância entre este dois pontos, por exemplo:

- Dados os pontos A (1, 1) e B (5, 4), qual é a distância entre eles?

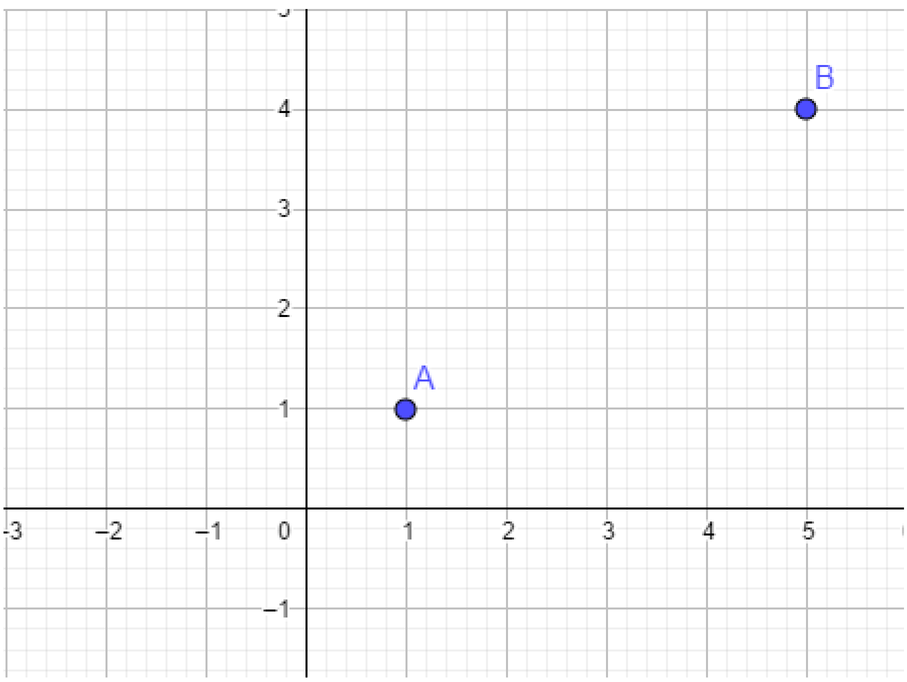


Figura 25: Pontos no plano. Fonte: GeoGebra.

Deixaremos que eles tentem por si só encontrar alguma estratégia para "medir" a distância entre A e B. Depois de alguns minutos explicaremos a eles, no quadro, a íntima relação entre a distância entre dois pontos e o Teorema de Pitágoras, pois uma das estratégias é considerar um triângulo retângulo da seguinte maneira:

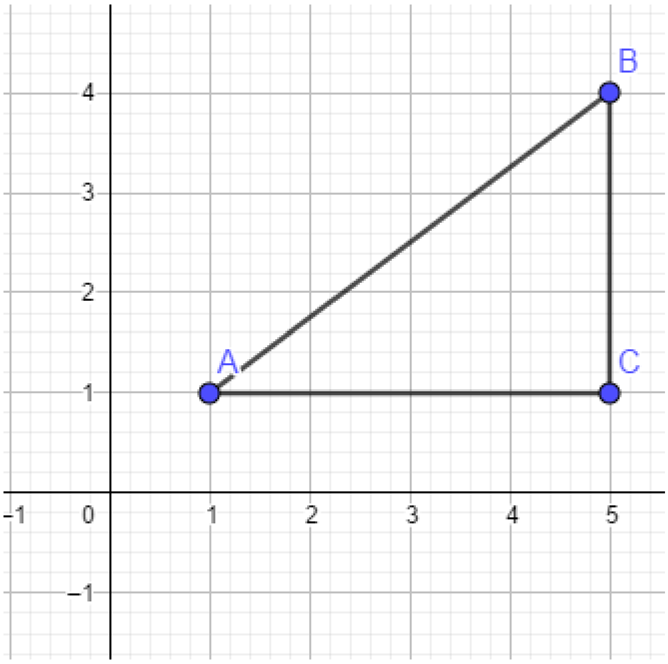


Figura 26: Distância entre pontos. Fonte: GeoGebra.

O cateto AC possui 4 unidades e o cateto BC possui 3 unidades, logo a Hipotenusa possui 5 unidades. Exatamente neste momento explicaremos que a distância entre dois pontos na geometria analítica se dá por:

Dado dois pontos A (x_1, y_1) e B(x_2, y_2), a distância entre A e B tem por notação e se calcula por:

$$d(A,B)=|A-B|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ .$$

Em seguida, nesta mesma etapa explicaremos o que são pontos colineares, por meio de uma indagação, já que o conceito intui diretamente da palavra colinear, perguntaremos a eles o significa dois pontos serem colineares? Por conseguinte de maneira a aceitar/corrigir possíveis respostas, mostraremos o que é exatamente dois pontos serem colineares.

Ressaltaremos que o conceito de distância entre pontos colineares se mantém o mesmo, pensando em exemplos como (3,0) e (7,0). Com isso explicaremos um último conceito, que é o ponto médio de um segmento. Em alguns casos achá-lo se torna uma tarefa bem fácil, como em casos onde os segmentos são paralelos aos eixos ordenados, mas e quando não são?

Falaremos então que o ponto médio de um segmento qualquer pode ser encontrado por meio da média aritmética entre as coordenadas dos pontos que originam o segmento, da seguinte maneira:

Sejam A(a, b) e B(x, y) e o segmento que os une, o ponto médio M(s, t) é tal que:

$$s=\frac{(a+x)}{2} \quad \text{e} \quad t=\frac{(b+y)}{2}\ .$$

Note que o ponto M possui como coordenadas as médias aritméticas das coordenadas respectivas de A e B. A abcissa (a ordenada) do ponto médio de um segmento de reta é a média aritmética das abscissas (das ordenadas) dos extremos do segmento.

O baricentro de um triângulo é o ponto de encontro das três medianas de um triângulo qualquer, é chamado de *baricentro* ou *gravidade* do triângulo. O baricentro $G(x_G, y_G)$ de um triângulo qualquer de vértice $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ tem coordenadas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad e \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

11.2. ANEX

11.2.1. MATERIAL DO ALUNO

1) Um triângulo equilátero tem seus vértices com as seguintes coordenadas no plano cartesiano:

A(2, 1), B(5, 1) e C(2, 4)

Quais são as coordenadas do baricentro desse triângulo?

a) G = (3, 2)

b) G = (2, 3)

c) G = (3, 3)

d) G = (2, 2)

e) G = (1, 2)

2) (PM ES – Exatus 2013) Clarence desenhou o triângulo determinado pelas coordenadas dos pontos cartesianos A(7;5), B(3;2) e C(7;2). Ao calcular a área e o perímetro desse triângulo, os valores obtidos foram, respectivamente:

a) 3 e 3

b) 3 e 6

c) 6 e 6

d) 6 e 12

e) 12 e 12

3) (CFO ES – Exatus 2013). Sendo “S” denominada de área do polígono determinado pelas coordenadas cartesianas dos pontos A(5,0), B(2,3), C(1,0) e D(6,5), qual o valor de S?

4) Ache as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$, sendo dados A(0, -10) e B(-4, 8).

5) O ponto M(3, 4) é ponto médio do segmento AB. Calcule as coordenadas de *B*, sabendo que $x_a = y_a = 1$.

6) O ponto *A* pertence ao eixo vertical. Calcule suas coordenadas, sabendo que ele dista 5 unidades de comprimento do ponto B(4, 2).

7) Calcule a distância entre os pontos A(-3, 2) e B(1, -1).

11.2.2. Relatório

Neste dia, 14 de Setembro de 2019, tivemos a oportunidade de ministrar uma aula de 4 horas para os alunos que frequentam o PROMAT, realizado nas dependências da UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, o tema abordado fora abordado o de Geometria Analítica, começando com conceitos iniciais, como plano cartesiano, pontos, distância entre pontos e ponto médio de um segmento.

A aula se iniciou com uma dinâmica com o objetivo de apresentar, para que não havia visto e relembrar para que já o tinha, o conceito de plano cartesiano e pontos no plano. A dinâmica era divida em duas partes, a primeira se dava com o jogo clássico de batalha naval, em que as turmas precisaram se dividir em duplas, a segunda por sua vez era composta por uma atividade no VR – Virtual Reality(Realidade Virtual), que tinha que encontrar pontos no plano cartesiano, disponibilizado no jogo por si só.

Neste momento teve muita interação dos alunos, até por que era um recurso didático diferenciado e tecnológico ainda por cima.

Logo em seguida abordamos o conceito de distância entre pontos no plano, foi pedido aos alunos que identificassem no plano dois pontos que são, A (1, 1) e B(4,5) e pedimos aos docentes a distância entre um ponto e outro. A ideia era que os alunos enxergassem a relação com o Teorema de Pitágoras, o que aconteceu, muitos acharam direto o valor de medida, visualizando a medida da distância entre A e B como sendo a medida da hipotenusa de um triângulo pitagórico (3,4,5).

Por conseguinte, nos valemos dos desenhos já feito no quadro, para apresentar aos alunos o conceito de ponto de médio de um segmento, explicamos a eles por meio de exemplos simples, que o ponto médio é nada mais do que a média aritmética das coordenadas dos dois pontos que determinam o seguimento. Explicamos também de uma maneira um pouco mais formal, por meio do Teorema de Tales, uma abordagem que não constava no plano, um *insight* de um dos discentes, que foi deveras proveitoso para agregar ao conhecimento dos alunos.

Por fim, abordamos o conceito de Baricentro, explicamos a eles que este é mais conhecido por centro de gravidade, que relaciona três segmentos concorrentes se interceptando em um ponto no meio de um triângulo.

12. Plano De Aula Dia 21/09/2019 – Equação Geral E Reduzida Da Reta, Posições Relativas Entre Duas Retas No Plano

6º ENCONTRO

12.1.1. Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

12.1.2. Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

12.1.3. Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos da reta e de suas especifidades.

12.1.4. Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com a reta e suas especificidades, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer as equações geral e reduzida da reta;
- Reconhecer o gráfico de uma reta – ou função linear - e suas especificidades;
- Relacionar a equação da reta com o gráfico da mesma;
- Apresentar/relembrar as posições relativas entre duas retas.

12.1.5. Conteúdo: Geometria analítica.

12.1.6. Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4, folhas com malha quadriculada, GeoGebra,

12.1.7. Encaminhamento metodológico:

12.1.7.1. ETAPA 1 - REVISÃO DE FUNÇÃO LINEAR

Iniciaremos a aula com uma breve revisão sobre funções lineares com a situação problema, que consta como o exercício 1 no material do aluno.

Imagine que você quer ir a um festival de música. A distância de sua casa até o local do festival é de 23 quilômetros. Seu carro está com o câmbio estragado, então, você procura outras alternativas e pesquisa preços. Após alguns minutos procurando, foram três as principais opções a se considerar:

- Ir de táxi. Os taxistas da cidade cobram 3 reais de bandeirada mais um e cinquenta por quilômetro rodado;
- Ir de moto táxi. Os mototaxistas cobram 1 real de bandeirada e mais 1 real por quilômetro rodado;
- Ir de Uber. O aplicativo da Uber mostra que, naquele momento, irá ser cobrado 2 reais de bandeirada mais cinquenta centavos por quilômetro rodado.

Qual a melhor opção para você ir até o festival?

Represente na malha quadriculada as três situações.

12.1.7.2. ETAPA 2 - EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Nesse momento da aula, abordaremos a reta, estudando-a analiticamente e mostrando aos alunos como determinar pontos nessa reta.

Toda reta possui uma equação da forma:

$$a\,x+b\,y+c=0$$

Nessa equação, os coeficientes **a** e **b** não são ambos nulos, ou seja, não acontece $a=0$ e $b=0$. Essa equação é chamada de *equação geral da reta.*

Para saber se um ponto (x_1, y_1) qualquer pertence à reta, devemos fazer a seguinte substituição:

$$a x_1 + b y_1 + c = 0$$

Se, por ventura, após fazer a substituição, o resultado da expressão não for igual a 0, o ponto (x_1, y_1) não pertence à reta.

Casos particulares:

- **Quando *a = 0;***

- **Quando b = 0;**

- **Quando c = 0 (passa pela origem);**

Após essas explicações, pediremos que os alunos resolvam os exercícios 2 e 3 do material do aluno.

12.1.7.3. ETAPA 3- COEFICIENTE ANGULAR OU INCLINAÇÃO

Dada uma reta, diz-se que a *inclinação* dessa reta é dada pela medida do ângulo α que a reta forma com o eixo x.

Explicaremos que a tangente desse ângulo α pode ser chamada de *coeficiente angular da reta,* e também mostraremos o porquê da tangente para determinar o coeficiente angular.

Também apresentaremos uma fórmula para determinar o coeficiente angular, quando não é sabido o ângulo α. Essa fórmula decorre diretamente da tangente do ângulo.

Dados dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ e a reta que passa por esses pontos. Dizemos que o coeficiente angular, ou a tangente do ângulo α, é o resultado da expressão:

$$tg\,\alpha = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Explicaremos a dedução dessa fórmula com desenhos no quadro.

12.1.7.4. ETAPA 4- EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Uma reta pode ser determinada de outra forma que não a apresentada anteriormente, chamada de equação geral de reta.

Dada uma reta qualquer de coeficiente angular *m*, um ponto fixo $A(x_1, y_1)$ sobre essa reta e um ponto móvel $B(x, y)$ qualquer, diferente do ponto A. Pediremos que os alunos tentem obter a *equação reduzida da reta.* A expressão dessa reta terá de ser diferente da equação geral da reta e os alunos devem chegar à seguinte dedução:

Fazendo o cálculo do coeficiente angular:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $x-x_1$:

$$m(x-x_1)=y-y_1$$

Reorganizando essa expressão, temos que a *equação reduzida da reta* é dada por:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Frisaremos para os alunos que essa equação reduzida é útil quando conhecemos o coeficiente angular de uma reta e conhecemos também um ponto pertencente à essa reta.

Depois dessa explicação, daremos um tempo para que os alunos façam os exercícios relativos a esse conceito que constam no material do aluno.

12.1.7.5. ETAPA 5- POSIÇÃO RELATIVA ENTRE DUAS RETAS

A posição relativa entre duas retas se dá diretamente do coeficiente angular de ambas.

Dadas duas retas, r_1 e r_2, e seus respectivos coeficientes angulares, m_1 e m_2, dizemos que as retas são:

- Paralelas se $m_1 = m_2$;

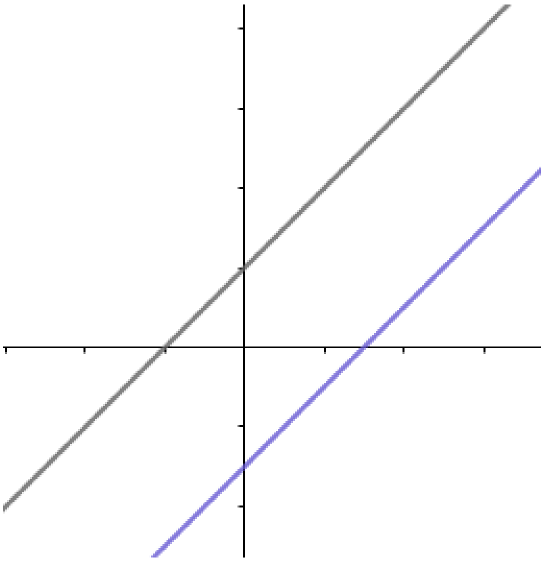


Figura 33: Retas paralelas. Fonte: GeoGebra.

- Coincidentes se $r_1 = r_2$, ou seja, se todos os pontos de r_1 são também pontos de r_2;

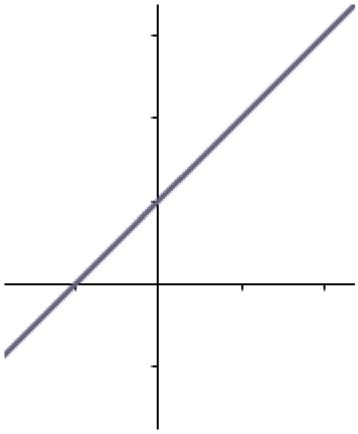


Figura 34: Retas coincidentes. Fonte: GeoGebra

- Concorrentes se $m_1 \neq m_2$;

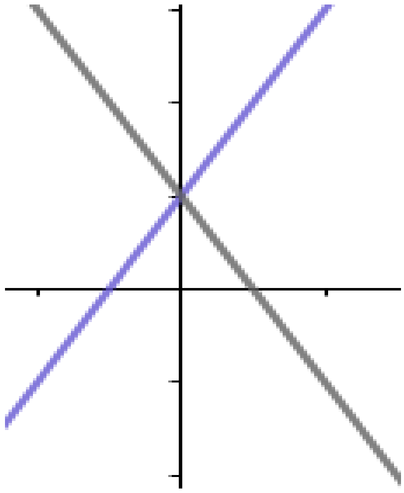


Figura 35: Retas concorrentes. Fonte: GeoGebra

- Perpendiculares se $m_1 \neq m_2$ e $m_1 * m_2 = -1$;

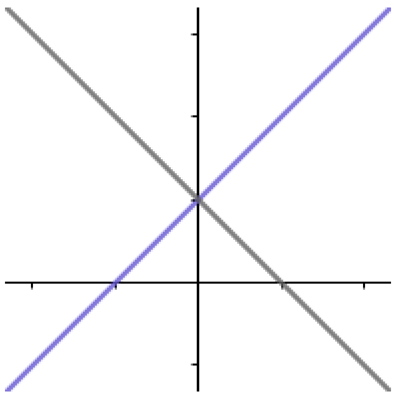


Figura 36: Retas perpendiculares. Fonte: GeoGebra.

Para explicarmos essa parte da aula, utilizaremos um controle deslizante no GeoGebra.

Para o restante da aula, pediremos que os alunos resolvam a sequência do material do aluno.

12.1.7.6. Avaliação: A avaliação se dará pela participação e envolvimento dos alunos no decorrer da aula.

12.2. ANEXO

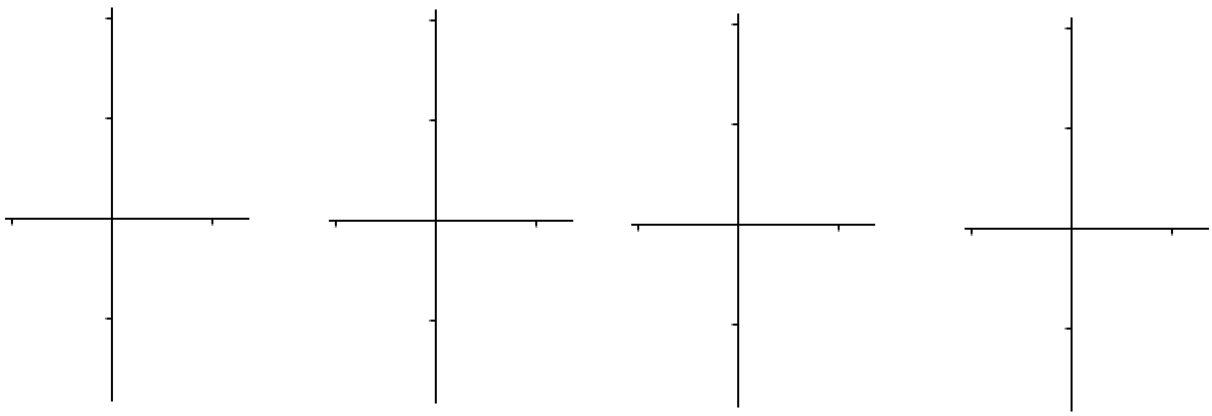
12.2.1. MATERIAL DO ALUNO

EQUAÇÃO GERAL DA RETA: ax + by + c = 0

COEFICIENTE LINEAR OU INCLINAÇÃO DA RETA (m): m = tgα ou m = $\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$

EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA: $y - y_1 = m(x - x_1)$

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS:



1- Imagine que você quer ir a um festival de música. A distância de sua casa até o local do festival é de 23 quilômetros. Seu carro está com o câmbio estragado, então, você procura outras alternativas e pesquisa preços. Após alguns minutos procurando, foram três as principais opções a se considerar:

- Ir de táxi. Os taxistas da cidade cobram 3 reais de bandeirada mais um e cinquenta por quilômetro rodado;
- Ir de moto táxi. Os mototaxistas cobram 1 real de bandeirada e mais 1 real por quilômetro rodado;
- Ir de Uber. O aplicativo da Uber mostra que, naquele momento, irá ser cobrado 2 reais de bandeirada mais cinquenta centavos por quilômetro rodado.

  Qual a melhor opção para você ir até o festival?

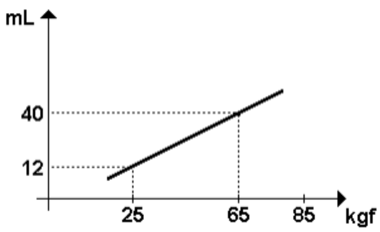
Represente na malha quadriculada as três situações.

2- Verifique se cada ponto abaixo pertence à reta *s,* cuja equação é x – y + 2 = 0.

a) A(2, 3)		b) B(1, 3)

3- Construa, na malha quadriculada, o gráfico da reta x + 2y = 0.

4- (Ufrn) Na figura a seguir, tem-se o gráfico de uma reta que representa a quantidade, medida em mL, de um medicamento que uma pessoa deve tomar em função de seu peso, dado em kgf, para tratamento de determinada infecção. O medicamento deverá ser aplicado em seis doses. Quantos mL uma pessoa que pesa 85kgf receberá em cada dose?



5- (UFSC 2011) A reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento *AB* com *A*=(*0,3*) e *B*=(*5,0*) tem qual coeficiente angular?

6- (UFRGS 2017) As retas de equações y = ax e y = –x + b interceptam-se em um único ponto cujas coordenadas são estritamente negativas. Então, pode-se afirmar que:

a) a>0 e b>0		b) a<0 e b<0		c) a<-1 e b>0		d) a>0 e b<0

e) a<-1 e b<0

7- (Unitau) A equação da reta que passa pelos pontos (3,3) e (6,6) é:

8- Qual é a posição da reta r, de equação 15x + 10y - 3 = 0, em relação à reta s, de equação 9x + 6y - 1 = 0?

9- As retas r e s, de equações px + 8y +1 = 0 e 2x + py – 1 = 0, respectivamente, são paralelas. Nestas condições, calcule o valor de p.

12.2.2. Relatório

Neste dia, 21 de Setembro de 2019, tivemos a oportunidade de ministrar novamente aulas para os alunos do PROMAT, realizado nas dependências da UNIOESTE. No dia em questão começamos com o conteúdo de Geometria Analítica, nosso objetivo específico com a aula era que eles se apropriassem dos conceitos de retas no plano cartesiano, equação reduzida de uma reta, relação existente entre sua equação e seu gráfico bem como as posições relativas entre retas.

Para isto, pensamos em uma introdução um pouco mais informal, uma revisão do que era uma função linear, aqui abordando o conceito de função mas com o enfoque na representação gráfica e sua lei de formação. Vale ressaltar que o material utilizado nesta aula foi pensado e desenvolvido graças ao PIBID – Programa Institucional com Bolsa de Iniciação a Docência no ano de 2017 pelo acadêmico João Alfredo.

Para esta breve revisão nos valemos dos recursos disponibilizados pelo software Geogebra e de uma situação problema que tinha a ver com gastos recorrentes no transporte e para comparar qual meio de transporte era mais barato era necessário comparar os coeficientes angulares das retas.

Com esta situação seguramos a atenção dos alunos por um momento de 20 a 30 minutos, o que não era tão difícil já que nossa turma era bem tranquila, quase apática. Ao fim, para terminarem de resolver tinham que pensar nos gráficos das retas que representavam cada meio de transporte, para sanar tal dificuldade resolvemos a situação no quadro, mostrando os gráficos no Geogra e as contas no quadro.

Logo em seguida, sanadas as dúvidas sobre a representação gráfica de uma reta, abordamos sobre a equação geral de uma reta, neste momento explicamos de uma maneira mais canônica e linear, após explicado o que cada coeficiente de uma reta fazia, não houve dúvidas, corroboramos com alguns exemplos, cada um abordando uma reta sem um coeficiente, para ficar evidente o que cada um faz.

Por conseguinte, se fez propício para nos explicarmos as posições relativas entre duas retas, uma parte um pouco mais técnica que possibilita fazer alusões a operações de conjuntos, explicamos os três casos e casos especiais de alguns, como por exemplo, o fato de duas retas serem perpendiculares não excluir o fato de serem concorrentes.

Neste momento das posições entre retas, foi bem enxuto, tanto que aproveitamos o gatilho para falarmos sobre o ângulo que uma reta fazia com o eixo das abcissas, ou seja do coeficiente angular. Esta parte em específico foi bem interessante, pois nos valemos da etapa que explicamos a equação geral de uma reta em conjunto com conteúdos de encontros passados, o de trigonometria, pois explicamos a eles que o coeficiente angular nada mais era que a tangente do ângulo que reta faz com o eixo das abcissas.

Por fim mas não menos importante, abordamos a equação reduzida de uma reta, nesta etapa, dúvidas restantes, concernentes a equação geral de uma reta, foram sanadas, pois a associação ficava clara. O resto do tempo aproveitamos para os exercícios planejados para esta aula, que não houve dificuldades em interpretações, nem na parte algébrica, mas sim nas representações gráficas, muitos dos exercícios foram resolvidos no quadro para eliminar tais dúvidas.

13. Plano De Aula Dia 28/09/2019 – Equação Geral E Reduzida Da Circunferência, Posições Relativas Envolvendo Ponto, Circunferência E Reta

7º ENCONTRO

13.1.1. Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

13.1.2. Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

13.1.3. Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de equação da circunferência e posições relativas.

13.1.4. Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Trabalhar com as equações de circunferência, geral e reduzida;
- Analisar as posições relativas de ponto, reta e circunferência.
- Retomar algumas propriedades da equação de segundo grau;
- Retomar conceitos do plano cartesiano.

13.1.5. Conteúdo: Geometria Analítica**.**

13.1.6. Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

13.1.7. Encaminhamento metodológico:

13.1.7.1. ETAPA 1

Perguntaremos aos alunos se ficou alguma dúvida da matéria anterior e de sua lista. Caso tenha ficado, o exercício será feito no início da aula.

13.1.7.2. ETAPA 2

Nesta etapa pretende-se trabalhar com a equação reduzida da circunferência e a sua equação normal. Também será abordado a diferença entre círculo e circunferência, lembrando dos aspectos de corda, raio e diâmetro com alunos.

Equação reduzida da circunferência: Consideremos uma circunferência de centro C(a, b) e raio de medida R.

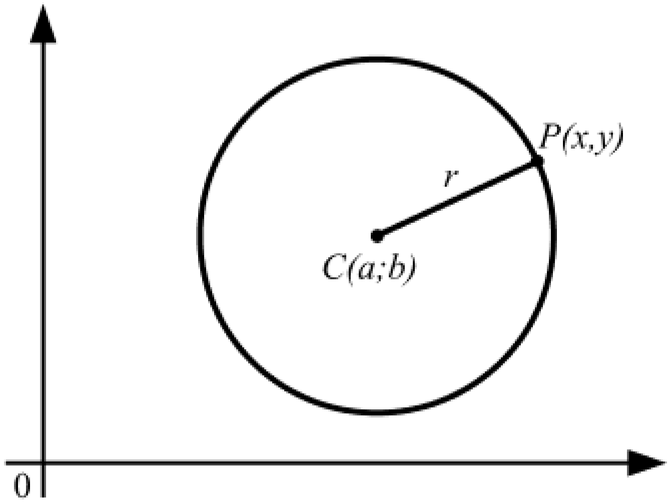


Figura 37: Expressão da circunferência.

Fonte: https://matematicabasica.net/circunferencia/

Seja P(x, y) um ponto genérico da circunferência. Como à distância de *P* a *C* é *R*, podemos escrever:

$$R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Se ambos os membros forem elevados ao quadrado, obtemos:

$$R^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

A qual é chamada de equação reduzida da circunferência.

Se o quadrado da fórmula anterior for desenvolvido, temos que:

$$R^2=x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2$$
$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$

A qual é chamada de equação normal ou geral de uma circunferência. Ela nos mostra que toda circunferência pode ter sua equação escrita na forma:

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$, em que $-2a=A,\ -2b=B,\ a^2+b^2-R^2=C$.

Exemplo 1: O ponto C(3, -2) é o centro de uma circunferência e seu raio mede 4. Escreva sua equação reduzida e normal.

Desenvolvendo: Temos o que $a=3$ e $b=-2$, aplicando na fórmula, temos que a for reduzida é

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=4 \text{ ou } (x-3)^2+(y+2)^2=16 \ .$$

Já na forma de sua equação normal, temos

$$4^2 = x^2 - 2*3x + 3^2 + y^2 - 2*(-2)\,y + (-2)^2$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 + 4 - 16 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

Método do complemento: Aqui será exposto para os alunos que quando se tem a equação geral da circunferência, podemos utilizar o método de completar quadrados, ou seja, obtermos $(x-a)^2$ e $(x-b)^2$, a fim de que se tenha apenas o raio no final dos cálculos. Como por exemplo a equação $x^2+y^2+4x-2y-4=0$, onde queremos obter o centro e a medida do raio. Desenvolvendo o método:

$$x^2+y^2+4x-2y-4=0$$
$$(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)-4-4-1=0$$

No segundo passo foi feito o completamento para *x* e *y*, também subtraído o que acabou sendo somado na equação, para que assim ela não se modifique. Assim, obtemos que:

$$(x+2)^2+(y-1)^2-9=0$$
$$(x+2)^2+(y-1)^2=9$$
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{9}$$
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=3$$

Disso temos que o raio é igual à 3 e seu centro é dado por C(-2, 1). Após as explicações, pediremos para que os alunos resolvam os exercícios 1 e 2 o material do aluno.

13.1.7.3. ETAPA 3

Nesta etapa será abordado o tópico de posições relativas entre ponto e circunferência no plano cartesiano.

Consideremos uma circunferência de centro C(a, b) e raio de medida *R*, e um ponto P(x_p , y_p) do plano cartesiano. Três situações podem ocorrer:

1. P pertence a circunferência. Neste caso temos $d_{pc} = R$ ou $(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 = R^2$ e, daí:

$$(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 - R^2 = 0$$

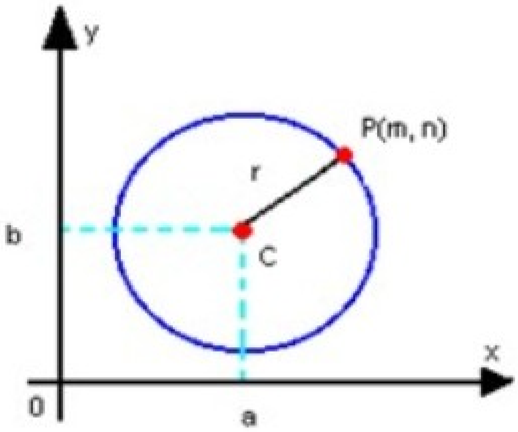


Figura 38: P pertence a circunferência.

Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/5634259/

2. P pertence à região exterior a circunferência. Neste caso temos $d_{pc} > 0$ ou $(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 > R^2$ e, daí:

$$(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 - R^2 > 0$$

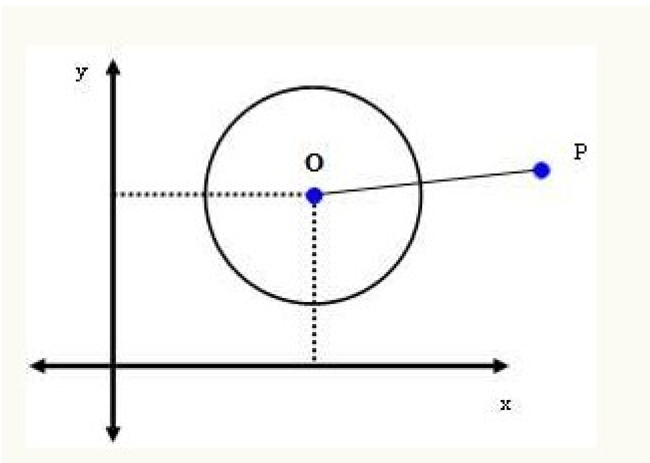


Figura 39: P não pertence a circunferência.

Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/posicao-um-ponto-relacao-uma-circunferencia.html

3. P pertence à região interior à circunferência. Neste caso temos $d_{pc} < 0$ ou $(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 < R^2$ e, daí:

$$(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 - R^2 < 0$$

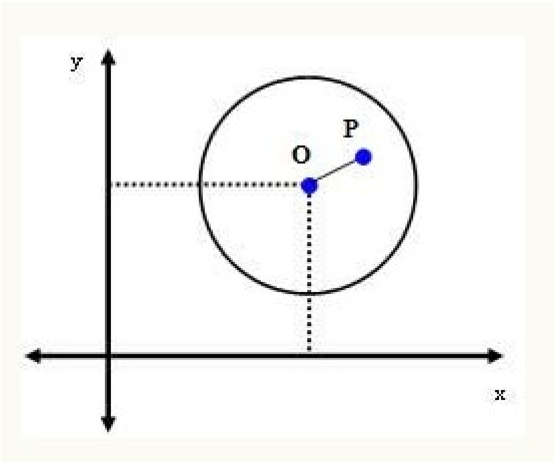


Figura 40: P pertence à região interna.

Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/posicao-um-ponto-relacao-uma-circunferencia.html

Com as três possíveis situações, faremos um exemplo com alunos para fixação e posteriormente pediremos para que resolvam os exercícios do material do aluno.

Exemplo: Descubra qual a posição do ponto P(2, 5) em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 10x + 2y - 23 = 0$.

Temos que os pontos são dados por, $x = 2$ e $y = 5$. Assim, substituindo os valores do ponto,

$$2^2 + 10 * 2 + 5^2 + 2 * 5 + 1 - 23 = 36$$
$$36 > 0$$

Logo o ponto não pertence a região da circunferência.

13.1.7.4. ETAPA 4

Nesta etapa será abordado o tópico de posições relativas entre reta e circunferência no plano cartesiano.

Consideremos uma circunferência λ de centro C(a, b) e raio de medida *R*, e uma reta *r* de equação $Ax + By + C = 0$. Três situações podem ocorrer:

1. Não existe ponto com de *r* e λ *.* Neste caso dizemos que *r* e λ são *disjuntas.* Simbolicamente: $r \cap \lambda = \emptyset$. Note que $d_{Cp} > R$.

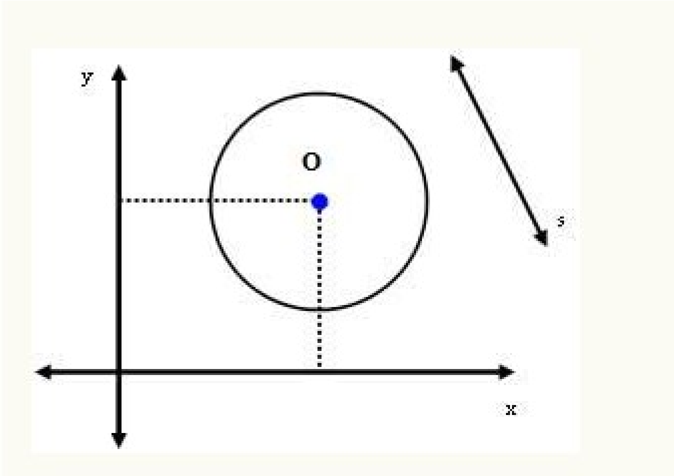


Figura 41: Reta externa a circunferência. Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/posicao-relativa-entre-uma-reta-uma-circunferencia.html

2. Existe um único ponto comum a *r* e λ . Neste caso dizemos que *r* e λ são *tangentes entre si.* Simbolicamente: $r \cap \lambda = T$. Note que $d_{Cr} = R$. Quando uma reta é tangente a uma circunferência, ela é perpendicular ai raio no ponto de tangência.

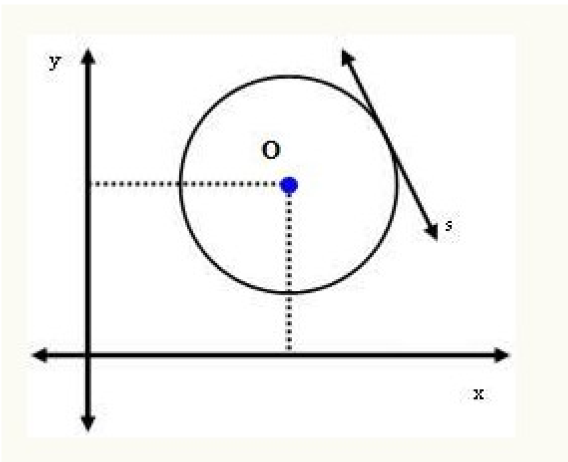


Figura 42: Reta tangente a circunferência. Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/posicao-relativa-entre-uma-reta-uma-circunferencia.html

3. Existem dois pontos em comum a *r* e λ . Neste caso dizemos que *r* e λ são *secantes* entre si. Simbolicamente: $r \cap \lambda = \{S_{1,} S_2\}$. Note que $d_{Cr} < R$.

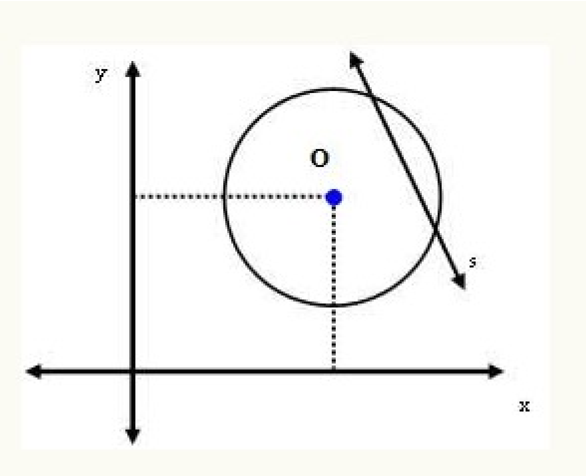


Figura 43: Reta secante a circunferência. Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/posicao-relativa-entre-uma-reta-uma-circunferencia.html

Os pontos de intersecção de *r* com λ , quando existem, são as soluções só sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \end{cases}$$

Assim, quando se chegar na equação de 2º grau e, por meio de seu discriminante Δ , podemos saber qual a posição relativa:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \exists \ 2 \ raízes \ distintas \Leftrightarrow r \ é \ secante \ a \ \lambda$$
$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \exists \ 1 \ raiz \ dupla \Leftrightarrow r \ é \ tangente \ a \ \lambda$$
$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \nexists \ raízes \Leftrightarrow r \ é \ exterior \ a \ \lambda$$

Exemplo: Verifique qual a posição relativa entre a reta *r* de equação $x-y-4=0$ e a circunferência λ de equação $x^2+y^2-16=0$. Caso haja algum ponto de intersecção entre *r* e λ , diga quais as suas coordenadas.

Resolução: Primeiramente será feito a análise da distância do centro ao ponto, para ver sua relação com o raio. Como a circunferência tem C(0, 0) e raio de medida 4, temos que

$$d_{Cr} = \frac{|x-y-R|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow d_{Cr} < R$$

Disto, vê-se que a distância é menor que o raio. Portanto temos uma reta secante a circunferência. Agora por meio do sistema, precisamos encontrar as coordenadas de intersecção, dada por

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

Isolando na primeira equação o termo y, temos $x = y + 4$. Substituindo na segunda,

$$(y + 4)^2 + y^2 - 16 = 0 \Rightarrow y^2 + 8y + 16 + y^2 - 16 = 0 \Rightarrow y^2 + 4y = 0$$

o que nos fornece $y = 4$ ou $y = -4$. Voltando para a primeira equação, temos que se $y = 0 \Rightarrow x = 4$ e se $y = -4 \Rightarrow x = 0$.

Portanto, os pontos de intersecção são (4, 0) e (0, -4).

13.1.8. Avaliação: A avaliação será feita dos exercícios e dúvidas em sala de aula será feita de acordo com a participação dos alunos que estarão em grupos.

13.2. ANEXO

13.2.1. MATERIAL DO ALUNO

1) Escreva a equação reduzida e a equação geral da circunferência de centro C e raio de medida R, dados abaixo:

a) C(0, 3) e R = 1

b) C(-4, 0) e R = 2

2) (Ufsm 2008) A massa utilizada para fazer pastéis folheados, depois de esticada, é recortada em círculos (discos) de igual tamanho. Sabendo que a equação matemática da circunferência que limita o círculo é $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0$ e adotando π = 3,14, o diâmetro de cada disco e a área da massa utilizada para confeccionar cada pastel são, respectivamente,

a) 7 e 113,04

b) 7 e 153,86

c) 12 e 113,04

d) 14 e 113,04

e) 14 e 153,86

3) (Fgv 2010) Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$, seja P seu ponto de ordenada máxima. A soma das coordenadas de P e:

a) 10

b) 10,5

c) 11

d) 11,5

e) 1

4) Dada uma circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$, verifique a posição relativa do ponto P(9, 7) em relação à circunferência dada.

5) Verifique qual a posição dos pontos P(0, 0); Q(1, -4); R(-2, -5) em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 13 = 0$.

6) Sabe-se que o ponto P(-4, k) pertence à circunferência de equação $x^2+y^2+4x-6y-3=0$. Calcule os possíveis valores de *k*.

7) Dada a reta s representada pela equação $2x - y + 1 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x = 0$, determine a posição relativa entre elas.

8) Escreva a equação da circunferência λ cujo centro é C(1, 3) e que seja tangente à reta *r* de equação $4x+3y-38=0$.

9) Em uma convenção de matemáticos, existe um roteador de internet que dá acesso ao wi-fi no local. Mas o seu alcance é dado pela equação $x^2+y^2+6x-4y-12=0$. Nesta convenção, estão os professores Guilherme, João, Matheus, Rafael e Willy, sendo que cada um se encontra, respectivamente, nas posições G(1, 1); J(2, 3); M(3, 0); R(1, 5) e W(0, 6). Sabendo que o sinal de internet pega somente até a borda da circunferência, qual(is) do(s) professor(es) não está conectado ao wi-fi?

13.2.2. Relatório

No sábado, dia 28 de setembro de 2019, realizamos o sétimo encontro do Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE. No dia em questão, foram desenvolvidas retomados conceitos das aulas passadas e feito uma nova abordagem do conteúdo de geometria analítica.

Inicialmente perguntamos aos alunos se alguma dúvida havia permanecido da aula passada. Posteriormente foi feito uma dinâmica com alunos que envolvia barbantes e a circunferência, assunto da aula, com ele os alunos deveriam marcar vários pontos no formato da circunferência, vende assim que ela é composta por infinitos pontos. Com isso, o conceito de equação reduzida e equação foram apresentadas para os alunos.

Durante o processo, os alunos tiveram dificuldade em visualizar a soma/diferença de um quadrado notável, $(x-3)^2$ por exemplo. Sempre este termo aparecia nas contas, era feito sua multiplicação separada, $(x-3)(x-3)$, assim os alunos conseguiam utilizar a distributiva e resolver os exercícios do material do aluno.

Em seguida o completamento de quadrado foi abordado, para que os alunos tivessem uma visualização se o enunciado pedisse para expressar a forma geral na reduzida. No completamento de quadrado, os alunos não demonstraram tantas dúvidas, pois notaram que era necessário remover ou adicionar no termo em que o número era elevado ao quadrado.

Nos dois últimos assuntos da aula, os alunos tiveram uma certa dificuldade em notar a desigualdade que se dava com os pontos e retas, pois tinham a intuição de que a notação de desigualdade deveria ser diferente maior caso o ponto estivesse no interior da circunferência, e menor caso o ponto estivesse no exterior dela. Mas após apresentar os exemplos aos alunos, eles tiveram suas dúvidas sanadas.

14. MÓDULO 4 - PROBABILIDADE

14.1. Plano De Aula Dia 05/10/2019 – Probabilidade

8º ENCONTRO

14.1.1. Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

14.1.2. Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

14.1.3. Objetivo Geral:

Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de Probabilidade.

14.1.4. Objetivos Específicos: Ao se trabalhar Probabilidade, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar experimentos aleatórios e experimentos determinísticos.
- Obter o conjunto que representa o espaço amostral de um experimento aleatório.
- Obter os subconjuntos do espeço amostral, que se denominam eventos.
- Conceituar probabilidade como uma medida de tendência.
- Entender que a probabilidade de ocorrer um evento, e entender que a mesma pode variar de 0% a 100% (isto é, de 0 a 1).
- Identificar eventos independentes, e calcular a probabilidade de os mesmos ocorrerem.

14.1.5. Conteúdo: Probabilidade.

14.1.6. Recursos Didáticos: quadro, giz, folhas A4 e copos com moedas e dados.

14.1.7. Encaminhamento metodológico:

14.1.7.1. ETAPA 1

Será proposto aos alunos o jogo descrito a seguir.

Inicialmente serão distribuídos um dado e uma moeda comuns, um copo, uma pequena bandeja de isopor (para apoiar o copo) e uma folha de papel (para anotar os resultados) para cada dupla de alunos, e então serão explicadas as regras. Para decidir quem inicia o jogo, a dupla deve disputar um par ou ímpar. Quem iniciar também deve escolher ou cara ou coroa e manter essa escolha nas rodadas seguintes do jogo. A primeira rodada do jogo se inicia com um jogador revelando na bandeja as faces voltadas para cima do dado e da moeda, depois de agitá-los no copo. Se o primeiro jogador não acertar a face da moeda, como por exemplo, se escolher a face **cara**, mas o resultado for **coroa**, não obterá ponto, independentemente do resultado do **dado** e então passa-se a vez para seu oponente. Mas se o jogador obtiver a face correta da moeda, a sua pontuação será o valor obtido no dado, mas ainda poderá reservar a moeda e lançar o dado mais uma vez, se desejar, para tentar maior pontuação, nesse caso valendo apenas os pontos do lançamento bônus, e então será a vez de seu oponente jogar.

Vence a rodada quem obtiver a maior pontuação, podendo haver empate. O procedimento todo é repetido em uma nova rodada. Deve-se sempre alternar o jogador que inicia as próximas rodadas, para ter uma disputa equilibrada, isto é, quem terminar a primeira rodada iniciará a segunda, e assim sucessivamente. Vence o jogo quem obtiver mais rodadas vitoriosas, porém poderá haver empate. Se houver um número ímpar de alunos, poderá formar-se um trio.

Cada dupla realizará 20 rodadas (totalizando então 40 resultados individuais), e anotará os resultados.

14.1.7.2. ETAPA 2

Após finalizarem o jogo, os alunos responderão algumas questões subjetivas (problemas) sobre mesmo que servirão de motivação para iniciar o estudo sobre probabilidade, sem calculá-la propriamente. Estas respostas serão discutidas e confrontadas com os resultados anotados. Os problemas serão os seguintes:

Problema 1: Considerando-se apenas o primeiro lançamento, um jogador terá maior chance em conseguir: a) 1 ponto ou 6 pontos? b) 1 ponto ou zero ponto?

Problema 2: a) Nos 40 lançamentos (de ambos os jogadores), quantas vezes você esperava aparecer pontuação zero? b) Quantas vezes isso ocorreu no jogo?

Problema 3: a) Quando se obtém ponto no primeiro lançamento é sempre vantajoso efetuar o lançamento bônus? Por quê? b)Agora considere que um jogador obteve 3 pontos no primeiro lançamento, quais são suas chances em melhorar, piorar ou manter inalterada sua pontuação se utilizar o segundo lançamento?

Problema 4: É mais vantajoso ser o jogador que inicia ou que termina uma rodada? Por quê?

Respostas esperadas: 1) a) a chance é a mesma. b) maior chance de zerar.

2)Espera-se 20 como resposta dos alunos, pois depende apenas da moeda (isto é, 50% de 40).

3) Não é vantajoso quando correr muito risco de reduzir a pontuação e o adversário ainda não jogou. O aluno também poderá dizer se perdeu pontos alguma vez ao fazer isso. Para 3 pontos: 4 em 6, 2 em 6 e 1 em 6, chances de melhorar, piorar e não alterar, respectivamente.

4) É mais vantajoso terminar a rodada pois poderá avaliar a primeira pontuação do adversário, caso tenha direito ao lançamento bônus.

14.1.7.3. ETAPA 3

Apresentar algumas algumas definições relacionadas com probabilidade, que estarão presentes no material do aluno:

Experimento Aleatório: É todo experimento que produz resultados imprevisíveis, dentre os possíveis, mesmo quando repetido em semelhantes condições.

Espaço Amostral: É o conjunto de todos os resultados possíveis de um determinado experimento aleatório. Indicaremos por S.

Evento: É todo subconjunto do espaço amostral relacionado a um experimento aleatório.

Espaço Amostral Equiprovável: é todo espaço amostral cujos elementos têm a mesma chance de ocorrer.

Denomina-se probabilidade do evento A, o número P(A) tal que: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

, em que n(A) e n(S) indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de S.

Voltar no caso do Problema 3b) do início da aula, onde se obteve 3 pontos, e explicar quais as probabilidades de melhorar de pontuação (3/6), de manter a pontuação (1/6), e de piorar a pontuação (2/6)

14.1.7.4. ETAPA 4

Resolver o exemplo a seguir para posteriormente definir **Probabilidade da União de Eventos.** Para obter os dados do problema os alunos serão consultados onde responderão quais os esportes preferidos por eles, podendo escolher dois, ou um ou nenhum esporte. Os esportes opcionais serão Futebol e Basquete.

Exemplo: Estudantes do PROMAT das 4 salas, na Unioeste, presentes no dia 26 de outubro de 2019, num total de ___ alunos, tem as seguintes preferências em relação as modalidades esportivas (cada aluno poderia escolher dois, ou um ou nenhum dos esportes, que são futebol e basquete):

Esportes	Futebol:	Basquete:	Futebol e Basquete:	Nem Futebol nem Basquete:
Número de Alunos:				

Tabela 12: Tabela para atividade.

Escolhido ao acaso um estudante da turma, qual a probabilidade de:

a) ele preferir Futebol ?

b) ele preferir Basquete ?

c) ele não preferir o Futebol ?

d) ele não preferir o Basquete ?

e) ele preferir o Futebol e Basquete ?

f) ele preferir o Futebol ou Basquete ?

g) ele não preferir Futebol nem Basquete ?

Após as explicações, propor aos alunos a resolução dos Exercícios 1 a 5 (material do aluno).

14.1.7.5. ETAPA 6

Apresentar a probabilidade da união e intersecção de eventos (regra do “ou” e do “e”):

Probabilidade da União de Eventos: Se A e B são dois eventos do mesmo espaço amostral S, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se $A \cap B = \emptyset$, teremos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Multiplicação de Probabilidades: Se um acontecimento é composto por dois eventos sucessivos e independentes, A e B, a probabilidade de ocorrência de A e B, é igual ao produto das probabilidades de cada evento:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Resolver o exemplo a seguir, para concluir que a probabilidade envolvida na retirada simultânea de objetos é igual a probabilidade em caso de retirada sucessiva sem reposição, sendo o uso desta última mais recomendado.

Exemplo: Uma urna contém exatamente nove bolas: cinco azuis e quatro vermelhas.

a) Retirando simultaneamente três bolas da urna, qual a probabilidade de obtermos duas bolas azuis e uma vermelha?

b) Retirando-se sucessivamente, com reposição, três bolas da urna, qual a probabilidade de obtermos duas bolas azuis e uma vermelha?

c) Retirando-se sucessivamente, sem reposição, três bolas da urna, qual a probabilidade de obtermos duas bolas azuis e uma vermelha?

Propor aos alunos a resolução dos Exercícios (6 a 8), presentes no material do aluno.

14.1.8. Avaliação: A avaliação da aprendizagem se dará por meio da observação das resoluções desenvolvidas nos cadernos dos alunos de exercícios a serem corrigidos no quadro com a participação dos mesmos, inclusive a interação por meio da oralidade durante a aula toda.

14.2. ANEXO

14.2.1. MATERIAL DO ALUNO

Responda as perguntas após o jogo:

1- Considerando-se apenas o primeiro lançamento, um jogador terá maior chance em conseguir: a) 1 ponto ou 6 pontos? b) 1 ponto ou zero ponto?

2- a) Nos 40 lançamentos (de ambos os jogadores), quantas vezes você esperava aparecer pontuação zero? b) Quantas vezes isso ocorreu no jogo?

3- a) Quando se obtém ponto no primeiro lançamento é sempre vantajoso efetuar o lançamento bônus? Por quê? b)Agora considere que um jogador obteve 3 pontos no primeiro lançamento, quais são suas chances em melhorar, piorar ou manter inalterada sua pontuação se utilizar o segundo lançamento?

4- É mais vantajoso ser o jogador que inicia ou que termina uma rodada? Por quê?

Experimento Aleatório: É todo experimento que produz resultados imprevisíveis, dentre os possíveis, mesmo quando repetido em semelhantes condições.

Espaço Amostral: É o conjunto de todos os resultados possíveis de um determinado experimento aleatório. Indicaremos por S.

Evento: É todo subconjunto do espaço amostral relacionado a um experimento aleatório.

Espaço Amostral Equiprovável: é todo espaço amostral cujos elementos têm a mesma chance de ocorrer. Exemplos: o espaço amostral do lançamento de um dado honesto é equiprovável, e o de uma moeda honesta também.

Probabilidade da União de Eventos: Se A e B são dois eventos do mesmo espaço amostral S, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se $A \cap B = \emptyset$, teremos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Multiplicação de Probabilidades: Se um acontecimento é composto por dois eventos sucessivos e independentes, A e B, a probabilidade de ocorrência de A **e** B, é igual ao produto das probabilidades de cada evento: $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

MOEDA	DADO	MOEDA	DADO

1- Qual o valor mais provável da soma dos números obtidos ao se lançar dois dados honestos?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10 *R:b*

2- Qual é a probabilidade de, selecionado ao acaso, um anagrama da palavra OBA, iniciar-se por consoante?

a) 1/3 b) 1/6 c) 2/3 d) 5/8 e) ½ *R:a*

3- (Unioeste) Uma universidade irá participar dos Jogos Olímpicos Universitários com 140 acadêmicos distintos dos seguintes cursos: 80 de Matemática, 40 de Engenharia Elétrica e 20 de Ciência da Computação. Sorteando-se um acadêmico ao acaso, para representar a Universidade na Solenidade de Abertura destes jogos, qual a probabilidade de que ele pertença ao curso de Matemática ou de Engenharia Elétrica?

(a) 4/7 (b) 3/7 (c) 8/7 (d) 6/7 (e) 5/7 *R:d*

4- Em uma bandeja há dez pastéis dos quais três são de carne, três de queijo e quatro de camarão. Se Fabiana retirar, aleatoriamente e sem reposição, dois pastéis desta bandeja, a probabilidade de os dois pastéis retirados serem de camarão é:
a) 3/25 b) 4/25 c) 2/15 d) 4/10 e) 4/5
R:c

5- As probabilidades de três jogadores marcarem um gol cobrando um pênalti são, respectivamente, 1/2 , 2/5 e 5/6. Se cada um bater um único pênalti, a probabilidade de todos errarem é igual a:
a) 3% b) 5% c) 17% d) 20% e) 25% *R:b*

6- (PUC-RIO) Quatro moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de ocorrer coroa em uma só moeda?
a) 1/8 b) 2/9 c) 1/4 d) 1/3 e) 3/8

7- (UFF) Gilbert e Hatcher, em Mathematics Beyond the Number, relativamente à população mundial, informam que: 43% tem sangue tipo O, 85% tem Rh positivo e 37% tem sangue tipo O com Rh positivo. Nesse caso, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter sangue tipo O e não ter Rh positivo é de:
a) 9% b) 15% c) 37% d) 63% e) 91% *R:a*

8- (ENEM-2013) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.
Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.
Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?
a) 1/2 b) 5/8 c) 1/4 d) 5/6 e) 5/14 *R:a*

9- Um estudante caminha diariamente de casa para o colégio, onde não é permitido ingressar após as 7h30. No trajeto ele é obrigado a cruzar três ruas. Em cada rua , a travessia de pedestres é controlada por sinais de trânsito não sincronizados. A probabilidade de cada sinal estar aberto para o pedestre é igual a 2/3 e a probabilidade de estar fechado é igual a 1/3.

Cada sinal aberto não atrasa o estudante, porém cada sinal fechado o retém por 1 minuto. O estudante caminha sempre com a mesma velocidade. Quando os três sinais estão abertos, o estudante gasta exatamente 20 minutos para fazer o trajeto.

Em um certo dia, o estudante saiu de casa às 7h09. A probabilidade de o estudante, nesse dia, chegar atrasado ao colégio, ou seja, chegar após às 7h30 é:

a) 4/27 b) 5/27 c) 6/27 d) 7/27 e) 8/27

R:d

10- (UNESP) Em um colégio foi realizada uma pesquisa sobre as atividades extracurriculares de seus alunos. Dos 500 alunos entrevistados, 240 praticavam um tipo de esporte, 180 frequentavam um curso de idiomas e 120 realizavam estas duas atividades, ou seja, praticavam um tipo de esporte e frequentavam um curso de idiomas. Se, nesse grupo de 500 estudantes um é escolhido ao acaso, a probabilidade de que ele realize pelo menos uma dessas duas atividades, isto é, pratique um tipo de esporte ou frequente um curso de idiomas, é:

a) 18/25. b) 3/5. c) 12/25. d) 6/25. e) 2/5. R:b

14.2.2. Relatório

No sábado, dia 05 de setembro, realizamos o sétimo encontro do Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE. No dia em questão, foi dado início ao último módulo, que tratava de Análise Combinatória.

Inicialmente perguntamos aos alunos se alguma dúvida havia permanecido da aula passada. Posteriormente foi feito uma dinâmica com alunos que envolvia o lançamento de moedas e as probabilidades que se tinha ao jogar ela. Com a dinâmica, os alunos foram notando os momentos vantajosos e os não vantajosos, no caso de repetir a jogada do dado. A maioria dos alunos conseguiu notar que as chances eram de $\frac{1}{6}$ de conseguir um número no dado e que ela poderia piorar, caso quisessem aumentar a pontuação.

Após a dinâmica, explicamos aos alunos o que era significava cada espaço dentro da probabilidade, sempre se remetendo a dinâmica passada anteriormente. Para abranger os espaços, foi feita uma pesquisa com todos alunos do Promat, tendo como pergunta os esportes que mais gostavam. Para abordar este tema na sala de aula, foi feito de forma separa da primeiramente, ou seja, sem a utilização de diagramas, posteriormente adotamos o diagrama para que os alunos tivessem uma melhor visualização do que acontecia nas intersecções dos conjuntos.

15. Plano De Aula Dia 19/10/2019 – Princípio Fundamental Da Contagem

9º ENCONTRO

15.1.1. Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

15.1.2. Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

15.1.3. Objetivo Geral: Promover, aos alunos, a apropriação dos conceitos de princípio fundamenta da contagem.

15.1.4. Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com análise combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Apresentar o conceito de contagem;
- Explanar as restrições de combinações;
- Promover a apropriação do PFC;
- Definir e Apresentar as propriedades de fatorial;
- Resolver problemas e exercícios que envolvem combinação.

15.1.5. Conteúdo: Análise Combinatória.

15.1.6. Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

15.1.7. Encaminhamento metodológico:

15.1.7.1. ETAPA 1

Perguntaremos aos alunos se ficou alguma dúvida da matéria anterior e de sua lista, bem como o desafio deixado na aula passada, sobre a divisão por zero.

15.1.7.2. ETAPA 2

Primeiramente será feito uma abordagem do que é o princípio fundamental da contagem, indagaremos os alunos com a seguinte pergunta, "Quantos números de três algarismos diferentes existem? E de algarismos iguais?" Deixaremos um curto período de tempo para que pensem e em seguida responderemos a eles com uma explicação ao quadro. Esta explicação envolverá o uso do Princípio Fundamental da Contagem, bem como sua formalização.

Caso seja possível repetir o evento mais de uma vez, temos que seu produto é dado por $n \times n \times n \times ... \times n$. Caso contrário será feito uma restrição para que não haja repetição ou situações impossíveis, o qual será feito através da regra do produto de forma $(n_1) \times (n_2) \times (n_3) \times ... (n_m)$.

15.1.7.3. ETAPA 3

Explicaremos a ele, que esta definição se aplica quando se quer saber a ocorrência de um determinado evento, no caso do exemplo anterior a ocorrência de números com algarismos diferentes e depois iguais.

Posteriormente será feito uma um exemplo com alunos da construção da árvore de possibilidades, envolvendo dois conjuntos diferentes. Tal exemplo será ilustrado pela forma da retirada de bolas de uma urna, sendo cada uma com cor diferente em que estará disposta com 3 bolas vermelhas e 3 bolas azuis para a urna. Explicaremos a eles que assim pode-se ter o produto das possibilidades. Neste exemplo será extraído três bolas no máximo.

Após a construção da árvore, será construído o conjunto com alunos, para que eles possam visualizar as possibilidades dos eventos ocorrem. Por conseguinte a fim de fixar um pouco mais proporemos a eles mais alguns exemplos de aplicação,
1) 4 tamanhos, 5 papéis e 10 cores.
4) Uma moça tem 4 calças, 5 sapatos e 4 blusas. De quantas maneiras ela pode se vestir?

Nesta etapa apresentaremos a eles o que vem a ser o Fatorial, começaremos com alguns exemplos. Perguntaremos a eles o que é **10!, 9!,…,1!** e até mesmo com valores aleatórios, para em seguida “formalizarmos”.

Fatorial: Sendo $n \in \mathbb{N}$ e n > 1, definimos fatorial de *n* como produto dos *n* números naturais consecutivos de 1 até n e indicamos por n!. Ou seja,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

Serão ilustrados alguns exemplos numéricos com o fatorial.

Também será abordado as quatro operações matemáticas utilizando os fatoriais.

- Soma e subtração: $5! + 2! = 120 + 2 = 122$. Para as duas, deve-se expandir o número que se encontra em fatorial e posteriormente efetuar o cálculo.
- Produto: $4! \times 2! = (4.3.2.1) \times (2.1) = 24 \times 2 = 48$. Igual ao caso da soma e subtração, o fatorial deve ser desenvolvido para efetuar o seu produto.
- Divisão: Neste caso é possível simplificar a equação a partir do desenvolvimento do fatorial ou cancelando fatoriais iguais. Como por exemplo: $\frac{5!}{3!} = \frac{5\ .\ 4\ .\ 3!}{3!} = 5\ .\ 4 = 20$.

Exemplos: 1) $\dfrac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$

2) Resolva a equação $(n+2)! + (n+1)! = 48 \, . \, n!$

Avaliação: A avaliação será feita dos exercícios e dúvidas em sala de aula será feita de acordo com a participação dos alunos que estarão em grupos.

15.2. ANEXO

15.2.1. MATERIAL DO ALUNO

1) Quantos são os números de quatro algarismos que podemos formar?

2) Marcos comprou seu primeiro carro e deseja colocar uma placa em seu veículo. Sabendo que a placa começa com a letra A, e que nenhuma letra e número pode se repetir, quantas possibilidades ele teria para criar sua placa?

3) Sabendo que o Código Morse é composto por traço e ponto, Marcos deseja passar códigos para seus amigos. As palavras formadas pelo código tem de 1 a 4 letras, quantas palavras pode-se construir?

4) (FUVEST – SP) Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismos 1 e seguido imediatamente pelo algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

5) (UFBA) Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8 podem-se formar *x* números ímpares, com três algarismos distintos cada um. Determine *x*.

6) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas por questão?

7) Com os algarismos 1, 2, 3 e 4 escreve-se em ordem crescente todos os números de quatro algarismos distintos. Qual a posição que irá ocupar o número 3.412?

8) Em uma competição de natação com quatro participantes, na qual será definido a entrega das medalhas de ouro, prata e bronze. Quantos resultados são possíveis para o final da competição?

9) Simplifique as seguintes expressões:

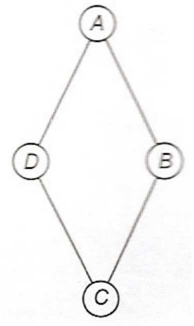
a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$; b) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$; c) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!+(n+2)!}$

10) Resolva a equação $12(n-1)! = (n+1)!$.

11) (ENEM – 2013 - Adaptado) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

15.2.2. Relatório

No dia 19 de Outubro de 2019, tivemos a oportunidade de ministrarmos mais uma aula para turma do PROMAT, projeto este que é realizado nas dependências da UNIOESTE aos Sábados pela manhã. Neste dia em questão as aulas foram sobre Análise Combinatória e os conceitos inerentes a este mesmo conteúdo.

Especificamente os nossos objetivos eram que os alunos se apropriassem dos conceitos de contagem, combinações e entendessem o Princípio Fundamental da Contagem. Em um primeiro momento abordamos a parte do conteúdo relacionado a combinação e permutações, como é uma parte bem prática a aula não foi tão teórica, a dinâmica foi essencialmente exemplo, formalização e exercícios. A respeito de contagem, os exercícios escolhidos para esta parte não geraram muitas dúvidas, vale ressaltar que alternamos entre apresentar o conceito e o momento de exercícios.

Logo em seguida passamos para parte em que explicamos brevemente sobre o que era o Fatorial, com alguns exemplos numéricos apenas para relembrar, para que se fizesse propício falar do P.F.C. Para falar do P.F.C, não nos valemos de formalização prévia, abordamos por meio dos exercícios que foram aparecendo ao longo da lista, o que de modo geral trouxe grandes benefícios, pois em uma tacada só os alunos entendiam o conceito e resolviam os exercícios.

Perto do final da aula, pegamos conceitos que seriam trabalhados apenas no 9º encontro, pois o 10º seria o menor de todos, pois haveria uma confraternização final. Enfim o conceito que trabalhamos ao final foi de Permutação com repetições, que possibilitou trabalharmos com vários exemplos de anagramas em geral.

16. Plano De Aula Dia 26/10/2019 – Permutação, Arranjo E Combinação

10º ENCONTRO

16.1.1. Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

16.1.2. Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

16.1.3. Objetivo Geral: Promover, aos alunos, a apropriação dos conceitos de permutação, arranjo e combinatória.

16.1.4. Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com análise combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Entender os conceitos de arranjos, permutações e combinação;
- Enxergar quando usar combinação, permutação e combinação;
- Diferenciar a combinação e arranjo;
- Interpretar enunciados de problemas que envolvam análise combinatória.

16.1.5. Conteúdo: Análise Combinatória**.**

16.1.6. Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

16.1.7. Encaminhamento metodológico:

16.1.7.1. ETAPA 1

Nesta primeira etapa, corrigiremos exercícios que porventura ficaram sem fazer por parte dos alunos, tirando alguma dúvida restante da aula passada.

16.1.7.2. ETAPA 2

Proporemos aos alunos uma dinâmica envolvendo os conceitos que serão apresentados nesta aula. Pediremos aos alunos que se dividam em grupos de 3 a 4 pessoas (dependendo da quantidade de alunos presentes), e em cada grupo as pessoas ganharam uma numeração (Fulano é 1, Ciclano é 2 e Deltrano é 3), assim faremos as seguintes perguntas;

i) De quantas maneiras, no geral, vocês de cada grupo podem se organizar?

(Fulano 1, Ciclano 2, Deltibanto 3 e depois Ciclano 2, Fulano 1, Beltrano 3, neste sentido)

II) E de quantas maneiras diferentes vocês de cada grupo podem se organizar?

iii) E quantos subgrupos diferentes vocês podem formar com os integrantes do grupo atual?

16.1.7.3. ETAPA 3

Nesta etapa em específico trabalharemos os conceitos, implicitamente a menos que alguém de antemão saiba o conteúdo (o que acontecerá) de análise combinatória.

Fazendo uma retomada aula anterior na parte de princípio fundamental da contagem, daremos um exemplo com um conjunto qualquer $M = \{a, b, c, d\}$ de quatro elementos e perguntaremos qual acontece se eu organizar, dois a dois, os elementos deste conjunto? E três a três? E quatro a quatro? E ressaltaremos para não ignorarem os elementos iguais. Assim mostraremos os resultado ao quadro e exporemos a eles a seguinte fórmula,

$$A_{m,r} = m \times m \times m \times ... \times m = m^r \quad .$$

significando que, os *m* elementos do conjunto serão repetidos *r* vezes. Lembrando que no arranjo a ordem dos conjuntos formados tem importância.

Exemplo:

Uma urna contém uma bola vermelha, uma azul e uma preta. Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida retirasse outra bola e observasse a cor. Quantas são as possíveis sequencias de pares de cor? Este exemplo será para reforçar o conceito.

Em seguida outro exemplo como gatilho para o próximo conceito, a fim de deixar com mais sentido tantas fórmulas,

Exemplo:

De um baralho com 52 cartas, 3 cartas são retiradas sem reposição. Quantas sequências de cartas são possíveis de se obter?

Explicaremos no quadro que na verdade o conceito envolvido neste exemplo é de arranjo simples. Assim apresentaremos aos alunos o conceito do arranjo simples, o qual se dá pelo conjunto $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ tomado *r* a *r,* mas com $1 \leq r \leq m$ para qualquer sequencia. Denotada por

$$A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Pediremos aos alunos de quantas maneiras eles podem se arranjar dois a dois.

16.1.7.4. ETAPA 4

Nesta etapa trabalharemos com a permutação e mais uma vez abordaremos com exemplos a fim de introduzir o conceito. Os exemplos a seguir tem como objetivo de os alunos resolverem da maneira difícil, sem utilizar fórmulas ou calculadora.

Exemplos:

1) De quantas formas podemos organizar a palavra AMOR? Explicaremos a eles que se trata de um anagrama.

2) Quantos anagramas a palavra LIVRO pode formar?

Após isto se fará propício expormos com mais clareza do que se trata o conceito envolvido nestes exemplos, apresento-lhes as fórmulas e ensinando-os como usar na calculadora, o que pode ser de grande valia.

- **Permutação Simples**: Após a parte de arranjos, será apresentado o conceito de permutação simples para os alunos, a qual é dada por um caso particular da anterior. Pois se no arranjo $r = m$, temos que

$$A_{m,m} = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = m! = P_m \quad .$$

Mostrando aos alunos que o fatorial de 0 é igual à 1. Disto temos que a permutação relembra o fatorial trabalhado na última aula.

Para trabalhar com a permutação com repetição, daremos mais dois exemplos, relacionado a anagramas também que é o trivial.

Exemplos:

1) Quantos anagramas a palavra AMORA pode formar?

2) Quantos anagramas a palavra ARARA pode formar?

- **Permutação com Repetição**: Caso a permutação apresente repetição em seus anagramas ou em seu conjunto estudado, deve-se fazer uma remoção destes quando efetuar seu cálculo. Denotado geralmente por $P_m^k = \frac{m!}{k!}$, sendo *m* o número de elementos do conjunto e *k* o número de repetições dada no conjunto. Caso haja mais de uma repetição, um novo índice deve ser atribuído ao lado de *k*.

Para permutação circular, nós os três professores mostraremos ao vivo e a cores, de quantas maneiras três integrantes pode formar um círculo (roda) diferente.

- **Permutação Circular:** Na permutação circular o que importa é a posição relativa dos objetos entre si. Isto ocorre quando *m* elementos desejam formar uma circunferência. A qual é denotada por $P_c = (m-1)!$. Pois se a volta toda for completa, teremos apenas uma permutação simples.

16.1.7.5. ETAPA 5

Nesta etapa relembraremos o que fora feito no início da aula, para ressaltar a diferença entre combinação e arranjo, sendo que uma das vezes fora considerado de maneiras diferentes e a outra não, a formação dos grupos.

Na combinação temos um conjunto M formado *m* elementos. É chamado de combinação quando os *m* elementos são tomados *r* a *r*, aos subconjuntos de M constituídos por *r* elementos.

É importante notar a diferença entre combinação e um arranjo, pois numa combinação não importa a ordem dos elementos, enquanto no arranjo a ordem importa.

- **Combinação Simples:** Nesta combinação de *m* elementos do conjunto tomados *r* a *r*, onde r < m, é dada por

$$C_{m,r}=\frac{m!}{r!(m-r)!}$$

Exemplo: 1) Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

A fórmula para a combinação também pode ser denotada por $\binom{m}{r}$. Podemos ver também que a combinação vem do arranja sem repetição,

$$C_{m,r}=\frac{A_{m,r}}{r!}=\frac{\frac{m!}{(m-r)!}}{r!}=\frac{m!}{r!(m-r)!}$$

2) Temos sete cadeiras numeradas de 1 a 7 e desejamos escolher 4 lugares entre os sete existentes. De quantas formas isto pode ser feito?

16.1.7.6. Avaliação: A avaliação será feita dos exercícios e dúvidas em sala de aula será feita de acordo com a participação dos alunos que estarão em grupos.

16.2. ANEXO

16.2.1. MATERIAL DO ALUNO

- **Arranjo com repetição:** $A_{m,r} = m \times m \times m \times ... \times m = m^r$.
- **Arranjo simples:** $A_{m,r} = \dfrac{m!}{(m-r)!}$.
- **Permutação Simples:** $A_{m,m} = \dfrac{m!}{(m-m)!} = \dfrac{m!}{0!} = m! = P_m$ **.**
- **Permutação com repetição:** $P_m^k = \dfrac{m!}{k!}$.
- **Permutação Circular:** $P_c = (m-1)!$,
- **Combinação Simples:** $C_{m,r} = \dfrac{m!}{r!(m-r)!}$.

1) Em uma empresa, quinze funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor financeiro. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho da empresa. Vamos determinar de quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita.
Trata-se de um agrupamento de 15 pessoas tomadas 2 a 2.

2) (PM SC – Cesiep 2011). Em uma corrida com 10 atletas competindo pergunta-se: de quantos modos distintos (combinações) podem ser conquistadas as medalhas de Ouro, Prata e Bronze?

3) (Sefaz RJ – Coperj 2010). Em uma fila do cinema há 5 cadeiras consecutivas vazias.

O número de maneiras que três pessoas, A, B e C, podem sentar- se nelas é:
a) 10
b) 15
c) 30
d) 45
e) 60

4) (Unitau 95) O número de anagramas da palavra BIOCIÊNCIAS que terminam com as letras AS, nesta ordem é:
a) 9!

b) 11!

c) 9!/(3! 2!)

d) 11!/2!

e) 11!/3!

5) (UCPEL/2012) Com dois goleiros que só jogam nessa posição e sete jogadores que não jogam no gol, quantos times de futebol de salão podem ser formados, sabendo-se que um time de futebol de salão é composto por cinco jogadores e um desses é o goleiro?

a) 80 b) 70 c) 120 d) 60 e) 90

6) Em uma prova composta de 20 questões envolvendo V ou F, de quantas maneiras distintas teremos doze respostas V e oito respostas F?

7) (UNIFRA/2016) Uma pessoa para ter acesso à internet, necessita de uma senha, mas, na hora de digitá-la, esquece o número. Ela lembra que o número tem 4 algarismos, começa com 9, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 3 em alguma posição. O número máximo de tentativas, para acertar a senha, é

a) 28. b) 56. c) 84. d) 112. e) 168.

8) (ULBRA/2014) Ana, Beatriz, Carlos, Denise, Luiza e Otávio estão dispostos a representar seus colegas em uma convenção sindical. Nessa convenção, cada empresa pode enviar uma comissão com três representantes. O número de comissões distintas que podem ser formadas nessa empresa é

a) 6 b) 9 c) 18 d) 20 e) 24

9) De quantas formas podemos escolher 4 cartas de um baralho de 52 cartas, sem levar em conta a ordem delas, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei?

16.2.2. Relatório

No dia 26 de Outubro de 2019, tivemos novamente a oportunidade de ministrarmos a aula para os alunos do PROMAT, projeto realizado nas dependências da UNIOESTE aos sábados pela manhã. O dia em questão fora um tanto quanto peculiar, se tratava do último dia e também do dia da confraternização entre as turmas como forma de despedida dos alunos do curso.

O último dia do PROMAT ficou planejado para ser o mais curto de todos os encontros, neste dia a aula terminou as 10:15 sendo o tempo restante até as 11:40 dedicado a confraternização. Como o tempo fora menor então os conteúdos a serem ministrados foram menos no quesito quantidade, nele relembramos os conceitos trabalhados nas aulas anteriores, sobre Análise Combinatória, bem como trabalhar com arranjos de todos os tipos.

Seguimos a mesma dinâmica dos outros encontros sobre Analise Combinatória, diluindo a teoria nos exercícios apresentados na lista. Ao começo da aula, com o intuito de fazê-los entender a diferença entre arranjo e combinação, trabalhamos com uma dinâmica, separamos a turma em grupos diferentes, 4 pessoas cada e pedimos a eles de quantas maneiras eram possíveis eles se reorganizarem, dado que cada um tinha uma numeração ordinal.

Após resolverem este pequeno "puzzle" explicamos os arranjos e combinações e pedimos que eles fizessem os exercícios da lista. Durante as resoluções pudemos explicar claramente e individualmente cada conceito, o que foi demasiadamente proveitoso, pois esta parte de combinação/arranjos geram várias resoluções para um mesmo exercício o que deixa mais interessante.

Ao findar da aula, todos já haviam terminado grande parte da lista e sanado grandes dúvidas a respeito dos exercícios.

17. CONCLUSÃO

Chegado o fim dos 10 encontros, e com isso o fim da nossa prática docente no PROMAT, fazemos algumas reflexões sobre o período em que estivemos à frente da turma que ficamos responsáveis.

Todos os alunos, ao término do PROMAT, nos disseram que gostaram de nossas aulas e que aprenderam muita coisa conosco, algumas até que não haviam aprendido em seus respectivos colégios.

Tivemos alguns contratempos em nossa primeira aula e da nossa quinta aula em diante. Inicialmente, éramos para ser 4 estagiários lecionando para a turma. Acabou que ficamos apenas em 3. Porém, nada que nos atrapalhasse e modificasse nossos planejamentos iniciais, apesar de, também, externas incomodações.

Acreditamos que, pela diversidade de nossa metodologia, não se fixar em apenas uma, os alunos sentiram que as aulas foram mais dinâmicas e nunca vinham preparados para a mesma aula que tiveram em encontros anteriores. Procuramos sempre inovar, principalmente de um encontro para outro.

Para nós estagiários foi uma experiência gratificante. Apesar de a turma ser mais apática do que esperávamos, foi uma turma participativa e interativa, conseguimos lecionar como planejamos e até lançamos alguns desafios para os alunos, como uma forma de improviso em sala.

Enfim, uma experiência que, com certeza, guardaremos em nossa memória. Obtivemos bons resultados com nossa turma e certamente os alunos tiveram uma boa impressão nossa.

18. REFERÊNCIAS

Facchini, Walter: **Matemática para a escola de hoje :** livro único/ Walter Facchini. - São Paulo : FTD, 2006.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática Completa –** 2ª ed. renov. - São Paulo: FTD, 2005 – Coleção Matemática Completa.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a matemática –** 2ª ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

https://www.todamateria.com.br/circunferencia/
https://brasilescola.uol.com.br/matematica/o-radiano.html
https://www.fm2s.com.br/histograma/
https://gestaodesegurancaprivada.com.br/histograma-de-frequencia-conceito/
https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-estatistica.htm