UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

BRUNO GONÇALVES
FERNANDA PAULA JOHN
LEONARDO SALVADOR
THALIA FALQUIEVICZ CORASSA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

CASCAVEL
2019

BRUNO GONÇALVES
FERNANDA PAULA JOHN
LEONARDO SALVADOR
THALIA FALQUIEVICZ CORASSA

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientadora: Profª. Dra. Dulcyene Maria Ribeiro

CASCAVEL
2019

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus pelo dom da vida e, pela oportunidade de acordar todos os dias com paciência e coragem.

Agradecemos a todos os professores que estiveram presentes e contribuíram na realização deste trabalho. Em especial a professora e orientadora Dulcyene Maria Ribeiro, por compartilhar seus conhecimentos, aprimorando nossas atividades e aulas, por agir com afeto e carinho, sempre nos incentivando e acreditando em nosso potencial.

Aos nossos familiares que mesmo distantes estavam sempre orando por nós, nos dando forças e nos apoiando a seguir em frente, superando todos os obstáculos para atingir nossos sonhos.

Aos nossos colegas de graduação, por compartilharem as alegrias e dificuldades no decorrer dessa caminhada, por todo o incentivo constante e experiência mútua.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente na conclusão desta etapa.

.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Quando você faz aniversário? 26
Tabela 2: Tabela valores de seno, cosseno e tangente 41
Tabela 3: Alguns valores das funções trigonométricas 70
Tabela 4: Posição relativa entre ponto e circunferência 119
Tabela 5: Posição relativa entre uma reta e uma circunferência 122
Tabela 6: Posição relativa entre duas circunferências 123

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Alunos realizando a construção do ciclo trigonométrico............................13
Figura 2: Ciclo trigonométrico construído por um aluno 13
Figura 3: Ciclo trigonométrico desenhado no quadro 14
Figura 4: Alunos jogando o jogo Pife Trigonométrico 16
Figura 5: Plano Cartesiano...17
Figura 6: Alunos jogando o jogo Batalha Naval...19
Figura 7: Alunos jogando o jogo Avançando com o resto 21
Figura 8: Dinâmica 22
Figura 5: Teorema de Tales 38
Figura 6: Relações no triângulo...39
Figura 7: Triângulo Equilátero 40
Figura 8: Triângulo Equilátero 41
Figura 9: Triângulo Equilátero 50
Figura 10: Triângulo Equilátero 51
Figura 11: Ciclo Trigonométrico 56
Figura 12: Ciclo Trigonométrico I 57
Figura 13: Sinais que as funções Seno, Cosseno e Tangente assumem em cada quadrante 57
Figura 14: Ciclo Trigonométrico II 58
Figura 15: Ciclo Trigonométrico III 59
Figura 16 : Ciclo Trigonométrico IV...59
Figura 17: Alunos construindo o ciclo trigonométrico 66
Figura 18: Ciclo trigonométrico de um aluno...66
Figura 19: Ciclo trigonométrico desenhado no quadro..67
Figura 20: Gráfico da função Cosseno..70
Figura 21: Gráfico da função Cosseno..71
Figura 22: Gráfico da função Tangente...71
Figura 23: Relação trigonométrica 72
Figura 24: Pife trigonométrico 72
Figura 25: Trinca possível para o jogo Pife Trigonométrico 73
Figura 26: Quadrantes do ciclo trigonométrico..86
Figura 27: Representação geométrica da localização do ponto..............................87
Figura 28: Plano cartesiano...88
Figura 29: Distância entre pontos I..88
Figura 30: Distância entre pontos II...89
Figura 31: Distância entre pontos III..89
Figura 32: Representação geométrica do ponto médio...90
Figura 33: Equação geral da reta 100
Figura 34: Reta que passa por A e B e faz um ângulo α com o eixo x....................102
Figura 35: Ilustração do triângulo 102
Figura 36: Equação reduzida da reta. 103
Figura 37: Retas Paralelas e Coincidentes 105
Figura 38: Retas Verticais 105
Figura 39: Retas Concorrentes 106
Figura 40: Retas Perpendiculares..106
Figura 41: Roda de bicicleta e conceitos relacionados à circunferência. 115
Figura 42: Roda gigante...116
Figura 43. Campo de futebol..119

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS iv
LISTA DE FIGURAS v

1. INTRODUÇÃO 7
2. PROMAT 9
3. ARTIGO 10
   INTRODUÇÃO 10
   DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES 11
   CONSIDERAÇÕES FINAIS 22
4. MÓDULO 1: TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO 24
   4.1 ATIVIDADES DIA 10/08 24
   4.1.1 PLANO DE AULA 24
   4.1.2 RELATÓRIO 34
5. MÓDULO 2: TRIGONOMETRIA 37
   5.1 ATIVIDADES DIA 17/08 37
   5.1.1 PLANO DE AULA 37
   5.1.2 RELATÓRIO 49
   5.2 ATIVIDADES DIA 24/08 53
   5.2.1 PLANO DE AULA 53
   5.2.2 RELATÓRIO 65
   5.3 ATIVIDADES DIA 31/08 69
   5.3.1 PLANO DE AULA 69
   5.3.2 RELATÓRIO 81
6. MÓDULO 3: GEOMETRIA ANALÍTICA 84
   6.1 ATIVIDADES DIA 14/09 84
   6.1.1 PLANO DE AULA 84
   6.1.2 RELATÓRIO 95
   6.2 ATIVIDADES DIA 21/09 99
   6.2.1 PLANO DE AULA 99
   6.2.2 RELATÓRIO 112
   6.3 ATIVIDADES DIA 28/09 115
   6.3.1 PLANO DE AULA 115
   6.3.2 RELATÓRIO 127
7. MÓDULO 4: ANÁLISE COMBINATÓRIA 130
   7.1 ATIVIDADES DIA 05/10 130
   7.1.1 PLANO DE AULA 130
   7.1.2 RELATÓRIO 141
   7.2 ATIVIDADES DIA 19/10 144
   7.2.1 PLANO DE AULA 144
   7.2.2 RELATÓRIO 151
   7.3 ATIVIDADES DIA 26/10 153
   7.3.1 PLANO DE AULA 153
   7.3.2 RELATÓRIO 159
8. CONSIDERAÇÕES 161

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho é um relatório das ações desenvolvidas na disciplina de Metodologia e Prática de Matemática - Estágio Supervisionado II, ofertada no quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Nele estão presentes os planos de aula e os relatórios de cada encontro, bem como as descrições da metodologia utilizada em cada atividade de ensino e das vivências durante o período de desenvolvimento do projeto.

O conteúdo trabalhado com os alunos inscritos no projeto PROMAT, foi dividido em 20 encontros. Nos últimos 10 encontros os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, que estão cursando a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado II, trabalharam com turmas de, em princípio, 50 alunos. Esses 10 encontros foram divididos em 4 módulos: o primeiro módulo abordando os conceitos sobre tratamento de informação; o segundo módulo sobre trigonometria; o terceiro módulo sobre geometria analítica; e o quarto sobre análise combinatória. Os encontros eram realizados aos sábados pela manhã, das 8:00h às 11:40h.

Os planos de aula e a metodologia utilizada pelo grupo, foi pensada para que o Promat desse enfoque ao ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio e aos vestibulares, sendo assim, grande parte dos exercícios propostos foram retirados de provas de vestibulares e do ENEM.

Sobre a elaboração das atividades a serem realizadas durante as aulas, planos de aulas, lista de exercícios e atividades lúdicas, tínhamos a preocupação de serem realizadas por todo o grupo, porém, algumas vezes isso não foi possível. As aulas da disciplina foram de grande importância, pois, eram oportunidades de compartilharmos ideias, sobre como abordaríamos o conteúdo com os alunos.

Em nossas aulas abordamos as tendências Resolução de problemas e Investigação Matemática, pois acreditamos que as mesmas propiciam melhor compreensão e apropriação dos conteúdos, interligando a matemática com as vivências do dia a dia. Além disso, em nossa prática pedagógica utilizamos jogos e atividades lúdicas, com objetivo de tornar as aulas mais dinâmicas e prazerosas, propiciando melhor apropriação dos conceitos por parte dos alunos.

A utilização de recursos tecnológicos, durante as aulas, também foi um instrumento valioso, pois, permitiu que definições e propriedades fossem projetadas durante as aulas e, posteriormente enviadas aos alunos. Isso nos auxiliou quanto à utilização do tempo, poupando-o em diversas vezes, sem a necessidade de que ocupássemos parte da aula escrevendo no quadro. O *software* Geogebra, foi de fundamental importância para a elucidação de inúmeros conteúdos, principalmente acerca de geometria e gráficos de funções trigonométricas, consequentemente, o utilizamos diversas vezes durante as aulas.

2. PROMAT

O projeto Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática é executado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no *Campus* de Cascavel. São ofertados conteúdos de matemática da Educação Básica exigidos nos concursos vestibulares da Unioeste, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos, na forma de "Curso Preparatório de Matemática", objetivando a apropriação de determinados conteúdos, conceitos e estruturas matemáticas.

As aulas são ministradas por alunos estagiários do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a supervisão e orientação dos professores do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática. As aulas ocorrem aos sábados de manhã, totalizando 20 encontros de quatro horas aulas. São atendidos alunos de Ensino Médio da rede pública de ensino oriundos da cidade de Cascavel e região, egressos do Ensino Médio, também alunos ingressantes no curso de Matemática e de outros cursos que fizeram inscrições no projeto.

No segundo semestre do Promat, trabalhamos com conteúdos de matemática do Ensino Médio, enfocando sempre problemas dos vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), já que nosso objetivo era preparar os alunos para essas provas, sanar suas dúvidas e despertar o gosto pela matemática, rompendo aquela imagem que a mesma é chata e sem utilidade. Para cumprir com esses objetivos foram produzidas aulas, materiais e atividades dinâmicas.

O projeto é de suma importância para todos os participantes, tanto para os alunos que visam ampliar seus conhecimentos e em decorrência disso, suas chances de entrar em cursos de Ensino Superior, quanto para os estagiários que visam ampliar suas experiências e necessitam da prática para se prepararem e promoverem uma educação de qualidade.

3. ARTIGO

ATIVIDADES LÚDICAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO: RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA

Introdução

O presente trabalho tem o intuito de apresentar algumas reflexões acerca das atividades desenvolvidas durante o segundo semestre da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado II, ofertada no quarto ano do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná *campus* de Cascavel. Essas atividades foram desenvolvidas no Promat que é um Projeto de Ensino institucional do Curso de Licenciatura em Matemática, que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino. As atividades são direcionadas aos estudantes que buscam acesso aos cursos superiores. São ofertados conteúdos de matemática da Educação Básica exigidos nos concursos vestibulares da Unioeste, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos, na forma de “Curso Preparatório de Matemática”, objetivando a apropriação de determinados conteúdos, conceitos e estruturas matemáticas.

Sendo assim, visamos neste trabalho relatar o desenvolvimento das atividades lúdicas realizadas em sala de aula durante a execução do projeto e a forma como foram abordadas, descrevendo os conceitos trabalhados e as discussões que ocorreram durante a aplicação, explicitando a importância do trabalho com essas atividades para o ensino-aprendizagem da matemática, interligando com a literatura concernente ao tema.

Diante das dificuldades encontradas no ensino da Matemática, faz-se necessário trabalhar com metodologias mais dinâmicas e que propiciem um melhor entendimento dos conceitos, despertando a criatividade do aluno e o gostar pela Matemática. Desta forma, Niles e Socha (2014, p. 92) afirmam que “por meio de uma aula lúdica, o aluno é estimulado a desenvolver sua criatividade e não a produtividade. Sendo sujeito do processo pedagógico, no aluno é despertado o desejo do saber, a vontade de participar e a alegria da conquista”.

Perante essa concepção, os autores supracitados relatam que

> [...} o professor tem um papel fundamental para conduzir trabalhos lúdicos, levando os alunos a atingir os objetivos específicos da aprendizagem dos conteúdos, conseguindo, assim, proporcionar a socialização dos educandos e desenvolver a capacidade dos mesmos de assimilarem o conteúdo exposto da melhor maneira possível. (NILES; SOCHA, 2014, p. 85)

Logo, é fundamental que o docente trabalhe com atividades lúdicas em sala de aula com o objetivo de favorecer o processo de ensino-aprendizagem, pois quando o aluno utiliza materiais manipuláveis, ele consegue compreender melhor os conceitos, ou seja, “o sujeito, quando interage com o objeto, abstrai suas propriedades segunda suas possibilidades de interpretação. Está atividade condiciona a abertura de novas possibilidades cada vez mais numerosas e seguidas de interpretações mais ricas” (BRENELLI, 1996, p.39).

Visto a importância do uso das atividades lúdicas, podemos citar como uma das principais, o jogo. Segundo D’ Ambrosio (1989) existem muitos trabalhos e pesquisas em Educação Matemática que propõe o uso de jogos no ensino da Matemática. A autora relata que os jogos podem ser vistos como uma “forma de se abordar, de forma a resgatar o lúdico, aspectos do pensamento matemático que vêm sendo ignorados no ensino” (D’ AMBROSIO, 1989, p. 19).

Desta forma, os jogos devem ser vistos como uma atividade lúdica que propicia o pensamento matemático, a criatividade e a assimilação dos conceitos trabalhados por meio da atividade prática. Segundo Moura (1990) apud Brenelli (1996, p. 24) “a perspectiva do jogo na educação matemática não significa ser a ‘matemática transmitida de brincadeira’, mas a ‘brincadeira que evolui até o conteúdo sistematizado’”.

Portanto, durante nossas aulas procuramos trabalhar sempre com atividades lúdicas que promovessem uma aula mais atrativa, despertando nos alunos a criatividade e o pensamento lógico-matemático. Na sessão seguinte, apresentamos as atividades desenvolvidas em sala de aula, bem como as discussões e a forma como foram abordadas.

Descrição das atividades

Durante o Promat trabalhamos diversos conteúdos, dentre eles, os conceitos de Trigonometria, considerado pelos alunos e docentes um dos conteúdos de matemática mais difíceis da Educação Básica. Essa ideia corrobora com o que Oliveira (2014, p. 21) afirmou,

> [...] como educador, percebemos a dificuldade encontrada tanto por alunos, como para muitos docentes, em compreender o conteúdo da trigonometria de forma clara, concreta, próxima da realidade sem precisar lançar mão de grandes cálculos algébricos, pois, sabemos o quanto o conteúdo da trigonometria está intimamente ligado à compreensão de diversos outros conteúdos matemáticos.

Essa visão decorre do fato das aplicações referentes ao conteúdo de Trigonometria geralmente não serem fáceis ou simples para os docentes desenvolverem em sala de aula. Logo, com o objetivo de tornar a aula mais dinâmica e menos maçante, desenvolvemos algumas atividades lúdicas durante as aulas do conteúdo de Trigonometria. Foram abordados os conceitos relacionados com o ciclo trigonométrico e para que os alunos compreendessem melhor a utilidade do ciclo e sua importância em relação aos conceitos de Trigonometria, realizamos junto com eles a construção.

Primeiramente, entregamos a eles os materiais que seriam utilizados para a construção do ciclo, constituindo-se de: papel milimetrado, régua, compasso, transferidor, cola, papel vergê e barbante. Iniciamos solicitando aos alunos que construíssem um plano cartesiano e, utilizando o compasso, uma circunferência de raio uma unidade de medida (orientamos que utilizassem um raio de oito centímetros), centralizada no ponto (0,0). Após, pedimos que marcassem na circunferência os ângulos de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° e 360°. Em seguida, explicamos aos alunos o que são ângulos correspondentes, utilizando a ideia de que eles formam o mesmo ângulo com o eixo das abcissas e das ordenadas, então, solicitamos que os alunos traçassem um segmento ligando os ângulos correspondentes. Posteriormente, pedimos que construíssem uma reta tangente à circunferência no ponto (0,1), que seria utilizada para calcular o valor da tangente. E por fim, auxiliamos os alunos a colocarem o barbante no centro da circunferência.

As figuras 1 e 2 a seguir, mostram os alunos realizando a construção do ciclo trigonométrico e como ele ficou depois de pronto.

Figura 1: Alunos realizando a construção do ciclo trigonométrico
Fonte: Acervo dos autores

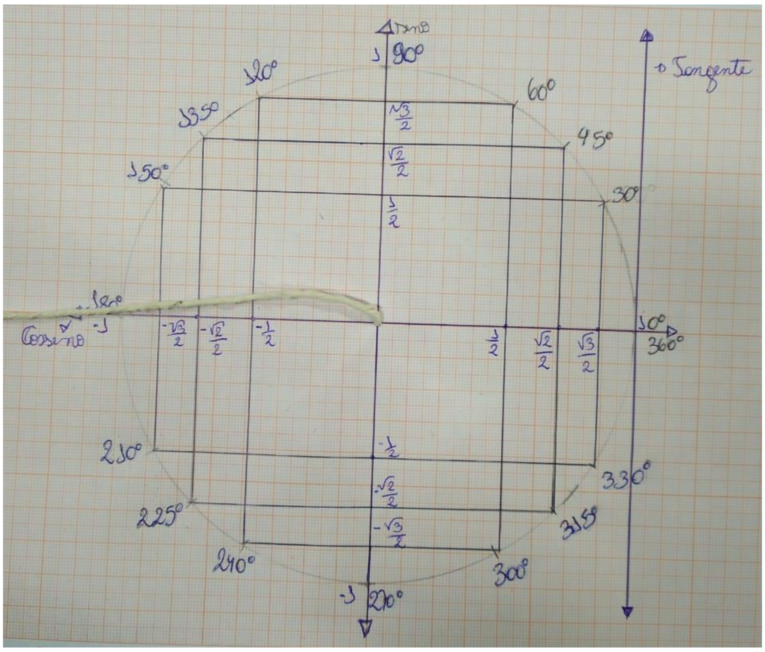


Figura 2: Ciclo trigonométrico construído por um aluno
Fonte: Acervo dos autores

A construção dos alunos foi realizada seguindo os passos feitos pelos professores no quadro, como representado na Figura 3. O desenho do ciclo, que estava no quadro, foi utilizado em outros momentos da aula para facilitar a explicação.

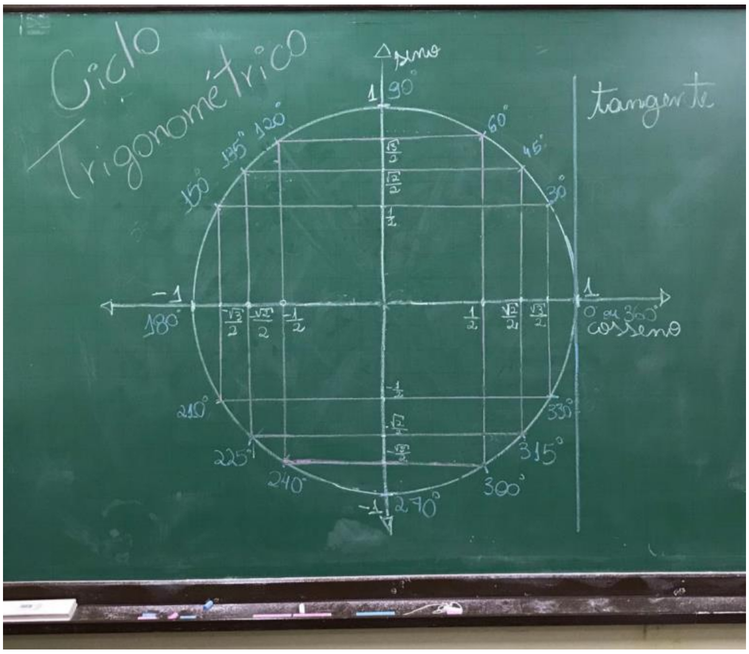


Figura 3: Ciclo trigonométrico desenhado no quadro
Fonte: Acervo dos autores

Após a construção, explicamos como utilizar o ciclo trigonométrico e mostramos aos alunos no *software Geogebra* a representação de um ciclo, calculando os valores de seno, cosseno e tangente. Ainda, explicamos sobre o sinal em cada um dos quadrantes. Acreditamos que tenha ficado claro para os alunos o funcionamento do ciclo trigonométrico e sua utilidade, pois os mesmos se mostraram participativos e atentos durante a construção e demonstraram entender as explicações. Não tivemos grandes dificuldades no desenvolvimento dessa atividade, pois como já dito, os alunos participaram de forma proveitosa e todos conseguiram construir o ciclo.

Ainda referente ao conteúdo de Trigonometria, realizamos um jogo com os alunos, a saber, o Pife Trigonométrico, que segue os princípios básicos do popular jogo de Pife, com algumas adaptações nas cartas. Nós mesmos realizamos a confecção do jogo, que foi impresso em papel vergê, encapado com plástico transparente e posteriormente recortado.

O jogo é composto por um baralho trigonométrico com 38 cartas. E as regras são as seguintes:

- Um jogador deve embaralhar e distribuir as cartas, sendo seis cartas para cada participante.
- Das seis cartas recebidas, cada jogador deve formar duas trincas de razões trigonométricas equivalentes. Por exemplo: caso o jogador faça

uma trinca com as razões do seno 30°: a medida do $cateto\ oposto$ (30°) divido pela medida da $hipotenusa = sen\,30° = 1/2$.

- O jogador que fizer dois trios primeiro, mostra ao adversário e, se estiver correto, ganha o jogo, somando um ponto. Se o jogador fizer um trio e uma sequência relacionando quatro cartas (utilizando uma carta descartada na mesa) ele ganha com sete cartas, neste caso ele somará três pontos. Ganha aquele jogador que fizer dez pontos primeiro.

Verificando as razões do baralho, cada razão tem pelo menos um trio formado, mas é possível associar outras ternas como: $sen\,45° = cos\,45° = \sqrt{2}/2$, o que possibilita fazer um trio já que o resultado da razão é o mesmo, as jogadas que tiverem a mesma representação como: $1/2, 1/2$ e $sen\,30°$ não serão válidas, pois o intuito é associar cartas equivalentes e representações distintas.

A forma de se jogar o Pife Trigonométrico segue os princípios básicos do popular jogo de Pife, ou seja, o participante que iniciar o jogo deve pegar uma carta do monte e verificar se consegue formar uma trinca ou até mesmo um par, devendo descartar uma carta a sua escolha, com a face para cima, ao lado do monte. O jogador sequente, à direita de quem iniciou, pode pegar a carta descartada anteriormente ou, se preferir, pegar no monte e descartar uma de suas cartas. Da mesma forma, segue-se sucessivamente, até o fim do jogo. Quando jogado com três ou quatro participantes e o descarte de um jogador servir para completar a trinca que falta para outro jogador ganhar, este poderá antecipar-se ao jogador sequente vencendo assim a partida, porém, caso se engane só poderá vencer pegando a carta do monte, ou a carta descartada pelo seu antecessor.

Solicitamos aos alunos que se organizassem em quartetos e realizamos a explicação da atividade, relatamos as regras e a forma de jogar o Pife Trigonométrico, descritas anteriormente. Em seguida, deixamos os alunos jogarem e durante esse momento estávamos passando entre os grupos auxiliando e tirando as dúvidas que surgiam durante o desenvolvimento do jogo. A Figura 4 mostra os alunos desenvolvendo a atividade.

Figura 4: Alunos jogando o jogo Pife Trigonométrico
Fonte: Acervo dos autores

De modo geral, o desenvolvimento da atividade foi interessante, os alunos gostaram e foram participativos, porém encontraram dificuldades para jogar, pois não estavam familiarizados com os termos, com o estilo da representação e a notação. Logo, se confundiam para formar as trincas, formando-as de forma errada. Porém, no decorrer de algumas jogadas os alunos conseguiram identificar melhor cada relação, tendo mais facilidade para jogar, formando as trincas corretamente.

Dessa forma, percebemos que o uso de jogos pode ser um excelente método para a aprendizagem e fixação dos conceitos. Quando o aluno sente-se desafiado, desperta nele o desejo de vencer e, consequentemente o interesse pela atividade. Corroborando com essas ideias Brenelli (1996, p. 27) relata

> [...] jogar é estar interessado, não pode ser uma imposição; é um desejo. O sujeito quer participar do desafio, da tarefa. Perder ou ganhar no jogo é mais importante para ele mesmo do que como membro de um grupo. Isto porque é o próprio jogador que se lança desafios, desejando provar seu poder e sua força mais para si mesmo que para os outros.

Após os conceitos de Trigonometria, trabalhamos com outro conteúdo de suma importância na Educação Básica, Geometria Analítica. Os conceitos de GA mostram diversas aplicações na realidade, como por exemplo, as ruas das cidades podem ser constituídas por retas, a localização de um determinado lugar é constituída por coordenadas dos pontos, entre outros. Diante dessas aplicações, Oliveira (2014, p.19) relata que

> Várias atividades de nosso dia a dia utilizam conhecimentos da Geometria Analítica, como, por exemplo, os aparelhos de GPS amplamente usados para navegação em terra, no ar ou no mar, utilizam conhecimentos básicos de localização de pontos representados por coordenadas. Os diversos gráficos de funções utilizadas pelos cientistas de hoje são melhor representados e estudados em um plano cartesiano. A engenharia civil e seus softwares de computador se baseiam no sistema cartesiano para criação de projetos. Em consonância com a álgebra linear a geometria analítica é utilizada para a programação de computadores desde sistemas simples de banco de dados aos mais complexos jogos eletrônicos. Percebemos claramente o quanto a geometria analítica está presente em nosso cotidiano e como ela nos ajuda a entender melhor o mundo em que vivemos.

Para introdução dos conceitos de Geometria Analítica, mais especificamente, os conceitos de ponto e de plano cartesiano, utilizamos um jogo que é uma adaptação do tradicional jogo “Batalha Naval”.

Para darmos início ao jogo pedimos aos alunos que se organizassem em quartetos, em seguida, dividimos cada quarteto em duas equipes. Cada equipe recebeu uma folha com um plano cartesiano, como representado pela figura 5. Nesse, os alunos deveriam marcar pontos para simbolizar os navios. Explicamos aos alunos que cada ponto marcado representava uma coordenada no plano cartesiano, por exemplo, a coordenada (1,2) representava um ponto, ou seja, essa coordenada poderia representar um navio de um ponto. Desta forma, deveriam marcar dois navios de um ponto, três navios de três pontos, dois navios de quatro pontos e um navio de cinco pontos, sendo todos eles circulados, para facilitar a visualização.

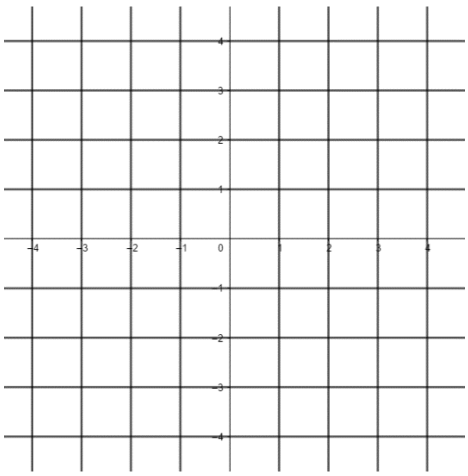


Figura 5: Plano Cartesiano
Fonte: Acervo dos autores

Após isso, explicamos as regras do jogo, que são as seguintes:

- A primeira equipe deve escolher uma coordenada para atirar;
- A segunda equipe deve informar se eles acertaram um navio ou não;
- Caso tenham acertado, têm o direito a atirar mais uma vez, e assim procede até que errem o tiro, passando a vez para a segunda equipe, que fará o mesmo;
- Vence quem tiver mais pontos.

Cada navio afundado terá os seguintes valores:

- Navio de um ponto: 5
- Navio de três pontos: 7
- Navio de quatro pontos: 10
- Navio de cinco pontos: 15

Após explicarmos o funcionamento do jogo para os alunos, andávamos em sala com o intuito de auxiliá-los quanto a eventuais dúvidas que pudessem surgir. Durante a primeira etapa do jogo que consistia em marcar pontos no plano cartesiano para representar os navios, não notamos dúvidas dos alunos, apenas realizávamos a conferência em relação à quantidade de navios de cada tamanho.

Na sequência dessa etapa alguns alunos apresentaram dúvidas quanto às coordenadas dos pontos, mostrando que não compreenderam como se representa as coordenadas de um ponto. Sanávamos essas dúvidas, explicando que um par cartesiano da forma (x, y) representa a posição de um ponto sobre um plano cartesiano, em que a primeira coordenada se refere a distância do ponto em relação ao eixo y, e a segunda se refere a distância do ponto em relação ao eixo x. Então para localizarmos um ponto no plano cartesiano podíamos traçar retas perpendiculares ao eixo x e y passando pelas coordenadas do ponto e que a intersecção dessas retas perpendiculares será a localização do ponto.

Acreditamos que o jogo possibilitou que os alunos recordassem os conceitos sobre plano cartesiano e pontos. O fato de o jogo ser jogado em grupo possibilitou a interação entre os alunos, e promoveu aprendizado, pois nos grupos eles se sentem à vontade para perguntar aos seus colegas o que não sabem, e consequentemente, sanar suas dúvidas. A figura 6 representa os alunos desenvolvendo a atividade nos grupos.

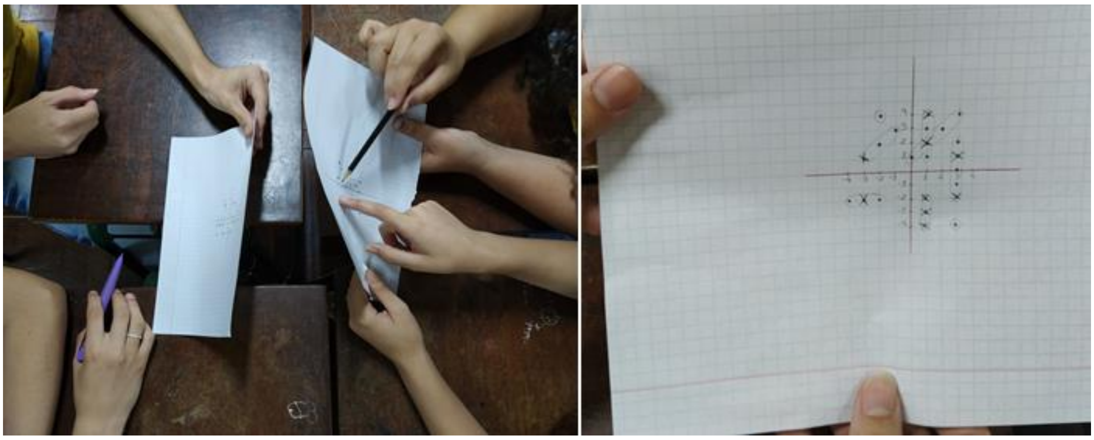


Figura 6: Alunos jogando o jogo Batalha Naval
Fonte: Acervo dos autores

Portanto, percebemos que a introdução dos conceitos por meio de uma atividade não convencional proporciona aos alunos uma experiência de aprendizagem mais significativa, do que somente trabalhar os conteúdos de forma mecânica. Notamos a dificuldade que os alunos apresentaram em utilizar conceitos recorrentemente trabalhados no colégio regular, e alguns a pouco tempo, como o conteúdo de geometria analítica, mostrando-nos que não houve assimilação desse conhecimento quando o estudaram na escola.

Esperamos que com o trabalho usando este jogo, os alunos possam futuramente se recordar desta atividade para usá-la em outros contextos. Segundo Lopes, Teodoro e Rezende (2011, p.79) “a atividade de jogar desempenha papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, dedutivo e indutivo; da linguagem; da criatividade; da atenção e da concentração, essenciais para o aprendizado em Matemática”.

E por fim, o último conteúdo que trabalhamos foi o de Probabilidade, o qual também possui diversas aplicações no dia a dia, além de ser um conteúdo de extrema importância no Educação Básica. Batanero (2006) *apud* Lopes, Teodoro e Rezende (2011) destaca a importância do ensino de probabilidade para educar o raciocínio probabilístico necessário para que os alunos enfrentem os acasos da vida cotidiana e melhore suas intuições. O autor relata que “os alunos devem construir seus conhecimentos mediante um processo gradual, a partir de seus erros e esforços” (Batanero *apud* LOPES; TEODORO; REZENDE, 2011, p.77).

Diante disso, com o objetivo de relacionar os conceitos de probabilidade e suas aplicações com a realidade dos alunos, desenvolvemos duas atividades práticas.

Para a primeira atividade desenvolvida, solicitamos que os alunos formassem grupos de três a quatro pessoas. Em seguida entregamos para cada grupo um tabuleiro, um dado e quatro marcadores, para que assim eles pudessem jogar o jogo “Avançando com o resto”. Explicamos como eles deveriam jogar e os mesmos começaram, enquanto isso, circulamos pela sala sanando as possíveis dúvidas que surgissem.

Os princípios básicos do jogo se davam através da identificação dos divisores de alguns números. O tabuleiro que foi entregue aos alunos era composto por determinados números naturais, todos os alunos começavam a jogar iniciando do mesmo número. Um a um os alunos deviam laçar o dado e verificar o número obtido, a partir deste número devia ser verificado o resto da divisão do número observado no tabuleiro, pelo número obtido no dado, o resto da divisão corresponde ao número de casas que o indivíduo devia avançar pelo tabuleiro, daí o nome “avançando com o resto”. Ganha o jogo, aquele que chegar primeiro na última casa do tabuleiro.

Os alunos se mostraram entusiasmados com o jogo, todos estavam participando e tentando ganhar. No decorrer do jogo eles foram percebendo questões que faziam parte dos nossos objetivos, como perceber que quando parassem no número 0 ou 60 que estão contidos no tabuleiro, eles não conseguiriam mais mover o marcador, ou seja, a probabilidade dele se mover era 0, pois todos os números do dado são divisores de 60 e nenhum deles divide o 0. Deixamos que os alunos jogassem por alguns minutos e, em seguida, levantamos alguns questionamentos com eles sobre probabilidade, como: “Quando você está na casa do número 36, qual é a chance de avançar?” e “Cite um número do tabuleiro em que a chance de avançar é de 2 em 6”. Com este tipo de indagação, levamos os alunos a perceberem quais números proporcionavam a maior e a menor chance de avançar, assim como eventos impossíveis (o número 60 e o 0). A figura 7 mostra os alunos desenvolvendo a atividade.

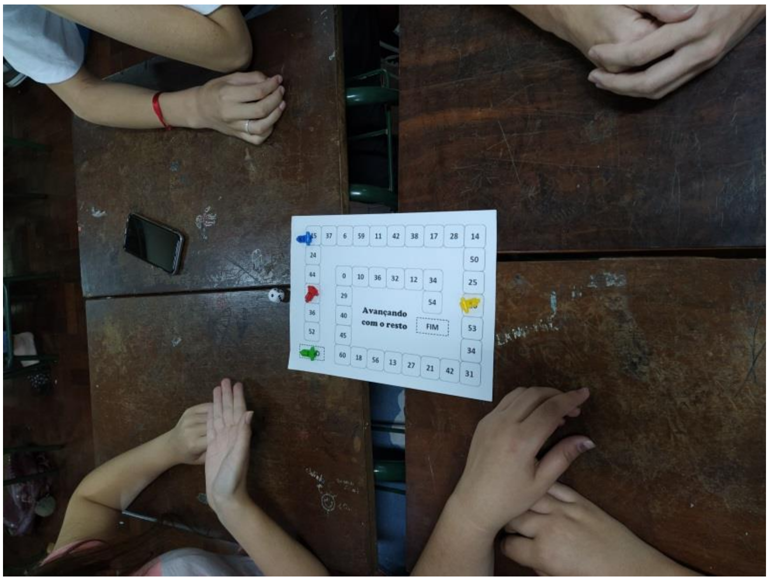


Figura 7: Alunos jogando o jogo Avançando com o resto
Fonte: Acervo dos autores

Para a segunda atividade, realizamos uma dinâmica com os alunos, o *Problema das Portas (Monty Hall).* Utilizamos três canecas para simbolizarem as portas e balas como prêmio. Pedimos a ajuda dos alunos, para que fossem os jogadores, então, o aluno deveria sair da sala por um momento, e nós colocávamos o prêmio embaixo de uma caneca, o aluno retornava e deveria acertar em qual caneca estava. Após escolher uma das canecas, retirávamos uma que não estava com o prêmio e fazíamos a seguinte pergunta: “Quer trocar?”.

Depois de realizarmos o jogo diversas vezes, perguntamos aos alunos se era mais vantajoso permanecer com a mesma caneca ou trocar, a maioria disse que era permanecer com a mesma caneca. Então explicamos por que trocar era mais vantajoso - inicialmente a chance de se escolher a caneca premiada era de uma em três, já que apenas uma caneca contém o prêmio dentre as três canecas, porém após a escolha do participante e a retirada de uma caneca, temos um jogo envolvendo apenas duas canecas sendo que uma contém o prêmio e a outra não, ou seja, a chance de se ganhar escolhendo uma caneca é de uma em duas. Dessa forma, trocar de caneca é mais vantajoso. A figura 8 mostra como se decorreu a atividade.

Figura 8: Dinâmica
Fonte: Acervo dos autores

Desta forma, podemos constar que o desenvolvimento das duas atividades práticas propiciou aulas mais atrativas para o conteúdo de probabilidade, além de mostrar aos alunos que os conceitos de probabilidade são aplicados em situações do cotidiano.

Considerações Finais

Podemos concluir, mediante nossas vivências durante o desenvolvimento do Promat, que o emprego de atividades lúdicas favorece o processo de ensino-aprendizagem. Elas contribuem para tornar a aula mais dinâmica, fazendo com que ocorra maior engajamento por partes dos alunos.

Notamos que o uso de jogos é um eficaz instrumento para a fixação dos conteúdos, sendo que podemos substituir exercícios puramente mecânicos pelo uso de uma atividade lúdica como forma de fixação de determinado conteúdo, o que torna este momento mais agradável aos alunos, fazendo com que o aprendizado seja prazeroso e significativo aos alunos. Porém, o uso de jogos não apenas é uma forma de fixação de conteúdo, visto que no jogo “o resto que avança” utilizamos essa ferramenta para introduzirmos os conceitos que pretendíamos trabalhar, sendo que o resultado foi proveitoso em relação a aprendizagem.

O uso de atividades não convencionais proporciona maior aproximação entre nós docentes e os alunos, fazendo com que a participação deles na aula aumente, não só durante as atividades lúdicas, mas também em outros momentos, pois os alunos deixam de nos verem como protagonistas, e percebem que também podem assumir esse papel, culminando assim em um enriquecimento de nossa prática pedagógica.

Como docentes cabe a nós selecionarmos atividades realmente significativas à nossa proposta de ensino, bem como um bom direcionamento destas, visto que deve haver um cuidado para que essas atividades não se tornem meramente um momento de descontração, por isso deve-se objetivar resultados a serem alcançados por meio delas.

Portanto, acreditamos que o uso de atividades lúdicas é conveniente à prática pedagógica dado que é capaz de promover aos alunos a criatividade e o pensamento matemático, além de ser um eficaz instrumento para a aproximação dos conteúdos matemáticos com o cotidiano dos alunos, que por muitas vezes é visto como impossível.

Referências

BRENELLI, Rosely Palermo. **O jogo como espaço para pensar:** a construção de noções lógicas e aritméticas. 4. ed. São Paulo: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N 2. Brasília, 1989, p. 15-19.

LOPES, José Marcos; TEODORO, João Vitor; REZENDE, Josiane de Carvalho. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. **Zetetiké**, Campinas, v. 19, n. 36, p.75-93, dez. 2011.

NILES, Rubia Paula Jacob; SOCHA, Kátia. A importância das atividades lúdicas na educação infantil. **Ágora**: Revista de Divulgação Científica, Santa Catarina, v. 19, n. 1, p.80-94, nov. 2013.

OLIVEIRA, Davi Vieira Ramos de. **A resolução de problemas como método de ensino de trigonometria.** 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2014.

OLIVEIRA, Francisco Diego Moreira. **O software geogebra como ferramenta para o ensino da geometria analítica.** 2014. 61 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal Rural do Semi-Árido - Ufersa, Mossoró, 2014.

4. MÓDULO 1: TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

4.1 Atividades dia 10/08

4.1.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 1º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Trabalhar com tratamento da informação, fazendo uso de gráficos e tabelas, relacionando esses conceitos com o cotidiano dos alunos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com tratamento da informação, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Coletar dados sobre fatos do cotidiano;
- Realizar procedimentos de organização de dados;
- Expressar e interpretar dados por meio de tabelas e gráficos;
- Fazer previsões a partir das informações dadas.

Conteúdo:

Tratamento da informação.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, barbante, computador, projetor, listas de exercícios.

Dinâmica de apresentação:

Teia de Aranha (30 minutos)

Objetivo: promover a integração entre os alunos e professor, fortalecer a comunicação e o relacionamento interpessoal dos estudantes.

Materiais: Um rolo de barbante.

Procedimento: Formar um círculo. Explicar aos alunos que será dada uma oportunidade para que aprendam mais uns dos outros. Com o rolo de barbante em mãos, o primeiro aluno precisa pegar a ponta do barbante e amarrá-la em seu dedo indicador. Então, ele diz ao grupo seu nome e faz uma apresentação pessoal: nome, idade, série que está cursando, qual curso pretende fazer e revelar algo diferente sobre si, ou um defeito, ou qualidade (sou preguiçoso, sou organizada, ou tenho um cachorro, uso lente de contato, etc.). Ao terminar a sua apresentação, o aluno joga o rolo de barbante para qualquer outra pessoa do grupo, que fará sua apresentação pessoal, da mesma forma. E quando esse aluno terminar de se apresentar, ele jogará o rolo de barbante para outra. O seguinte deverá fazer a mesma coisa, se apresentar. Quando todos tiverem terminado suas apresentações, o barbante terá formado uma grande teia no meio do círculo formado pelos integrantes do grupo. Em seguida, peça para que a última pessoa a se apresentar, devolva o rolo para quem havia lhe jogado anteriormente, na primeira etapa da dinâmica. Ao fazer isso, ela deverá repetir o nome da pessoa e o que foi apresentado sobre a vida dela.

Encaminhamento metodológico:

Após a dinâmica de apresentação explicaremos aos alunos que o PROMAT é um Projeto de Ensino institucional do Curso de Licenciatura em Matemática que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino. As atividades são direcionadas aos estudantes que buscam acesso aos cursos superiores. São ofertados conteúdos de matemática da Educação Básica exigidos nos concursos vestibulares da Unioeste, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos, na forma de “Curso Preparatório de Matemática”, objetivando a apropriação de determinados conteúdos, conceitos e estruturas matemáticas. As aulas serão ministradas por alunos estagiários do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a supervisão e orientação dos professores do Curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste de Cascavel. Em seguida, será mencionado que ocorrerão dez encontros aos sábados, sendo que esses encontros são divididos em quatro módulos, apresentando os conteúdos que serão abordados no decorrer dos encontros (Módulo 1: Tratamento de informação; Módulo 2: Trigonometria; Módulo 3: Geometria Analítica; Módulo 4: Análise Combinatória).

Feitas as apresentações e com as mesas e cadeiras previamente arranjadas em grupos de quatro alunos iremos introduzir o conteúdo de tratamento de informação por meio de um problema inicial.

Atividade 01 - Quando você faz aniversário?

(40 minutos)

Nesta atividade iremos propor que cada aluno se dirija ao quadro, sendo que neste estará construída uma tabela, como o exemplo abaixo. Cada aluno deverá assinalar o dia e o mês em que faz aniversário.

31												
⋮												
4												
3												
2												
1												
	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.

Tabela 1: Quando você faz aniversário?
Fonte: Acervo dos autores

Em seguida, entregaremos aos alunos uma lista com questões que deverão ser resolvidas pelos grupos, utilizando os dados da tabela.

Questões:

1- Quantos pessoas assinalaram a tabela?
2- Quantas pessoas fazem aniversário em cada bimestre? Trimestre? E semestre?
3- Quantas pessoas fazem aniversário antes do dia 15? E depois?
4- Construa um gráfico de barras relacionando o número de aniversariantes em cada bimestre?
5- Construa um gráfico de setores relacionando o número de aniversariantes em cada trimestre?

Em seguida, faremos a socialização das resoluções no quadro, elencando estratégias de resolução dos grupos.

Explicaremos brevemente os conceitos de população, amostra, variável e frequência, apresentando suas definições.

Def. **População:** é um conjunto de elementos que têm pelo menos uma característica em comum.

Def. **Amostra:** é um subconjunto finito formado por elementos extraídos de uma população.

Def. **Variável:** é uma característica ou um atributo estudado em todos os elementos da população.

- Variável qualitativa: seus valores são expressos por atributos (por exemplo cor dos olhos, grau de escolaridade, time preferido).
- Variável quantitativa: seus valores são expressos por números (por exemplo altura, massa, idade, número de irmãos), pode ser discreta ou contínua.
    i. Variável quantitativa discreta: quando é proveniente de contagem, ou seja, expressa por número inteiro. (Número de irmãos, quantidade de computadores, número de animais).
    ii. Variável quantitativa continua: quando é proveniente de medida, ou seja, é expressa por número real. (Massa, idade, altura, temperatura, volume).

Def. **Frequência:** É a quantidade de vezes que cada valor é observado.

Com essa atividade pretendemos abordar os conceitos de interpretação de tabelas, abordando também conceitos de medida de tempo e construção de gráficos.

Atividade 02 (30 minutos)

Realizaremos a correção da primeira atividade utilizando o *software* Excel, explicaremos aos alunos como colocar os dados em uma planilha, e depois, fazer a construção do gráfico no *software,* isso será projetado aos alunos. Em seguida, definiremos alguns tipos de gráficos, mostrando exemplos destes, para isso, também utilizaremos o projetor, assim, os alunos podem visualizar melhor.

Def. **Gráfico de Barras:**

Apresenta dados categorizados em barras retangulares nos quais os retângulos correspondentes a cada categoria são proporcionais ao número de observações na respectiva categoria. É utilizado para realizar comparações entre as categorias de uma variável qualitativa ou quantitativa discreta. Pode ser utilizado na vertical ou horizontal.

Def. **Gráfico de setores:**

Também conhecido como gráfico de pizza ou gráfico circular é um diagrama circular em que os valores de cada categoria estatística representada são proporcionais às respectivas frequências. Pode vir acompanhado de porcentagens, é utilizado principalmente para dados qualitativos normais. Para construir um gráfico tipo pizza é necessário determinar o ângulo dos setores circulares correspondentes à distribuição percentual de cada valor no total.

Def. **Gráfico Pictórico:**

Os gráficos chamados pictogramas exibem os dados por meio de símbolos autoexplicativos que, geralmente, estão relacionados com o tema apresentado, que confere eficiência e atratividade ao resultado final.

Def. **Gráficos de linhas:**

Conectam pontos de dados individuais em uma exibição. Eles fornecem uma forma simples de visualizar uma sequência de valores, sendo úteis quando se quer ver tendências ao longo do tempo ou para prever valores futuros.

Mostraremos no gráfico de linhas os conceitos de média, mediana e moda. Em seguida apresentaremos as definições sobre estes conceitos, explicando-as.

Def. **Média Aritmética:** é o quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações.

Def. **Média Aritmética Ponderada:** é a soma dos valores observados multiplicados pela quantidade de vezes que se repete, divido pelo número de observações.

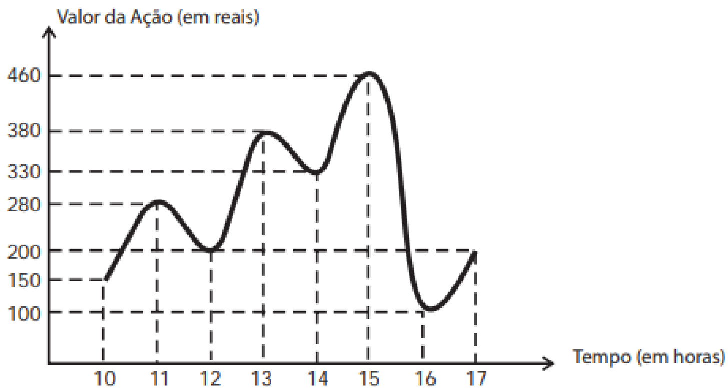
Def. **Mediana:** é o valor que divide um grupo, previamente ordenado de modo crescente ou decrescente, em duas partes com o mesmo número de termos.

Def. **Moda:** são os valores que aparecem com maior frequência no conjunto de valores observados (população ou amostra).

Atividade 03 (40 minutos)

Posteriormente, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios, que deverá ser resolvida em sala pelos alunos nos grupos. Enquanto os alunos resolvem os exercícios auxiliaremos os alunos a encontrarem estratégias de resolução.

1. (Questão adaptada ENEM 2012) O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da Compra	Hora da Venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

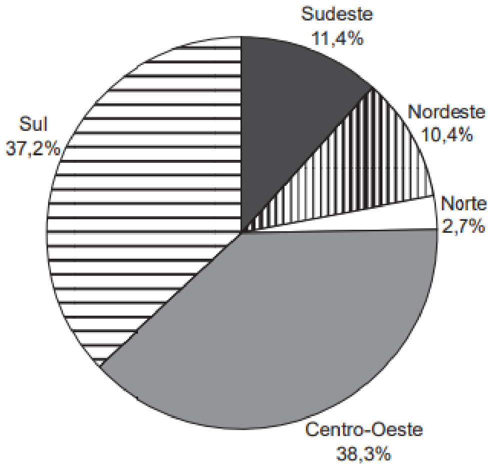
Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

Resolução: Faremos uma tabela, contendo a comparação dos dados fornecidos.

Investidor	*Valor da Compra*	*Valor da Venda*	*Lucro obtido*
1	*150,00*	*460,00*	*310,00*
2	*150,00*	*200,00*	*50,00*
3	*380,00*	*460,00*	*80,00*
4	*460,00*	*100,00*	*-360,00*
5	*100,00*	*200,00*	*100,00*

Observando a tabela, percebemos que o investidor que teve maior lucro, fez o melhor negócio, foi o primeiro.

2. (Questão adaptada ENEM 2017) Estimativas do IBGE para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, apontavam uma participação por região conforme indicado no gráfico.



As estimativas indicavam que as duas regiões maiores produtoras produziriam, juntas, um total de 119,9 milhões de toneladas dessas culturas, em 2012. De acordo com esses dados, qual seria o valor mais próximo da produção, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleoginosas, em 2012, na Região Sudeste do país?

Resolução: Resolveremos por meio da "regra de três".

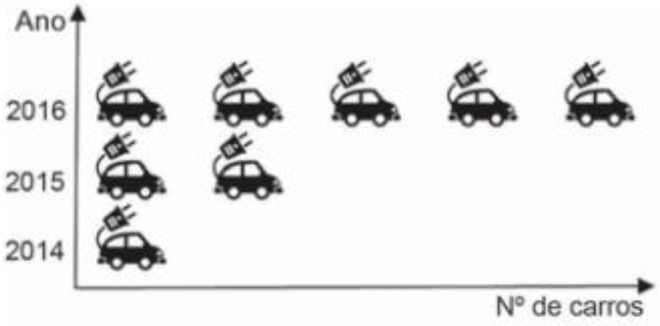
$$119{,}9 \text{ ——— } 75{,}5$$

$$x \text{ ——— } 11{,}4$$

$$75{,}5x = 119{,}9 \cdot 11{,}4$$

$$x = \frac{1366{,}86}{75{,}5} = 18{,}1\, milhões$$

3. (Questão adaptada ENEM 2018) De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.
   No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca A, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.



Disponível em: www.tecmundo.com.br. Acesso em: 5 dez. 2017.

   Qual a média anual do número de carros vendidos pela marca A, nos anos representados no gráfico?
   Resolução: Sendo cada carrinho uma quantidade x de carros vendidos. Ou seja, em 2016 foram vendidos 5x carros e em 2015, 2x. Segundo o enunciado, temos:

$$5x = 2x + 360$$
$$5x - 2x = 360$$
$$3x = 360 \Rightarrow x = 120$$

   Assim, em 2016 foram vendidos 600 carros, em 2015, 240 carros e em 2014, 120 carros. Fazendo a média desses valores, temos:

$$\bar{x} = \frac{600 + 240 + 120}{3} = 320$$

4. (Questão adaptada ENEM 2018) A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa

pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

Os resultados obtidos estão no quadro abaixo.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

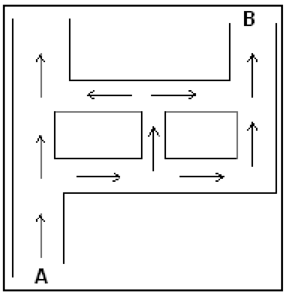
Qual a média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará a diretoria da empresa?

Resolução:

$$média = \frac{(0 \cdot 50) + (1 \cdot 17) + (2 \cdot 15) + (3 \cdot 10) + (4 \cdot 6) + (5 \cdot 2)}{100}$$

$$média = \frac{0 + 17 + 30 + 30 + 24 + 10}{100} = \frac{111}{100} = 1{,}11$$

5. (Questão adaptada ENEM 2007) A figura ao lado representa uma região de ruas de mão única. O número de carros se divide igualmente em cada local onde existam duas opções de direções, conforme a figura. Se 320 carros entram em A, quantos deixam a saída B?

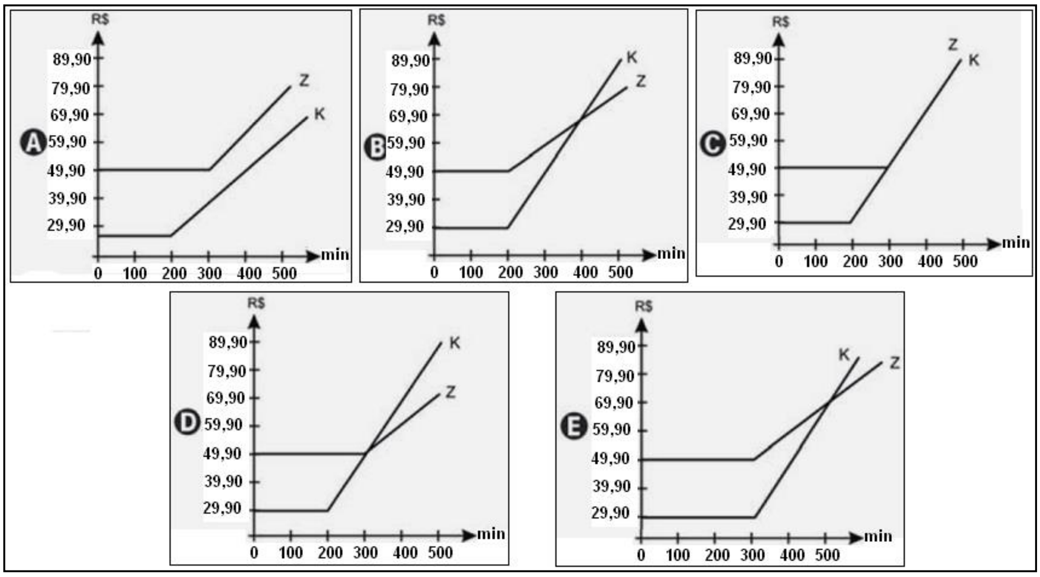


Resolução: Essa resolução se dará por meio apenas da interpretação e raciocínio dos alunos, pois, os mesmos deverão entender que a cada bifurcação o número de veículos se divide igualmente.

Assim, entram 320 carros, depois da primeira bifurcação, seguem 160 para a saída B. Na segunda bifurcação seguem 80 carros direto para a saída B, enquanto os outros 80 se dividem novamente, assim, seguem mais 40 carros para a saída. Então temos um total de 80+40=120 carros que deixam a saída B.

6. Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$29,90 por 200 minutos mensais e R$0,20 por

cada minuto excedente; no plano Z, paga R$49,90 por 300 minutos mensais e R$0,10 por cada minuto excedente. O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:



Resolução: Até 200 minutos o gráfico do plano K é uma reta horizontal indicando o valor constante de R$29,90. A partir desse tempo obedecerá à lei de uma função afim K(x) = 29,90 + 0,2x.

Até 300 minutos o gráfico do plano Z é uma reta horizontal indicando o valor constante de R$49,90. A partir desse tempo obedecerá à lei de uma função afim Z(x) = 49,90 + 0,1x.

No plano K, quem consome 300 minutos, consome (300 – 200) = 100 minutos a mais. Logo, pagará K(100) = 29,90 + 0,2.(100) = 29,90 + 20 = R$49,90. Logo, em 300 minutos os gráficos se encontram.

Como o coeficiente de "x" no plano K é maior que o do plano Z (0,2 > 0,1) o gráfico da função afim K(x) possui maior inclinação que o de Z(x). Essas condições estão representadas no gráfico D.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação e resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

DINÂMICAS PARA GRUPOS. CONHECENDO E APRENDENDO. Disponível em: <https://professoremsala.com.br/5-dinamicas-excelentes-para-o-primeiro-dia-de-aula/>. Acesso em: 28 mai. 2019.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática 3**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVA DO ENEM 2007. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2007/2007_amarela.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2019.

PROVA DO ENEM 2012. Disponível em: <https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2013/06/03_BRANCO.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2019.

PROVA DO ENEM 2017. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_5_prova_amarelo_12112017.pdf>. Acesso em: 29 mai. 2019.

PROVA DO ENEM 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf>. Acesso em: 29 mai. 2019.

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO. **Quando você faz aniversário?** Disponível em: <http://www.ensinandomatematica.com/tratamento-da-informacao-nos-anos-iniciais/>. Acesso em: 28 mai. 2019.

4.1.2 Relatório

No dia 10 de agosto de 2019, sábado, tivemos o primeiro encontro do Promat na Unioeste, Cascavel. Estavam presentes 28 alunos. Desses, 24 já frequentaram as atividades do Promat no primeiro semestre e 4 iniciaram nesse dia. Nosso grupo é formado por quatro estagiários, que se alternaram na explanação das atividades propostas. Começamos a aula cumprimentando e agradecendo a presença de todos, apresentando o projeto e, também nos apresentando de forma rápida. Após isso, fizemos um pedido de participação dos alunos, ressaltando que, não devem apenas se contentar em ouvir o professor explanando o conteúdo, mas participarem ativamente da aula, sanando todas as suas dúvidas. Explicamos também o porquê das carteiras estarem dispostas em grupos, pois acreditamos que o trabalho em grupo propicia um melhor aprendizado e troca de conhecimentos entre os alunos.

Em seguida, a aula se voltou a uma atividade de integração entre os alunos os quais deveriam falar características pessoais a toda sala. Entre essas características colocamos algumas como principais, sendo que essas deveriam ser ditas por todos, tais como nome, colégio que estuda e qual curso pretendiam fazer na graduação, e uma característica que considerasse marcante. Sentimos que os alunos estavam “presos”, tímidos no início da atividade, mas conforme iam se apresentando, começavam a falar mais livremente com os colegas. Durante a atividade alguns alunos chegaram atrasados, porém, solicitamos que se juntassem a nós explicando a atividade que estávamos realizando.

Posteriormente, iniciamos o conteúdo de tratamento da informação por meio de uma tabela construída no quadro, na qual cada aluno assinalou o dia e o mês em que faz aniversário. Em seguida, entregamos algumas questões para os alunos responderem, as quais envolviam conceitos de medida de tempo (bimestre, trimestre, semestre) e construções de gráficos de barras e setores. Nesta atividade, percebemos que os alunos apresentaram dificuldades nas construções dos gráficos, principalmente no gráfico de barras, pois não tinham compreensão de como as barras eram dispostas nos eixos. Para finalizar, realizamos a correção no quadro com a ajuda dos alunos e mostramos por meio do *software* Excel como ficaram os gráficos, explicando brevemente aos alunos como fazer a construção neste *software.*

Na sequência, projetamos as definições de população, amostra, variável e frequência, explicando e elencando exemplos para melhor compreensão dos alunos. Um aluno relatou que isso é aplicado nas pesquisas do IBGE. Após, projetamos também as definições de média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda, perguntando aos alunos se já tinham visto isso e no que pode ser aplicado. Os alunos responderam que geralmente é utilizado para calcular as notas escolares. Com isso, utilizamos cinco notas, sendo elas três de trabalhos e duas de provas e com a ajuda dos alunos realizamos o cálculo das médias, mediana e moda no quadro, para que todos compreendessem os conceitos

Após, projetamos as definições dos gráficos, sendo eles de barras, setores, pictórico e de linhas, apresentando exemplos construídos no *software* Excel. A maioria dos alunos já conhecia ou já tinham visto esses gráficos em algum lugar, seja em Matemática ou em outra disciplina como, por exemplo, Geografia. O gráfico que os alunos tinham menos conhecimento era o pictórico, por não apresentar valores, somente figuras, porém relataram que viram algo parecido no exame do ENEM.

Posteriormente, entregamos aos alunos uma lista de exercícios, para ser resolvida em sala nos grupos. Enquanto os alunos resolviam os exercícios circulávamos pela sala, observando e dispostos a tirar dúvidas. Os exercícios eram adaptados do ENEM e englobavam todos os conceitos trabalhados anteriormente. Os alunos não apresentaram muitas dificuldades nas resoluções e quando apresentavam alguma dúvida, nos chamavam no grupo e logo sanávamos essa. Por fim, realizamos a correção de todos os exercícios no quadro com a ajuda dos alunos, sempre perguntando a eles qual estratégia utilizaram para resolver e considerando sempre cada uma das estratégias.

Por fim, apresentamos o conteúdo a ser trabalhado no próximo encontro, agradecendo a presença de todos e nos despedindo.

5. MÓDULO 2: TRIGONOMETRIA

5.1 Atividades dia 17/08

5.1.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 2º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a identificar as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar as razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Aplicar as razões trigonométricas na resolução dos problemas contextualizados;
- Relacionar conceitos de trigonometria à vida cotidiana, contribuindo no desenvolvimento do raciocínio;
- Identificar as principais relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Conteúdo:

Trigonometria no triângulo retângulo.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, computador, projetor, lista de exercícios, material impresso.

Encaminhamento metodológico

Iniciaremos a aula saudando os alunos e em seguida iremos introduzir o conteúdo por meio da realização de uma atividade.

Atividade 01 (40 minutos)

Entregaremos a cada grupo um jogo formado com cinco triângulos retângulos semelhantes de tamanhos diferentes, sendo que um dos triângulos tenha desenhado o ângulo reto. Em seguida, faremos os seguintes questionamentos aos alunos:

- O que os triângulos têm em comum?

  - Queremos que digam que os três são triângulos retângulos e, portanto, possuem um ângulo reto.
- Estes triângulos são semelhantes? Seus ângulos são iguais?

  - Ao medirmos os ângulos com o transferidor percebe-se que três dos triângulos possuem ângulos de 30º, 60º e 90º, o que os torna semelhantes. Os outros dois triângulos possuem dois ângulos de 45º e um ângulo de 90º e, portanto, também são semelhantes.
- Ao medirmos os lados dos triângulos com uma régua e dividirmos seus lados equivalentes, esta medida é diferente dependendo do tamanho do triângulo?

  - Não, nos triângulos semelhantes esta medida deve ser igual.
- O que podemos concluir com isto?

  - As medidas obtidas equivalem à medida do seno, do cosseno e da tangente dos triângulos, que são equivalentes para triângulos semelhantes, porém se alterarmos o valor dos ângulos esta medida será diferente da encontrada no momento.

Por meio da relação de Tales, mostraremos as semelhanças entre triângulos:

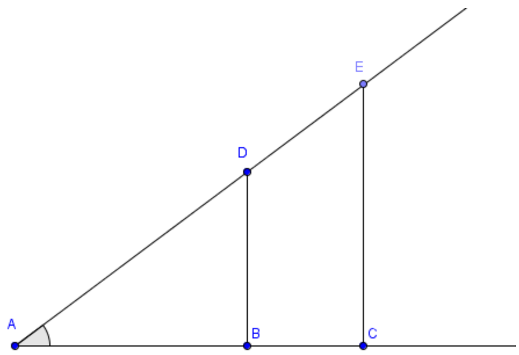


Figura 9: Teorema de Tales
Fonte: Acervo dos autores

Utilizando o que vimos com os triângulos, podemos concluir que as medidas de seno, cosseno e tangente são as mesmas em triângulos semelhantes. Define-se assim as fórmulas de cada uma destas medidas:

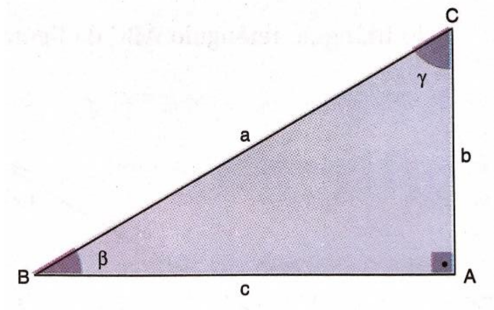


Figura 10: Relações no triângulo
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Def. Seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa.

$$sen\ \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{medida\ da\ hipotenusa} \to sen\ \beta = \frac{b}{a}$$

$$sen\ \gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{C}}{medida\ da\ hipotenusa} \to sen\ \gamma = \frac{c}{a}$$

Def. Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa.

$$cos\ \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}}{medida\ da\ hipotenusa} \to cos\ \beta = \frac{c}{a}$$

$$cos\ \gamma = \frac{AC}{BC} = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{C}}{medida\ da\ hipotenusa} \to cos\ \gamma = \frac{b}{a}$$

Def. Tangente de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo.

$$tg\ \beta = \frac{AC}{AB} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}} \to tg\ \beta = \frac{b}{c}$$

$$tg\ \gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{C}}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{C}} \to tg\ \gamma = \frac{c}{b}$$

No triângulo retângulo ABC, $\beta + \gamma = 90° \left(\hat{B} e\ \hat{C}\ são\ complementares\right)$.

$$\left.\begin{aligned} sen\ \beta &= \frac{b}{a} \\ cos\ \gamma &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \quad sen\ \beta = \cos\gamma$$

$$\left.\begin{aligned} sen\,\gamma &= \frac{c}{a} \\ cos\,\beta &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} \quad sen\,\gamma = \cos\beta$$

Def. O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento. De fato, o nome *cosseno* se origina de *seno do ângulo complementar*.

Atividade 02 (30 minutos)

Vamos desenhar um triângulo equilátero no quadro, de lado l, como na figura abaixo. Em seguida, mostraremos como encontrar a altura desse triângulo em função do lado.

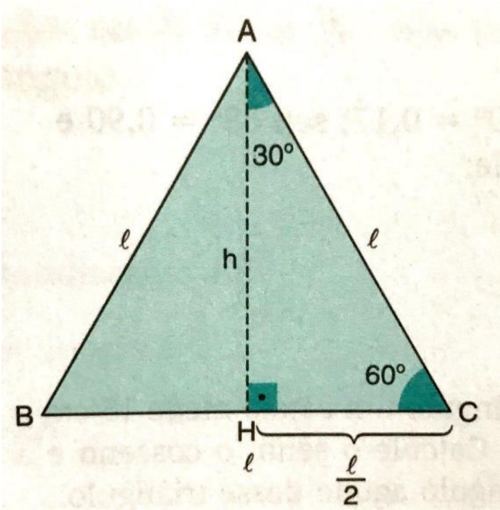


Figura 11: Triângulo Equilátero
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Altura do triângulo:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = -\frac{l^2}{4} + l^2$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Com isso, explicaremos como encontrar o valor do seno, cosseno e tangente de 30° e 60°.

$$sen\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

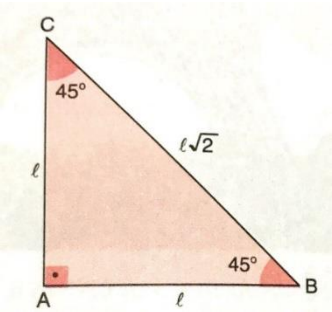
$$tg\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\ 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} = \sqrt{3}$$

Em seguida, faremos a representação de um triângulo retângulo isósceles, os catetos têm medida l e a hipotenusa mede $l\sqrt{2}$.



$$sen\ 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45° = \frac{l}{l} = 1$$

Figura 12: Triângulo Equilátero
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

	sen	cos	Tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Tabela 2: Tabela valores de seno, cosseno e tangente
Fonte: Acervo dos autores

Atividade 03 (40 minutos)

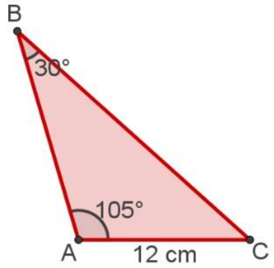
Após, explicaremos a Lei dos Senos e Cossenos, mostrando um exemplo de aplicação.

<u>Lei dos Senos:</u>

As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

<u>Exemplo:</u> (Mackenzie – SP) Três ilhas A, B e C aparecem num mapa em escala 1:10000, como na figura. A distância entre as ilhas A e B é?



Resolução: Pela soma das medidas internas de um triângulo temos:

$$\frac{x}{sen(45°)} = \frac{12}{sen(30°)}$$

$$12sen(45°) = xsen(30°)$$

$$12\frac{\sqrt{2}}{2} = x\frac{1}{2}$$

$$12\sqrt{2} = x$$

$$x = 12 \cdot 1{,}4142$$

$$x = 16{,}97$$

<u>Lei dos Cossenos:</u>

Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

- Vamos aplicar a lei dos cossenos para o lado oposto ao ângulo de 90º, conforme indicado abaixo:

$$a^2 + b^2 = c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90°$$

Como cos 90º = 0, a expressão acima fica:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Que é igual a expressão do Teorema de Pitágoras. Assim, podemos dizer que este teorema é um caso particular da lei dos cossenos.

<u>Exemplo:</u>

Um avião decola e voa 90 km na direção norte. Em seguida, gira 15° no sentido horário e voa, na nova direção, 115 km até pousar. Qual foi a distância entre os pontos de chegada e de saída? (Considere $\cos(165°) = 0{,}966$).

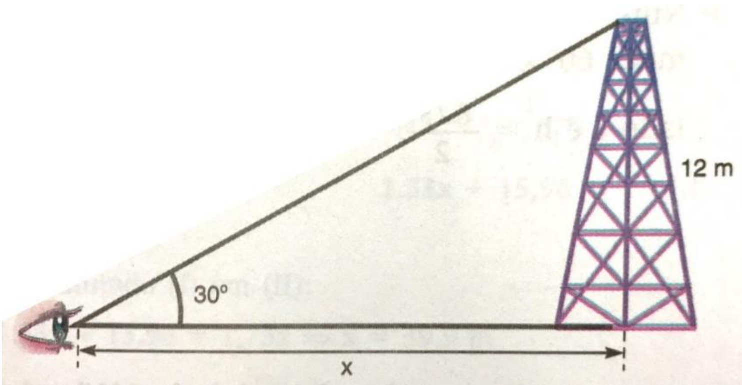
Resolução: Utilizando a Lei dos Cossenos temos:

$$d^2 = 90^2 + 115^2 - 2 \cdot 90 \cdot 115 \cdot cos(165°)$$
$$d^2 = 8100 + 13225 - 20700(-0{,}966)$$
$$d^2 = 21325 + 19996$$
$$d^2 = 41291$$
$$d = 203{,}2km.$$

Atividade 04 (40 minutos)

Entregaremos aos alunos uma lista de exercícios para serem resolvidos em sala.

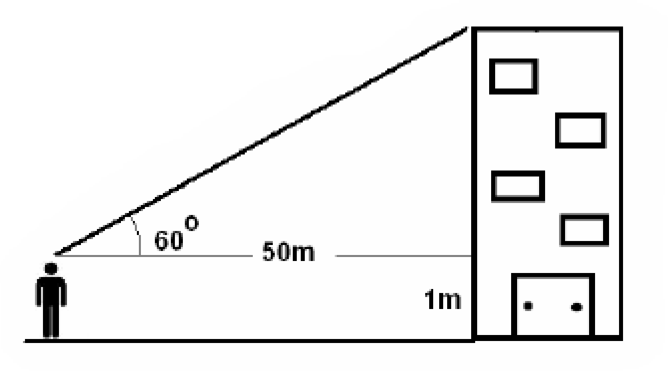
1. Uma torre vertical, de altura 12 metros, é vista sob um ângulo de 30° por uma pessoa que se encontra a uma distância x da sua base, e cujos olhos estão no mesmo plano horizontal dessa base. Determine a distância x. Dado tg 30°=0,58.



Resolução:

$$tg\ 30° = \frac{12}{x}$$
$$x = \frac{12}{0{,}58} = 20{,}6\ m$$

2. Para determinar a altura de um prédio, um estudante observa que, ao se posicionar a 50 metros deste (conforme ilustrado na figura abaixo), o ângulo formado entre o ponto mais alto do prédio e a linha horizontal é de 60°. Se a altura do ponto de medição é de 1 metro, qual o valor, em metros, da altura do prédio?



Resolução: A altura do prédio (x) é o cateto oposto ao ângulo de 60º, a distância do estudante ao prédio (50 m) é o cateto adjacente ao ângulo de 60º. Então, poderemos aplicar a função trigonométrica tangente para a resolução da questão

$$tg\ 60° = \frac{x}{50}$$

$$x = 1{,}73 \times 50m$$

$$x = 86{,}60m$$

Acrescentando agora a altura do aparelho, teremos a altura do prédio:

$$86{,}60m + 1m = 87{,}60m$$

3. Quando o Sol está a 30° acima do horizonte, um edifício de 100 metros projeta uma sombra de quantos metros?

$$tg\ 30° = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{100}{0{,}58} = 172{,}4m$$

4. No golfe, um *slice* é uma tacada que sofreu um desvio para a direita da direção originalmente pretendida e um *hook* é o equivalente *slice* à esquerda (considerando jogadores destros). Em uma partida do torneio dos campeões, um jogador deu uma tacada de 165 metros com *slice* de 12° em relação à

linha reta na direção do buraco 10. Sabendo que, no momento da tacada, esse jogador se encontrava a 220 metros do buraco 10, qual é a distância entre o ponto onde a bola parou e esse buraco? (Considere cos12°= 0,96).

Resolução: Utilizando a Lei dos Cossenos temos:

$$d^2 = 220^2 + 165^2 - 2 \cdot 220 \cdot 165 \cdot cos(12°)$$

$$d^2 = 48400 + 27225 - 72600 \cdot 0{,}96$$

$$d^2 = 75625 - 69696$$

$$d^2 = 5929$$

$$d = 77mt.$$

Após as resoluções, entregaremos outra lista de exercícios para casa, a qual corrigiremos na próxima aula. (Anexo 1)

Avaliação:

A avaliação se desenvolverá no decorrer da aula por meio da observação e registro do desenvolvimento dos conceitos aprendidos pelos alunos em suas resoluções, e ainda por meio das resoluções da lista de exercícios que foi entregue.

Referências:

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/brincando-com-trigonometria-problemas/>. Acesso em: 12 jun. 2019.

GIOVANNI, Jose Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: Ftd, 2002.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVA DO ENEM 2013. Disponível em: <https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/gabarito-oficial-enem-2013.htm>. Acesso em: 12 jun. 2019.

QUESTÕES DE MATEMÁTICA. Disponível em: <https://estudaquepassa.com.br/concursos/questoes?topics=112&page=864>. Acesso em: 12 jun. 2019.

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO. Disponível em: <http://angloresolve.plurall.net/press/question/767329>. Acesso em: 12 jun. 2019.

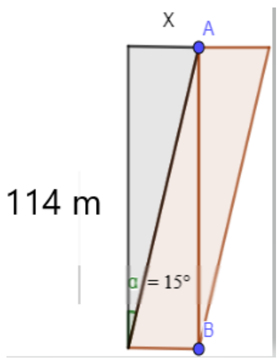
Anexo 1

Lista de exercícios – 2º Encontro

1. (Questão adaptada de ENEM (2013)) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento $\overline{AB}$). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, qual o espaço ocupado pela área da base desse prédio na avenida?

Resolução: Vamos analisar o triângulo formado pela inclinação desse prédio:



Podemos considerar que a altura do prédio corresponde ao cateto adjacente ao ângulo de 15°, já a base corresponde ao cateto oposto. Sendo assim, podemos utilizar a fórmula da tangente para determinar essa base:

$$tg15° = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$tg15° = \frac{x}{114}.$$

Considerando que $tg15° = 0{,}26$*, como propõe o enunciado, temos:*

$$0{,}26 = \frac{x}{114}$$

$$x = 114 \times 0{,}26$$

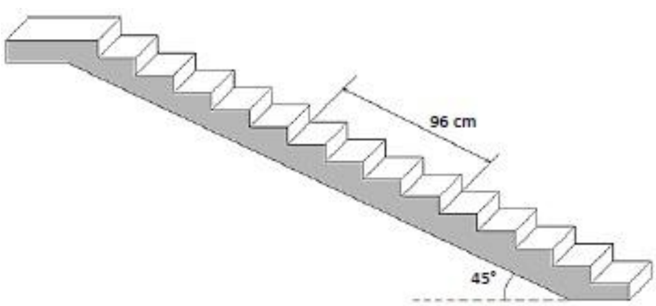
$$x = 29{,}64m.$$

Como a base do prédio é quadrada, basta multiplicar o valor do lado encontrado por ele mesmo para encontrar a área da base:

$$A = 29{,}64 \times 29{,}64$$

$$A = 878{,}53m^2.$$

2. A figura a seguir representa uma escada.



Qual a altura dessa escada?

Resolução: A distância do início do 6º degrau ao fim do 9 º degrau (ou seja, 4 degraus) medem 96 cm então precisamos descobrir quantos centímetros medem os 14 degraus da escada. Então temos:

Degraus	*Cm*
4	*96*
14	*x*

$$\frac{4}{14} = \frac{96}{x}$$

$$4x = 14 \times 96$$

$$x = 336cm.$$

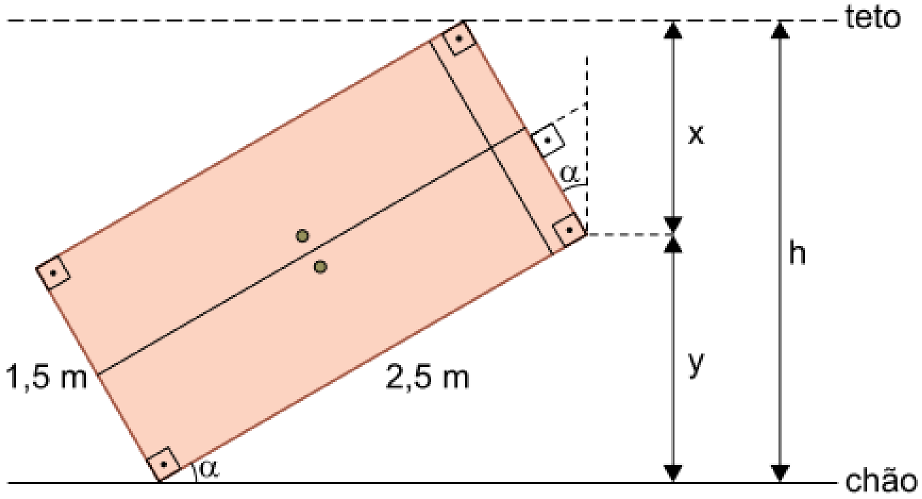
Sabendo a hipotenusa e o $sen45^o$, então conseguimos descobrir a altura da escada:

$$sen45° = \frac{h}{336}$$

$$h = 237{,}58cm.$$

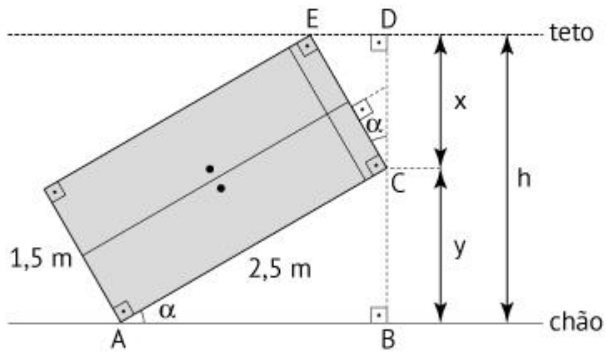
Ou ainda a altura da escada é aproximadamente 2,37 metros.

3. (Questão adaptada de UNIFESP (2016) Por razões técnicas, um armário de altura 2,5 metros e largura 1,5 metro está sendo deslocado por um corredor, de altura h metros, na posição mostrada pela figura.



Calcule h para o caso em que α = 30º.

Resolução:



Considerando o triângulo $A\hat{B}C$, e sabendo-se que $\alpha = 30°$ pode-se escrever:

$$sen30° = \frac{y}{2{,}5}$$

$$y = 1{,}25$$

Considerando o triângulo $E\widehat{D}C$, e sabendo-se que $\alpha = 30°$ pode-se escrever:

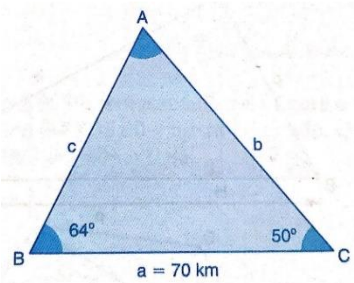
$$cos30° = \frac{x}{1,5}$$

$$x = 1,30$$

Assim $h = 1,25 + 1,30$, ou seja, $h = 2,55$ metros.

4. Um barco de pescadores A emite um sinal de socorro que é recebido por dois radioamadores, B e C, distantes entre si 70 km. Sabendo que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ medem, respectivamente, 64° e 50°, determine qual radioamador se encontra mais próximo do barco. A que distância ele está do barco? (Se necessário, considere $sen(64°) = 0,90, sen(66°) = 0,90 \ e \ sen(50°) = 0,77$)

Resolução: Temos que:



$$med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = 180°$$

$$med(\hat{A}) + 64° + 50° = 180°$$

$$med(\hat{A}) = 66°$$

Usando a lei dos senos:

$$\frac{70}{sen(66°)} = \frac{b}{sen(64°)} = \frac{c}{sen(50°)} \Rightarrow \frac{70}{0,91} = \frac{b}{0,90} = \frac{c}{0,77}$$

$$\frac{70}{0,91} = \frac{b}{0,90} \Rightarrow b = 69,2 \ km$$

$$\frac{70}{0,91} = \frac{c}{0,77} \Rightarrow c = 59,2 \ km$$

O radioamador mais próximo do barco é o B. Ele está a 59,2 km do barco.

5.1.2 Relatório

No dia 17 de agosto de 2019, sábado, tivemos o segundo encontro do Promat na Unioeste, Cascavel. Neste dia enfrentamos problemas antes mesmo do início da aula, pois tivemos que mudar de sala, o que provocou atrasos, pois alguns alunos se dirigiam à sala usada no encontro anterior, além do fato de que novos alunos também começariam este dia e tinham a indicação da sala. Desta maneira inicialmente contávamos com poucos alunos presentes, porém como o horário destinado para o início da aula havia chegado demos início a aula cumprimentando e agradecendo a presença de todos. Como não havíamos deixado atividades para os alunos desenvolverem em casa, comentamos que iniciaríamos o conteúdo de trigonometria. Durante este momento inicial outros alunos chegaram e por fim contávamos com 32 alunos presentes, sendo que 17 desses estavam presentes também no primeiro encontro.

Para este dia preparamos a aula com o intuito de trabalhar as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, as quais decidimos introduzir por meio de uma atividade prática. Para isso entregamos a cada grupo um jogo formado com cinco triângulos retângulos semelhantes de tamanhos diferentes, sendo que um dos triângulos tinha desenhado o ângulo reto.

Para estabelecermos essas relações indagamos os alunos utilizando de questionamentos sobre os triângulos e suas medidas como “O que os triângulos têm em comum? “, “Esses triângulos são semelhantes? Seus ângulos são iguais?”. nos utilizando também do quadro para isso. Por fim, projetamos as definições acerca desse tema, nos preocupando sempre em enfatizar o que havíamos feito anteriormente, de modo que eles percebessem a funcionalidade disto para qualquer triângulo retângulo.

Após a atividade inicial demos início à segunda atividade que tinha como intuito mostrar aos alunos os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, 45° e 90°. Para isso desenhamos no quadro um triângulo isósceles como o da figura a seguir:

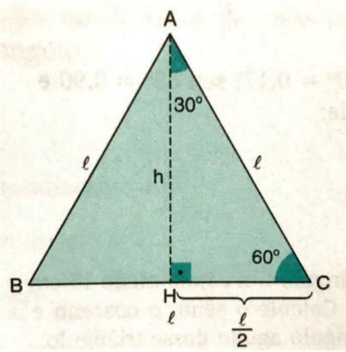


Figura 13: Triângulo Equilátero
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Primeiramente encontramos a altura *h* utilizando o teorema de Pitágoras, e utilizando das definições trabalhadas anteriormente encontramos os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30° e 60°.

Para o ângulo de 45° utilizamos um triângulo como o da figura a seguir:

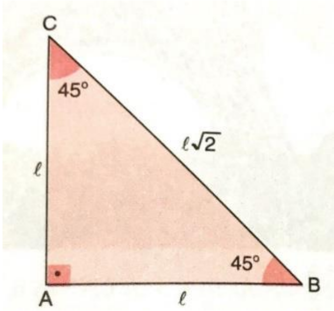


Figura 14: Triângulo Equilátero
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Realizamos no quadro, juntamente com os alunos a obtenção dos valores de seno, cosseno e tangente para este ângulo.

Após feito isso um aluno realizou o seguinte questionamento. “Não seria mais fácil colocar valores para os lados dos triângulos?”. Então respondemos a ele que se fizéssemos isso estaríamos perdendo a generalidade do resultado, e que aquele resultado só seria válido para aquele triângulo, e do modo que fizemos poderíamos afirmar que os valores encontrados valem para qualquer triângulo não importando a medida de seus lados.

Em seguida demos início à explanação de conceitos sobre lei dos senos e cossenos, em que projetávamos as definições e por meio de um exemplo explicávamos sua aplicação. Acreditamos que os alunos conseguiram compreender a utilização destes conceitos, já que frisamos durante a explicação a importância de se realizar um esboço de desenho para representar a situação, pois a visualização ajuda na resolução de problemas que envolvam este conteúdo.

Na sequência entregamos uma lista de exercícios para ser feita em sala, a qual corrigiríamos ainda neste encontro. Neste momento nos colocamos à disposição dos alunos para ajudá-los em eventuais dúvidas que surgissem durante a resolução dos exercícios, sempre dispostos a relembrar os conceitos trabalhados anteriormente.

Não percebemos muitas dúvidas dos alunos, apenas pequenos erros de interpretação e dificuldade em visualizar uma estratégia de resolução. Dessa forma, após praticamente toda a turma concluir os exercícios propostos demos início à correção feita no quadro.

Durante a correção buscávamos ter a participação dos alunos, o que conseguimos. Oralmente os alunos nos auxiliavam na obtenção de estratégias de resolução para os exercícios. Concluída a correção entregamos uma nova lista de exercícios a qual deve ser feita em casa e dissemos que na próxima aula ouviríamos as dúvidas que surgirem e trabalharíamos de forma a saná-las. Como o horário despendido para a aula estava terminando, nos despedimos dos alunos e encerramos o encontro.

5.2 Atividades dia 24/08

5.2.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 3º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a compreenderem os conceitos de trigonometria no ciclo trigonométrico e resolver problemas que os envolvem.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender o que são ângulos, arcos e medidas de ângulo em grau e radiano;
- Converter radianos em grau e graus em radianos;
- Identificar ângulos suplementares, explementares, replementares e complementares;
- Construir o ciclo trigonométrico;
- Identificar e analisar as razões trigonométricas no ciclo trigonométrico;
- Reduzir arcos ao primeiro quadrante;

Conteúdo:

Trigonometria.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Atividade 01 (30 minutos)

Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção dos exercícios propostos para serem feitos em casa.

Atividade 02 (15 minutos)

Após, daremos início ao conteúdo de ângulos e arcos. Resolveremos, junto com os alunos a seguinte questão:

1. Um pêndulo de 50cm, descreve um movimento no qual suas posições extremas formam um ângulo de 45º. Determine o comprimento dessa trajetória (de uma posição extrema à outra).

   Resolução: Se o movimento realizado completasse uma circunferência, o comprimento da trajetória seria $2\pi \times 50 = 100\pi\ cm$. *Porém, a trajetória envolve apenas uma parte dessa circunferência (relativa ao ângulo).*

   Se chamarmos de l o comprimento da circunferência, temos:

$$l = \frac{2\pi r}{360°} = \frac{100\pi}{360°}.$$

   Agora sendo x o comprimento da trajetória percorrida pelo pêndulo, temos a regra de três:

$$\frac{100\pi}{360°} = \frac{x}{45°} \quad \rightarrow \quad 360x = 4500\pi \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{4500\pi}{360} \quad \rightarrow \quad x = 12{,}5\pi\ cm \quad \rightarrow \quad x \approx 39{,}27cm.$$

Após a resolução, indagaremos aos alunos como se chama essa trajetória realizada pelo pêndulo, com o intuito de abordar arco de circunferência. Assim, relembraremos primeiro o conceito de ângulo e, em seguida, definiremos arco, grau e radianos.

<u>Ângulos:</u>

- *Ângulo* é a região do plano limitada por duas semirretas de mesma origem.
- Dois ângulos que têm a mesma medida são chamados de *ângulos congruentes*.
- Os ângulos são *complementares* se ao somá-los o resultado obtido é 90°.
- Os ângulos são *suplementares* se ao somá-los o resultado obtido é 180°.
- Os ângulos são r*eplementares* se ao somá-los o resultado obtido é 360°.

<u>*Arcos:*</u> é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos.

- Dado um arco α, os arcos côngruos a ele são da forma
  $\alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$.
  Ex: 60° é côngruo a -300, 420°, 780°, 1140°, ...

<u>*Grau:*</u> é cada uma das 360 partes iguais da divisão de uma circunferência.

<u>*Radiano:*</u> é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência correspondente.

Começaremos a explicação relembrando que uma circunferência tem 2πr de comprimento. Com isso, dividiremos a circunferência ao meio, sendo assim, cada parte terá πr de comprimento, ou seja, 1π rad.

$$2\pi\, rad \text{ —— } 360°$$
$$\pi\, rad \text{ —— } 180°$$
$$\frac{\pi}{2}\, rad \text{ —— } 90°$$
$$\frac{\pi}{3}\, rad \text{ —— } 60°$$
$$\frac{\pi}{4}\, rad \text{ —— } 45°$$

<u>Exemplo:</u>

Um arco mede 30°. Qual é a medida desse arco em radianos?

Resolução:

Podemos estabelecer a regra de três simples:

$$\pi\, rad \text{ —— } 180°$$
$$x \text{ —— } 30°$$

Daí, $x = \frac{30° \cdot \pi\, rad}{180°} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}\, rad.$

Atividade 03 (60 minutos)

Nesta atividade, iremos propor aos alunos a construção do ciclo trigonométrico. Procederemos da seguinte forma:

i. Entregaremos uma folha quadriculada e pediremos aos alunos que construam uma circunferência, de raio $r = 1$, centrada no ponto $O = (0{,}0)$ de um plano cartesiano;

ii. Após eles deverão medir, com o auxílio do transferidor, e marcar os seguintes ângulos (considerando que o ângulo 0° é o ângulo que está sobre o eixo positivo das abcissas): $0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°,$ $270°, 300°, 315°, 330°\ e\ 360°$;

iii. Solicitaremos que os alunos tracem uma reta tangente ao ponto $A = (1{,}0)$, sendo que essa será utilizada para medir a tangente de um ângulo.

iv. Pediremos que eles façam um furo no ponto O, no qual deverão passar um barbante que iremos entregar. O mesmo deverá ser colado no verso da folha.

v. Dessa forma, esperamos que eles construam algo como a imagem a seguir:

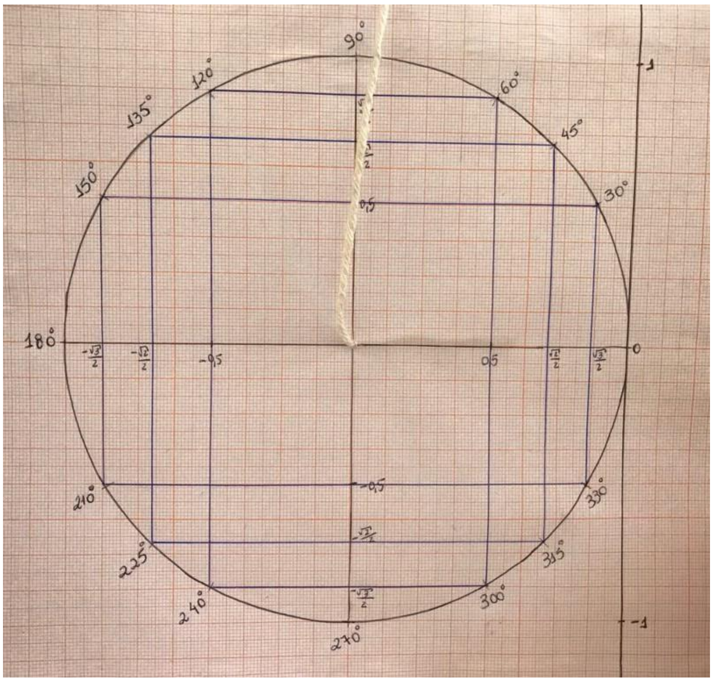


Figura 15: Ciclo Trigonométrico
Fonte: Acervo dos autores

Atividade 04 (20 minutos)

Por meio do ciclo trigonométrico, construído na atividade anterior, mostraremos aos alunos como medir seno, cosseno e tangente de um ângulo. Ainda, relembraremos a divisão deste em quadrantes.

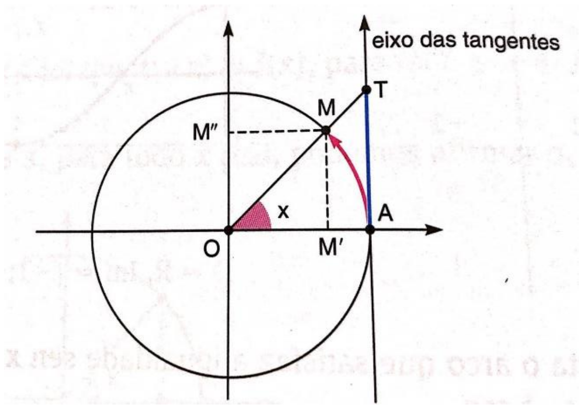


Figura 16: Ciclo Trigonométrico I
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Consideremos o arco AM, que corresponde ao ângulo central de medida x. Definimos:

- Seno de x é a ordenada do ponto M.
- Cosseno de x é a abcissa do ponto M.
- Tangente de x é a ordenada do ponto T.

Ainda exploraremos os sinais que as funções assumem em cada quadrante:

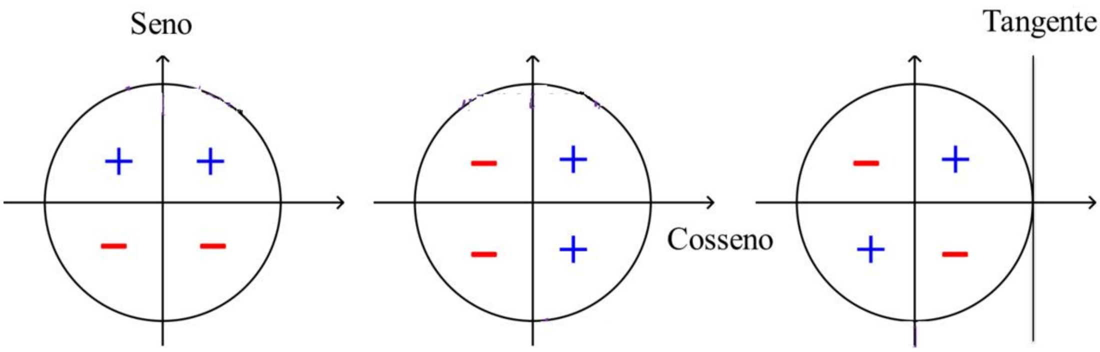


Figura 17: Sinais que as funções Seno, Cosseno e Tangente assumem em cada quadrante
Fonte: http://www.educabras.com/media/emtudo_img/upload/_img/20110223_141808.gif

Atividade 05 (30 minutos)

Após, explicaremos o conceito de redução de arcos ao primeiro quadrante, utilizando como auxílio o ciclo trigonométrico construído anteriormente.

Redução ao 1º quadrante:

Arcos Suplementares:

Dois arcos são suplementares quando a soma de suas medidas resulta em 180°.

Exemplos:

a) $120° \; e \; 60° \rightarrow 120° + 60° = 180°$

b) $x \; e \; \pi - x \rightarrow x + \pi - x = \pi$

Redução do 2° para o 1º quadrante.

Sejam os arcos:

- x (do 1º quadrante)
- (π - x) (do 2º quadrante)

Sendo os pontos B e C simétricos com relação ao eixo dos senos, eles têm ordenadas iguais e abcissas opostas.

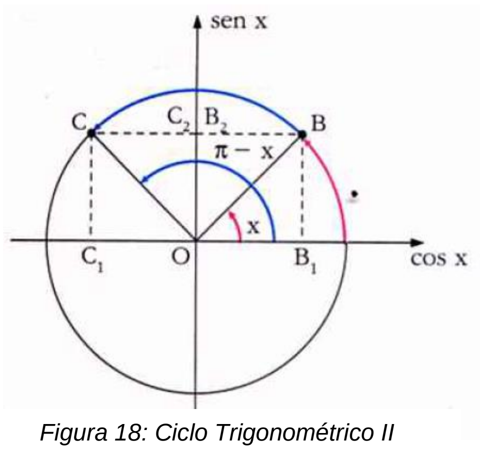


Figura 18: Ciclo Trigonométrico II
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Assim, a partir do ciclo trigonométrico temos:

$sen\,(\pi - x) = sen\,(x)$
ou
$sen\,(180° - x) = sen\,(x)$

$cos\,(\pi - x) = -cos\,(x)$
ou
$cos\,(180° - x) = -cos\,(x)$

Arcos Explementares:

Dois arcos são explementares quando a diferença de suas medidas é 180°.

Exemplos:

a) $225° \; e \; 45° \rightarrow 225° - 45° = 180°$

b) $x\ e\ \pi + x \rightarrow x - \pi + x = \pi$

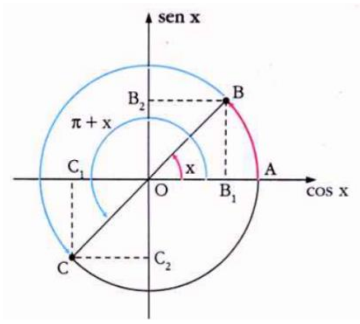


Figura 19: Ciclo Trigonométrico III
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Redução do 3º para o 1º quadrante.

Sejam os arcos:

- x (do 1º quadrante)
- (x + π) (do 3º quadrante)

Sendo os pontos B e C simétricos em relação ao centro O da circunferência (diametralmente opostos), eles têm ordenadas opostas e abcissas opostas. Assim, a partir do ciclo trigonométrico temos:

$$sen\ (\pi + x) = -sen\ (x)$$
ou
$$sen\ (180° + x) = -sen\ (x)$$

$$cos\ (\pi + x) = -cos\ (x)$$
ou
$$cos\ (180° + x) = -cos\ (x)$$

<u>Arcos Replementares:</u>

Dois arcos são replementares quando a soma de suas medidas resulta em 360°.

<u>Exemplos:</u>

c) $300°\ e\ 60° \rightarrow 300° + 60° = 360°$

d) $x\ e\ (2\pi - x) \rightarrow x + (2\pi - x) = 2\pi$

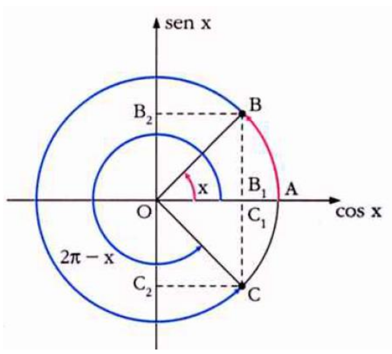


Figura 20 : Ciclo Trigonométrico IV
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Redução do 4º para o 1º quadrante.

Sejam os arcos:

- x (do 1º quadrante)
- (2π - x) (do 4º quadrante)

Sendo os pontos B e C simétricos em relação ao eixo dos cossenos, eles têm ordenadas opostas e abscissas iguais.

Assim, a partir do ciclo trigonométrico temos:

$$sen\ (2\pi - x) = -sen\ (x)$$
ou
$$sen\ (360° - x) = -sen\ (x)$$

$$cos\ (2\pi - x) = cos\ (x)$$
ou
$$cos\ (360° - x) = cos\ (x)$$

Atividade 06 (30 minutos)

Posteriormente, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios, que deverá ser resolvida em sala pelos alunos nos grupos. Nós os auxiliaremos a encontrarem estratégias de resolução.

1. Qual é, em radianos, a medida do ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio, num período de 25 minutos.

   Reposta:

$$\frac{360}{60} \cdot 25 = \frac{9000}{60} = \frac{900}{6} = \frac{5\pi}{6} rad$$

2. Um móvel, partindo do ponto A percorreu um arco de 1690° na circunferência trigonométrica. Quantas voltas completas deu e em qual quadrante parou?

   Resposta: $1690° = 250° + 4 \cdot 360°$

   Assim, o móvel deu 4 voltas completas no sentido anti-horário e como $180° < 250° < 270°$ *, o móvel parou no terceiro quadrante.*

3. Calcule o valor de cada expressão, reduzindo ao 1º quadrante.

   a) sen 150°

$$sen(150°) = sen(\pi - 30°) = sen(30°) = \frac{1}{2}$$

   b) tg 120°

$$tg(120°) = tg(\pi - 60°) = -tg(60°) = -\sqrt{3}$$

   c) cos 225°

$$cos(225°) = cos(\pi + 45°) = -cos(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   d) sen 315°

$$sen(315°) = sen(2\pi - 45°) = -sen(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Determine o valor das seguintes expressões:

   a) $y = 5cos\frac{7\pi}{4} + sen\frac{\pi}{4} - 6\ cos\frac{\pi}{4}$

   $$y = 5\cos(315°) + sen(45°) - 6\cos(45°)$$

   $$y = 5\cos(45°) + sen(45°) - 6\cos(45°)$$

   $$y = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

   b) $y = sen\ \frac{4\pi}{3} + cos\frac{5\pi}{6} + tg\frac{4\pi}{6}$

   $$y = sen\ (240°) + \cos(150°) + tg(120°)$$

   $$y = -sen\ (60°) - \cos(30°) - tg(60°)$$

   $$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$$

   $$y = -\frac{2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

5. Localize os ângulos a seguir no círculo trigonométrico e indique o quadrante em que está localizado:

a) 30º b) 72º c) - 245º d) 320º e) 480º

f) $\frac{\pi}{5}$ rad g) - $\frac{4\pi}{9}$ rad h) - $\frac{\pi}{9}$ rad i) $\frac{3\pi}{2}$ rad j) $\frac{5\pi}{2}$ rad

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

GIOVANNI, Jose Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: Ftd, 2002.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SANTOS, Edimar. **Gincana Trigonométrica.** Disponível em: <https://pt.slideshare.net/edimarlsantos/gincana-trigonomtrica>. Acesso em: 13 jul. 2019.

Anexo 1

Lista de exercícios – 3º Encontro

1. Relacione os valores equivalentes:

$\operatorname{sen} 750°$	$-\operatorname{sen} 2565°$
$\operatorname{tg} 1800°$	$\cos 660°$
$-\cos 330°$	$-\operatorname{tg} 225°$
$\cos 135°$	$\cos 60°$
$\cos 1260°$	$\operatorname{sen} 240°$
$\operatorname{sen} 150°$	$\operatorname{sen} 360°$

Resolução:

$$sen750° = sen150°$$

$$tg1800° = sen360°$$

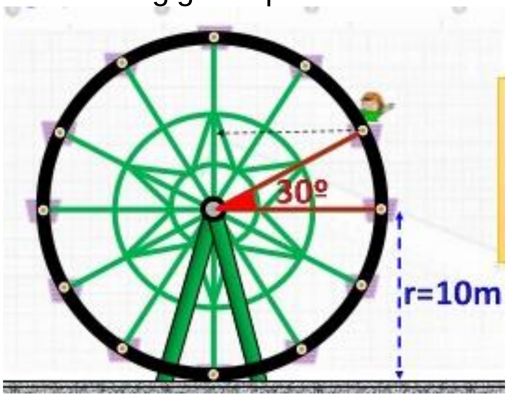
$$-cos330 = sen240°$$

$$-sen2565 = cos135°$$

$$cos660° = cos60°$$

$$-tg225° = cos1260°$$

2. A figura abaixo, mostra uma roda gigante parada.



a) Qual é a altura do menino em relação ao solo?

Resolução: Sabemos que o raio da roda gigante é de $10m$*, então a distância do eixo* x *ao solo é de* $10m$*. A posição do menino, na roda gigante, forma ângulo de 30º com o eixo* x*, ou seja, para calcular a distância do garoto até o solo precisa saber a medida do cateto oposto ao ângulo de 30º e somá-la com a medida do raio. Seno de 30º é* $0{,}5$*, como este raio é de* $10m$*, o cateto oposto mede* $0{,}5x10 = 5m$*. Portanto, a altura do menino em relação ao solo é de* $15m$*.*

b) Se a roda gigante girar 150º, no sentido anti-horário, qual será o seno do novo ângulo formado entre o menino e 0º, no eixo x?

Resolução: A posição do menino na roda gigante está formando 30º com o eixo x, se a roda girar mais 150º a posição do menino formará 180º com o eixo x. O seno de 180º é 0.

3. Determine os sinais de cos 50º, cos 100º, cos 170º e cos 280º.

Resolução:

cos 50º se localiza no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, sendo assim, seu sinal é positivo.

cos 100º e cos 170º, se localizam no segundo e terceiro quadrante respectivamente, e ambos possuem o mesmo sinal, em questão, negativo.

cos 280° localizado no quarto quadrante apresenta sinal positivo.

4. Sendo $x = \pi/5$, calcule o valor de $sen\ 5x + cos\ 10x$.

Resolução:

$$sen 180° + cos 360°$$

$$0 + 1$$

$$1$$

5. (Unesp - SP) As rodas dianteiras de um trator tem 0,70m de diâmetro e as traseiras tem o dobro desse diâmetro. Considerando π = 3,14, a distância percorrida por esse trator, em metros, se as rodas dianteiras derem 2500 voltas a mais que as traseiras é:

Resolução:

Perímetro da roda dianteira: $2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}35 = 2198m$

Perímetro da roda traseira: $2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}70 = 4396m$

x= número de voltas da roda dianteira

x-2500= número de voltas da roda traseira

$$x \cdot 2{,}198 = 4{,}396(x - 2500)$$

$$2{,}198x = 4{,}396x - 10990$$

$$10990 = 4{,}396x - 2{,}198x$$

$$10990 = 2{,}198x$$

$$x = 5000$$

Dessa forma a distância percorrida será de $5000 * 2{,}198 = 10990m$

6. (UEMG – MG) “Os primeiros Jogos Olímpicos da Era Moderna, em 1869, já incluíam o ciclismo em seu programa oficial – com uma prova de 87 km entre Atenas e Marathon. Os Jogos Pan-Americanos também incluem o esporte desde sua primeira edição, em Buenos Aires – 1951.” (Fonte: Globo Esporte). Um ciclista percorre uma pista circular de 15m de raio, para cumprir esta prova de 87 km. Considerando π=3,14, qual o número aproximado de voltas a serem dadas por este ciclista?

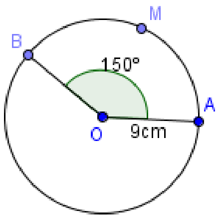
Resolução: primeiramente encontramos o perímetro da circunferência que será:

$$2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 94{,}2m$$

Então transformamos o tamanho da pista de quilômetros para metros e dividimos este valor pela distância percorrida em uma volta obtendo:

$$\frac{87000}{94{,}2} = 923\ voltas$$

7. De acordo com as indicações na imagem, determine o comprimento do arco AMB em centímetros.



Resolução: primeiramente devemos encontrar o perímetro dessa circunferência que é de:

$$2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 56{,}52cm$$

Então teremos que percorrendo toda a circunferência temos 56,52 cm, porém estamos interessados em saber o comprimento de um arco de 150°, dessa forma aplicamos a teoria de proporção, obtendo:

$$360° - - - - - 56{,}52$$

$$180° - - - - - x$$

Onde x é o comprimento a ser encontrado, prosseguindo teremos:

$$360x = 8478$$

$$x = 23{,}55cm$$

5.2.2 Relatório

No dia 24 de agosto de 2019, sábado, realizamos o terceiro encontro do Promat na Unioeste, Cascavel. Estavam presentes 30 alunos. Iniciamos a aula retomando as atividades entregues no encontro anterior, resolvendo-as no quadro, sanando as dúvidas e discutindo as diversas resoluções. Nesse encontro, percebemos que os alunos já estavam mais familiarizados com os colegas e, portanto, agiam com mais naturalidade e confiança. Durante a correção dos exercícios, ouvimos as formas de resoluções dos alunos e expusemos uma forma de resolução no quadro.

Posteriormente, iniciamos o conteúdo programado para esse encontro, que continuava o trabalho com trigonometria, e nessa aula abordamos conceitos relacionados ao ciclo trigonométrico. Para começar, solicitamos que os alunos resolvessem uma questão envolvendo um pêndulo e sua trajetória. Alguns alunos conseguiram solucionar facilmente, enquanto outros não. Então, resolvemos o mesmo no quadro, sempre escutando as formas de resoluções dos alunos. Essa questão tinha como objetivo introduzir o conceito de ângulo e arco, por isso, após terminada a resolução, explicamos para os alunos esses conceitos, e em seguida, a definição de grau e radiano. Para que os alunos conseguissem entender melhor, a explicação de radiano se deu de duas formas: na primeira o estagiário desenhou uma circunferência no quadro e com a ajuda de um pedaço de barbante, do tamanho do raio, mostrou o que é um radiano; na segunda explicação foi utilizado um aplicativo no computador, que mostrava de forma clara o que é um radiano e o valor de um π radiano, tal processo foi projetado para os alunos.

Após isso, entregamos aos alunos papel milimetrado, régua, compasso, transferidor, cola, papel vergê e barbante, tais materiais foram utilizados na construção de um ciclo trigonométrico. Iniciamos pedindo aos alunos que construíssem um plano cartesiano e, utilizando o compasso, uma circunferência de raio uma unidade de medida (orientamos que utilizassem um raio de oito centímetros), centralizada no ponto (0,0). Após, pedimos que marcassem na circunferência os ângulos de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° e 360°. Em seguida, explicamos aos alunos o que são ângulos correspondentes, utilizando a ideia de que eles formam o mesmo ângulo com o eixo das abcissas e das ordenadas, então, solicitamos que os alunos traçassem um segmento ligando os ângulos correspondentes.

Figura 21: Alunos construindo o ciclo trigonométrico
Fonte: Acervo dos autores

Posteriormente, pedimos que construíssem uma reta tangente a circunferência no ponto (0,1), que seria utilizada para calcular o valor da tangente. Já estava na hora do intervalo, então, liberamos os alunos para o intervalo e dissemos que terminaríamos quando voltássemos.

Quando retornamos do intervalo terminamos a construção do ciclo, que já estava praticamente pronto, apenas auxiliamos os alunos a colocarem o barbante no centro da circunferência e depois disso, explicamos como utilizar o ciclo trigonométrico.

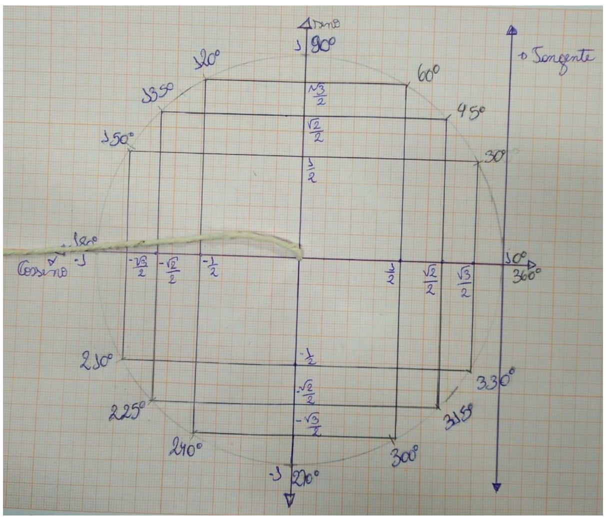


Figura 22: Ciclo trigonométrico de um aluno
Fonte: Acervo dos autores

Realizamos toda essa construção junto com os alunos no quadro (Figura 3) e o desenho do ciclo, que estava no quadro, foi utilizado em outros momentos da aula para facilitar a explicação.

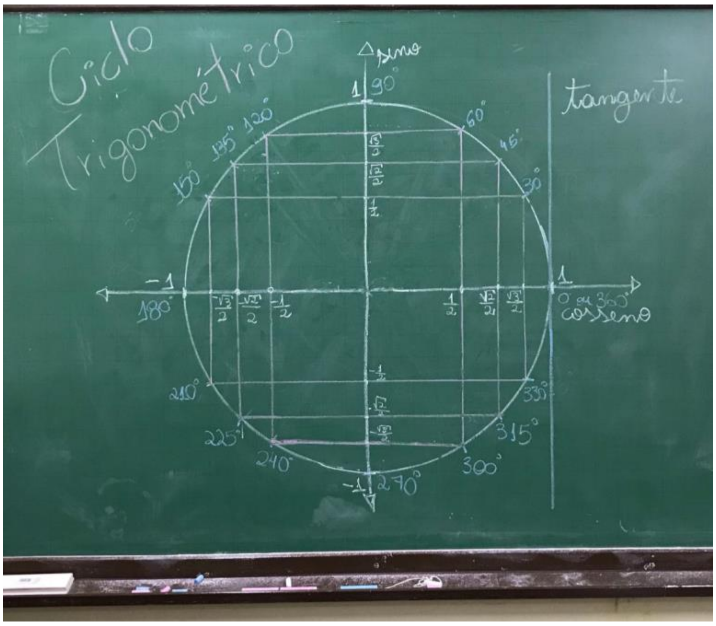


Figura 23: Ciclo trigonométrico desenhado no quadro
Fonte: Acervo dos autores

Após terminarmos a construção, foi mostrado aos alunos no *software Geogebra* a representação de um ciclo trigonométrico e foram calculados os valores de seno, cosseno e tangente. Ainda, explicamos sobre o sinal em cada um dos quadrantes. Acreditamos que tenha ficado claro para os alunos o funcionamento do ciclo trigonométrico e sua utilidade, pois os mesmos se mostraram participativos e atentos durante a construção e demonstraram entender as explicações. Não tivemos grandes dificuldades no desenvolvimento dessa atividade, pois como já dito, os alunos participaram de forma proveitosa e todos conseguiram construir o ciclo.

Explicamos, então, o conceito de redução de arcos ao primeiro quadrante, utilizando como auxílio o ciclo trigonométrico construído anteriormente. Nessa parte, quando falamos das fórmulas os alunos ficaram confusos e disseram que não conseguiriam decorar, então, ressaltamos que não era necessário decorar, que eles deveriam entender o que estava sendo feito, e assim, se eles não lembrassem poderiam fazer um simples desenho do ciclo e relembrar como reduzir os arcos ao primeiro quadrante.

Depois disso, entregamos aos alunos uma lista com cinco exercícios que deveriam ser resolvidos durante a aula e que envolviam os conceitos estudados nesse encontro. Então, enquanto os alunos resolviam, nós circulamos pela sala auxiliando os grupos, ajudando e sanando as possíveis dúvidas. Nos dois primeiros exercícios, a maioria dos grupos não teve dúvidas e conseguiram resolver com facilidade, já o terceiro e quarto exercício foram mais difíceis e tivemos que auxiliar quase todos os grupos. Tais exercícios envolviam expressões trigonométricas e os alunos tiveram dificuldades em entender como substituir o valor da incógnita, mas acreditamos que todos tenham conseguido entender. O quinto exercício também foi resolvido com facilidade pelos alunos, apenas alguns não conseguiram resolver, mas por falta de tempo.

Quando percebemos que a maioria já havia terminado iniciamos a correção no quadro. Durante a correção sempre pedimos a ajuda dos alunos, para que eles participassem e explicassem de que maneira tinham resolvido. A maioria se mostrou participativa, alguns explicaram a forma que resolveram, e com isso mostramos no quadro uma forma de resolução, sanando as dúvidas que surgiam.

Assim, já estava quase no horário de terminar a aula, dessa forma, agradecemos a todos os alunos pela presença e pedimos que viessem no próximo encontro. Ainda, entregamos uma lista com sete exercícios para ser resolvida em casa e dissemos que na próxima aula faríamos a correção deles no quadro.

5.3 Atividades dia 31/08

5.3.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 4º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a compreenderem os conceitos de funções trigonométricas e resolver problemas que os envolvem.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar os valores que as funções Seno, Cosseno e Tangente assumem em cada um dos arcos notáveis, bem como analisar o sinal correspondente a cada arco de acordo com a analogia dos quadrantes;
- Identificar onde podemos medir os valores das funções Cotangente, Secante e Cossecante;
- Conhecer e esboçar os gráficos das funções Seno, Cosseno e Tangente.
- Entender como realizar operações entre arcos.

Conteúdo:

Funções trigonométricas.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Atividade 01 (30 minutos)

Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção dos exercícios propostos para serem feitos em casa.

Atividade 02 (60 minutos)

Após, explanaremos o conteúdo de funções trigonométricas. Apresentaremos a representação gráfica, o domínio e a imagem das funções seno, cosseno e tangente e, por fim, iremos projetar as definições destas funções.

Utilizaremos uma tabela com os valores da função seno, cosseno e tangente em alguns pontos, a qual será construída com o auxílio do ciclo trigonométrico desenvolvido na aula anterior. Na sequência, utilizando a tabela será solicitado aos alunos que construam o gráfico da função seno.

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
sen (x)	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
cos (x)	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
tg (x)	0	1	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$	-1	0

Tabela 3: Alguns valores das funções trigonométricas
Fonte: Acervo dos autores

Após isso, com o *software* Geogebra, construiremos os gráficos das funções, indicando seu domínio e imagem. Mostraremos também, o que acontece quando temos uma constante multiplicando a função, ou/e o argumento da mesma. Ainda, trabalharemos com os conceitos de período e amplitude da função.

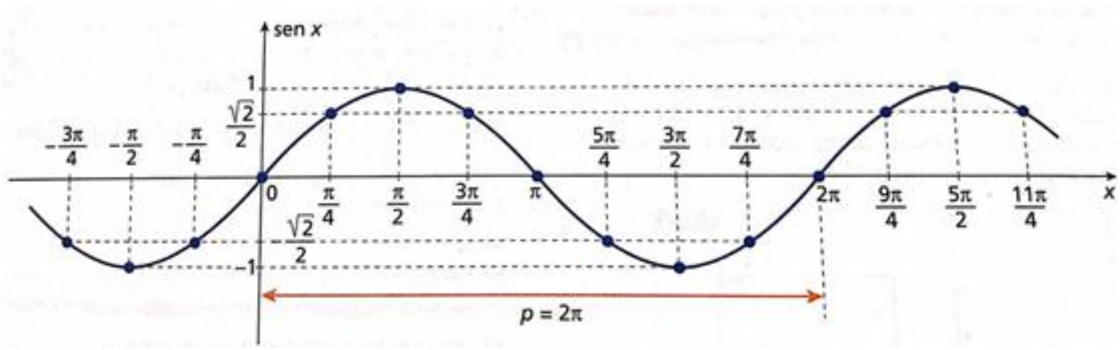


Figura 24: Gráfico da função Cosseno
Fonte: Leonardo (2013)

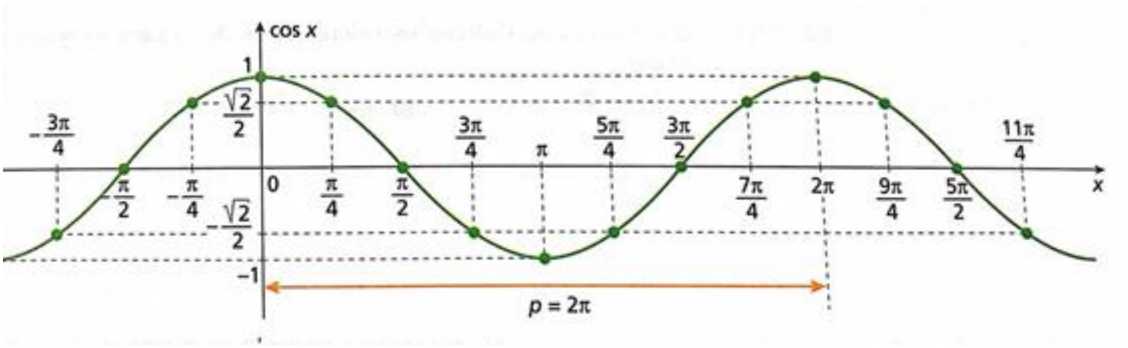


Figura 25: Gráfico da função Cosseno
Fonte: Leonardo (2013)

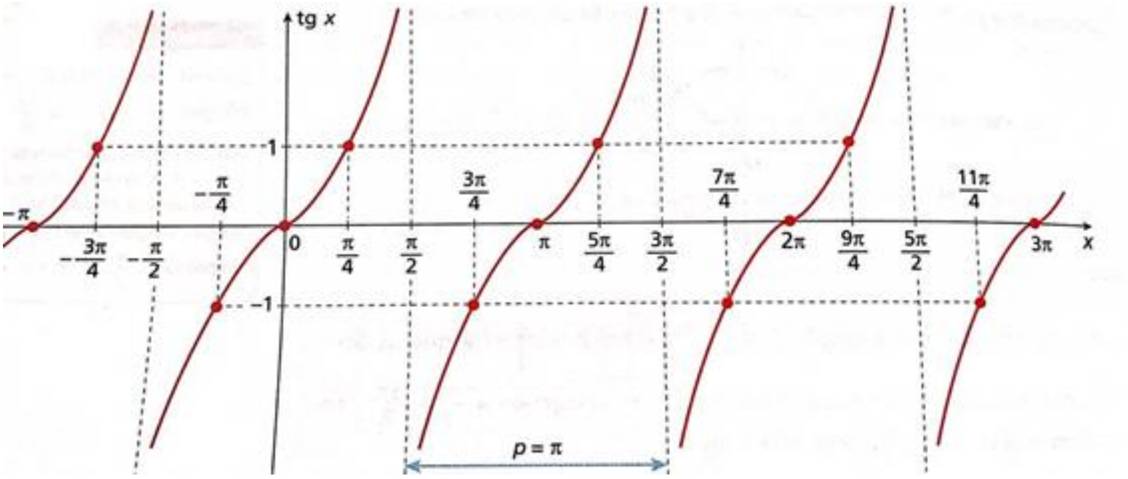


Figura 26: Gráfico da função Tangente
Fonte: Leonardo (2013)

Def: A função seno é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $y_p = sen\ (x)$, ou seja $f(x) = sen\ (x)$.

Def: A função cosseno é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $x_p = cos\ (x)$, ou seja $f(x) = cos\ (x)$.

Def: A função tangente é a função $f: \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $y_t = tg\ (x)$, ou seja $f(x) = tg\ (x)$.

Atividade 03 (30 minutos)

Relações trigonométricas fundamentais e relações trigonométricas derivadas:

Nessa atividade explicaremos aos alunos as relações trigonométricas fundamentais.

1ª) $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$

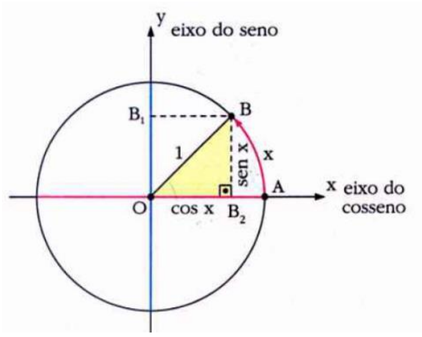


Figura 27: Relação trigonométrica
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

O arco AB possui como medida o número x:

- $sen\ (x) = \overline{OB_1}$
- $cos\ (x) = \overline{OB_2}$
- O raio é unitário (r =1)

2ª) $tg\ (x) = \frac{sen\ (x)}{\cos(x)}$

3ª) $cotg\ (x) = \frac{cos\ (x)}{sen\ (x)}$ ou $cotg\ (x) = \frac{1}{tg\ (x)}$

4ª) $sec\ (x) = \frac{1}{cos\ (x)}$

5ª) $cossec\ (x) = \frac{1}{sen\ (x)}$

Novamente, com o auxílio do *software* Geogebra, mostraremos como encontrar os valores da cotangente, secante e cossecante.

Atividade 03 (40 minutos)

Posteriormente, destinaremos um tempo para a execução do jogo Pife trigonométrico, descrito a seguir:

Pife trigonométrico[1]

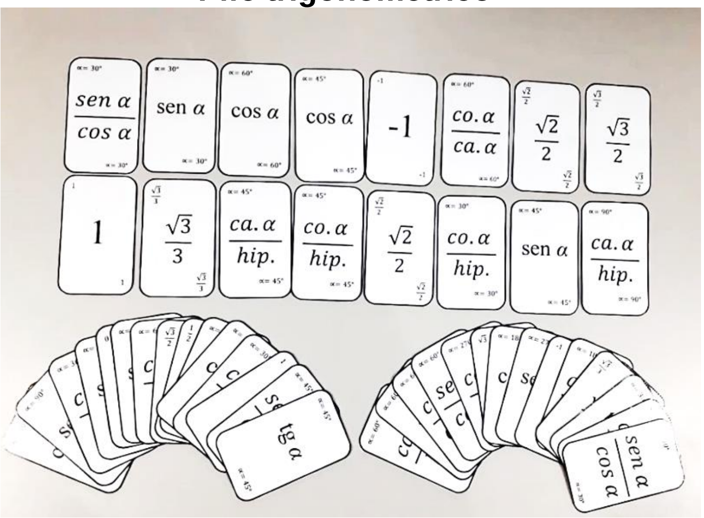


Figura 28: Pife trigonométrico
Fonte: ZEFERINO (2015)

[1] Adaptado de ZEFERINO (2015).

Confeccionamos o jogo “Pife trigonométrico”, que será impresso em papel vergê, encapado com plástico transparente e posteriormente recortado.

Os estudantes já estarão dispostos em grupos de quatro estudantes. Para o jogo, manter-se-á essa organização. Sendo que é necessário no mínimo dois jogadores e no máximo quatro.

O jogo é composto por um baralho trigonométrico com 38 cartas. Um jogador deve embaralhar as cartas, depois de embaralhado, um outro jogador deverá separar o baralho em duas partes onde achar conveniente, após isso deve-se juntar novamente os montes de modo que a que estava embaixo fique em cima. O jogador que embaralhou irá distribuir as cartas, seis cartas para cada participante (sugestão uma carta por vez para cada jogador).

Das seis cartas recebidas, cada jogador deve formar duas trincas de razões trigonométricas equivalentes. Por exemplo: caso o jogador faça uma trinca com as razões do seno 30°: a medida do $cateto\ oposto$ (30°) divido pela medida da $hipotenusa = \ sen\, 30° = \ 1/2$.

O jogador que fizer dois trios primeiro, mostra ao adversário e, se estiver correto, ganha o jogo, somando um ponto. Se o jogador fizer um trio e uma sequência relacionando quatro cartas (utilizando uma carta descartada na mesa) ele ganha com sete cartas, neste caso ele somará três pontos. Ganha aquele jogador que fizer dez pontos primeiro.

Verificando as razões do baralho, vemos que cada razão tem pelo menos um trio formado, mas podemos associar outras ternas como: $sen\, 45° = cos\, 45° = \sqrt{2}/2$ (ver Figura 8) o que nos possibilita fazer um jogo já que o resultado da razão é o mesmo, as jogadas que tiverem a mesma representação como: $1/2, 1/2$ e $sen\, 30°$ não serão válidas, pois o intuito é associar cartas equivalentes e representações distintas.

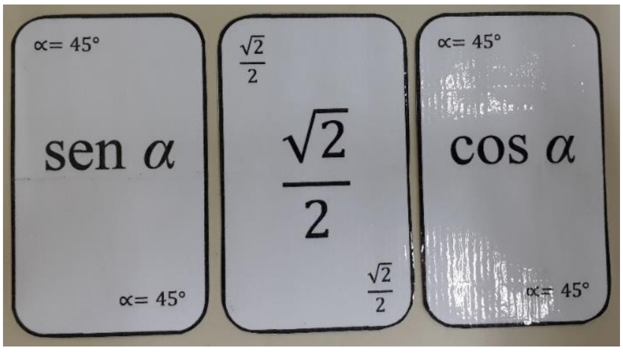


Figura 29: Trinca possível para o jogo Pife Trigonométrico
Fonte: Acervo dos autores

Quem inicia o jogo é o jogador que separou o baralho em duas partes depois de embaralhado, o qual deverá pegar uma carta do monte que sobrou e verificar se consegue formar uma trinca ou até mesmo um par, devendo descartar uma carta a sua escolha, com a face para cima, ao lado do monte. O jogador sequente, à direita de quem iniciou, pode pegar a carta descartada anteriormente ou, se preferir, pegar no monte e descartar uma de suas cartas. Da mesma forma, segue-se sucessivamente, até o fim do jogo.

Quando jogado com três ou quatro participantes e o descarte de um jogador servir para completar a trinca que falta para outro jogador ganhar, este poderá antecipar-se ao jogador sequente vencendo assim a partida, porém, caso se engane só poderá vencer pegando a carta do monte, ou a carta descartada pelo seu antecessor.

Atividade 05 (40 minutos)

Após, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios para serem resolvidos na sala. Durante essa atividade auxiliaremos os alunos nos grupos.

1. Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por:

   $Z(t) = 850 + 400 \cdot sen\ \frac{\pi t}{4}$, sendo tempo *t* medido, em anos, a partir de janeiro de 2012 ($t = 0$). Pergunta-se:

a) Quantas zebras havia em janeiro de 2012?

Resolução:

$$Z(0) = 850 + 400 \cdot sen\ \frac{\pi 0}{4}$$

$$Z(0) = 850 + 400 \cdot sen\ 0$$

$$Z(0) = 850 + 400 \cdot 0$$

$$Z(0) = 850$$

b) De acordo com a função dada, qual foi a população máxima de zebras atingidas nessa região?

Resolução: A população máxima será atingida quando $sen\ \frac{\pi t}{4}$ for máximo, em uma função trigonométrica o máximo valor obtido é 1, logo:

$$sen\ \frac{\pi t}{4} = 1,\ como,\ sen\ \frac{\pi}{2} = 1$$

$$sen\ \frac{\pi t}{4} = sen\ \frac{\pi}{2}\ ,\ portanto,\ t=2.$$

Basta agora aplicar t=2 em Z(t)

$$Z(2) = 850 + 400 \cdot sen\ \frac{\pi 2}{4}$$

$$Z(2) = 850 + 400$$

$$Z(2) = 1250$$

c) Determine a primeira vez em que a população de zebras foi máxima.

Resolução: Foi no ano de 2014, quando t=2.

2. **(Ufpb 2011)** Com o objetivo de aumentar a produção de alimentos em certa região, uma secretaria de agricultura encomendou a uma equipe de agrônomos um estudo sobre as potencialidades do solo dessa região. Na análise da temperatura do solo, a equipe efetuou medições diárias, durante quatro dias consecutivos, em intervalos de uma hora.

   As medições tiveram início às 6 horas da manhã do primeiro dia (t = 0). Os estudos indicaram que a temperatura T, medida em graus Celsius, e o tempo t, representando o número de horas decorridas após o início das observações, relacionavam-se através da expressão:

$$T(t) = 26 + 5cos(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3})$$

   Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas:

   ( ) A temperatura do solo, às 6 horas da manhã do 1° dia, foi de 23,5 ºC.

   ( ) A função T(t) atinge valor máximo igual a 30 ºC.

   ( ) A temperatura do solo atingiu o valor máximo, no primeiro dia, às 14 h.

   ( ) A função T(t) é crescente no intervalo [0,8].

   Resolução: V, F, V, V.

Para verificar o primeiro item basta substituir t=0 na função, assim temos:

$$T(6) = 26 + 5cos(\frac{\pi}{12}0 + \frac{4\pi}{3})$$

$$T(6) = 23{,}5$$

Para o segundo item basta observar que a função cosseno tem valor máximo igual a 1, dessa forma teremos $26 + 5 \cdot 1 = 31$*, dessa forma a temperatura máxima é de 31°C.*

Para o terceiro item basta encontrar o valor de t onde a função cosseno tem valor máximo, sabemos que isso ocorre em múltiplos de 2π*, dessa forma fazemos:*

$$\frac{\pi t}{12} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$$

$$t = 8$$

Dessa forma às 14h será o primeiro momento em que a temperatura do solo terá valor máximo. Para o último item basta visualizar que após a oitava hora a função irá decair, pois atingiu seu valor máximo com t=8.

Após as resoluções, entregaremos outra lista de exercícios para casa, a qual iremos corrigir na próxima aula. (Anexo 1)

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

GIOVANNI, Jose Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: Ftd, 2002.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

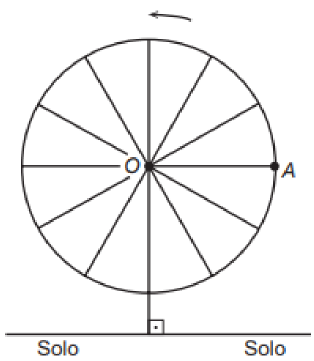
PROVA DO ENEM 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2019.

ZEFERINO, Leandro. **Jogos Matemáticos nas Aulas do Ensino Médio: Pife Trigonométrico**. Disponível em: <http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/86510/mod_resource/content/1/TCC%20Leandro.pdf>. Acesso em 12 jun. 2019.

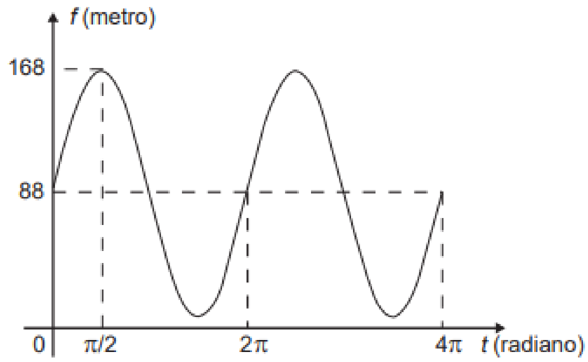
Anexo 1

Lista de exercícios – 4º Encontro

1. (Questão adaptada de ENEM (2013)). Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto *A* representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento *OA* se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto *O*. sejam *t* o ângulo determinado pelo segmento *AO* em relação à sua posição inicial, e *f* a função que descreve a altura do ponto *A*, em relação ao solo, em função de *t*. Após duas voltas completas, *f* tem o seguinte gráfico:



Como é dada a expressão da função altura?

Resolução: Considere a função $f(t) = a + b \cdot sen\, t$, *para* $t = 0$*:*

$$f(0) = 88$$

$$f(0) = a + b \ \cdot sen\, 0$$

$$88 = a + 0$$

$$a = 88$$

$f(t) = a + b \cdot sen\, t$

$f(t) = 88 + b \cdot sen\, t$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 168$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 88 + b \ \cdot sen\, \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$168 = 88 + b \cdot 1$$

$$b = 80$$

$f(t) = 88 + 80 \ \cdot sen\, t$

2. (Unesp - SP) Uma máquina produz diariamente x dezenas de certo tipo de peças. Sabe-se que o custo de produção $C(x)$ e o valor de venda $V(x)$ são dados, aproximadamente, em milhares de reais, respectivamente, pelas funções:

$$C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \quad \text{e} \quad V(x) = 3\sqrt{2} sen\left(\frac{x\pi}{12}\right), \quad 0 \le x \le 6.$$

O lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é:

a) 500

b) 750

c) 1000

d) 2000

e) 3000

Resolução: Encontraremos os valores para a função do custo e do valor de venda para x=3.

$$c(3) = 2 - cos\frac{3\pi}{6}$$

$$c(3) = 2 - cos(90°)$$

$$c(3) = 2 - 0 = 2$$

$$v(3) = 3\sqrt{2}sen\frac{3\pi}{12}$$

$$v(3) = 3\sqrt{2}sen(45°)$$

$$v(3) = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v(3) = 3$$

Assim teremos 3-2=1, dessa forma a resposta é R$ 1000.

3. (FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica: $f(x) = 900 - 800\,\mathrm{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right)$, em que $f(x)$ é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um inteiro tal que $0 \leq x \leq 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a quanto?

Resolução: Neste exercício basta observar para quais valores de x a função seno assume o valor máximo e mínimo, sendo que a função f(x) terá valor máximo quando a função seno ter valor mínimo.

A função seno terá valor máximo quando:

$$\frac{\pi x}{12} = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 6$$

E valor mínimo quando:

$$\frac{\pi x}{12} = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 18$$

Assim teremos que a diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes será:

$$f(18) - f(6)$$

dessa forma temos:

$$f(6) = 900 - 800sen\frac{6\pi}{12}$$

$$f(6) = 900 - 800 \cdot 1$$

$$f(6) = 100$$

$$f(18) = 900 - 800sen\frac{18\pi}{12}$$

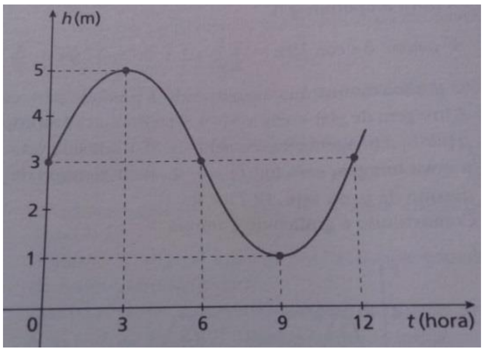
$$f(18) = 900 - 800 \cdot (-1)$$

$$f(18) = 1700$$

Então, teremos $1700 - 100 = 1600$ *a diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes.*

4. A altura h, em metro, da maré em certo ponto do litoral, em função do tempo, é dada pela expressão $h(t) = 3 + 2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, sendo t o tempo, medido em hora a partir do meio-dia. Descreva um ciclo completo dessa maré indicando as alturas máxima e mínima que ela tinge e em que momentos isso ocorre, o período de tempo e a frequência com que a maré completa esse ciclo.

Resolução: Construindo o gráfico de $h(t) = 3 + 2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$*, temos:*



Podemos observar, no gráfico, que a maré atinge a altura máxima às 15 *horas, ou seja, em* $t = 3$ *(já que* $t = 0$ *representa* 12 *horas).*

Em $t = 9$ *(*21 *horas), a maré atinge sua altura mínima, de 1 metro.*

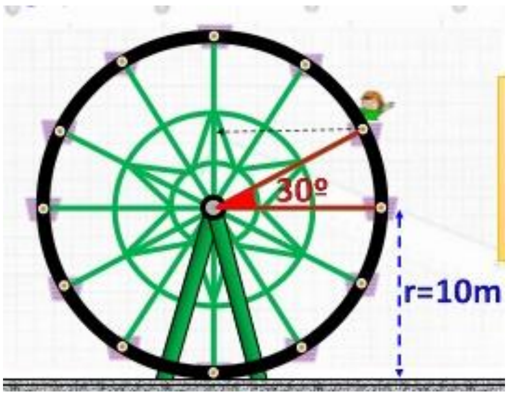
Portanto:

- *A maré oscila entre 1 metro e 5 metros, em ciclos completos a cada 12 horas, o que significa uma frequência de dois ciclos diários;*
- *Em seu primeiro ciclo, que se inicia ao meio-dia, a maré atinge a altura máxima de 5 metros às 15 horas, e a altura mínima de 1 metro às 21 horas.*

5.3.2 Relatório

No dia 31 de agosto de 2019, sábado, realizamos o terceiro encontro do Promat na Unioeste, Cascavel. Estavam presentes 28 alunos. Iniciando à aula, demos as boas vindas e desejamos uma boa aula a todos, em seguida, perguntamos aos alunos se ainda existiam dúvidas nos exercícios que estavam na lista complementar da última aula.

Após ouvir o relato de alguns alunos, decidimos resolver algumas das atividades no quadro, uma vez que, havia exercícios complexos na lista complementar, como exemplo este, em que a figura abaixo, mostra uma roda gigante parada.



Perguntamos aos estudantes qual era a altura do menino em relação ao solo, em seguida supomos uma rotação na roda gigante de 150º, no sentido anti-horário, qual será o seno do novo ângulo formado entre o menino e 0º, no eixo x?

Durante a correção da atividade, fomos auxiliados por alguns estudantes. Em meio a isso, ainda mostramos diferentes maneiras de resolver as atividades, possibilitando que cada um escolhesse o método para resolução dos outros exercícios análogos aos apresentados.

Para esta aula foi programado trabalhar com as funções trigonométricas, dando ênfase as três mais usadas, Seno, Cosseno e Tangente. Para a função Seno, fizemos a representação da curva gráfica no quadro, mostrando aos alunos como são encontrados os valores contidos neste gráfico e tratamos ainda sobre peculiaridades desta função, mostrando com auxílio do Software Geogebra o que acontece quando aparecem constantes na função.

Entendemos que o uso do Geogebra é de grande valia para os estudantes, uma vez que permite visualizar os deslocamentos que cada uma das constantes contidas nas funções exerce no gráfico, mostrando assim as diferenças, quando analisamos e comparamos as funções.

Depois de mostradas o que acontece com os gráficos quando variamos as funções, projetamos no quadro as definições das funções abordadas, ressaltando os valores de domínio e imagem destas.

É importante ressaltar, que no primeiro momento da aula, construímos também no quadro, uma tabela que continha os valores assumidos pelas funções nos arcos notáveis, para otimizar o tempo, tais valores foram encontrados apenas nas funções já citadas acima (Seno, Cosseno e Tangente), para encontrar esses valores, chamamos a atenção para o ciclo trigonométrico construído na aula do último sábado, dia 24.

Prosseguimos a aula com o conteúdo programado, falando sobre as relações trigonométricas fundamentais e derivadas. Para isto, desenhamos um círculo de raio 1, no quadro, no qual baseamos as explicações, chamando a atenção para a relação pitagórica que fica implícita nas deduções de algumas fórmulas, especialmente a relação fundamental. Aproveitamos este momento para falar sobre algumas curiosidades que se encontram neste tópico de conteúdo. Falando aos alunos a importância em conhecer as equivalências trigonométricas das funções, pois uma decorre da outra e muitas vezes é necessário usar destas equivalências para deduzir algumas das fórmulas que utilizamos.

Tratamos sobre as propriedades das funções, Cotangente, Secante a Cossecante, explicando que seus valores são dados em função das funções de Seno, Cosseno e Tangente. Mostramos aos alunos, como são os gráficos das funções mencionadas, com o auxílio do Software Geogebra. Além do gráfico, mostramos como se dá a representação geométrica das funções, no ciclo trigonométrico.

Para fins de fixação de conteúdo, utilizamos um jogo, a saber, o Pife Trigonométrico, que segue os princípios básicos do popular jogo de Pife, com algumas adaptações nas cartas. Destinamos um tempo para a explicação do jogo, no qual, falamos as regras e explicamos como se jogava.

Os alunos já organizados em quartetos, deviam escolher um jogador para distribuir 6 cartas para cada participante do jogo, das seis cartas recebidas, cada jogador deve formar duas trincas de razões trigonométricas equivalentes. Por exemplo: caso o jogador faça uma trinca com as razões do seno 30°: a medida do $cateto\ oposto$ (30°) divido pela medida da $hipotenusa = sen\,30° = 1/2$.

O jogo acabava sempre que um jogador conseguisse formar os dois trios, e mostrasse aos seus adversários, para uma conferência. Durante a confecção do jogo, asseguramos que cada relação trigonométrica tivesse ao menos um trio em meio ao jogo.

De modo geral, os estudantes pareciam ter gostado do jogo, todos participaram, porém, falaram ter encontrado dificuldades, pois não estavam familiarizados com os termos e com o estilo da representação e de notação.

Para finalizar o nosso encontro, entregamos aos alunos dois exercícios para que fossem resolvidos em sala, que abordavam os assuntos da nossa aula. A maioria dos estudantes foram rápidos nas resoluções, o que contribuiu para a correção ainda neste encontro. Percebemos que os estudantes estavam seguros quanto à resolução, parecendo ter entendido os métodos de resolução. Talvez essa rapidez tenha decorrido do uso do jogo nesta aula, pois, ele serviu como exercício e serviu também para que várias dúvidas fossem retiradas durante a atividade lúdica.

Uma lista com algumas questões foi destinada para casa, no intuito de exercitar ainda mais o conteúdo que foi trabalhado nas últimas aulas. Por fim, nos despedimos dos alunos, agradecendo a sua presença, e informando sobre a data da nossa próxima aula.

6. MÓDULO 3: GEOMETRIA ANALÍTICA

6.1 Atividades dia 14/09

6.1.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 5º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Trabalhar com geometria analítica.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Explorar o plano cartesiano e suas partes;
- Localizar pontos no plano cartesiano;
- Determinar a distância entre dois pontos;
- Determinar o ponto médio de um segmento;
- Verificar se três pontos são colineares.

Conteúdo:

Geometria Analítica.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, computador, projetor, listas de exercícios.

Atividade 01 (10 minutos)

No primeiro momento da aula, iremos retomar o conteúdo trabalhado na aula anterior, corrigindo os exercícios que ficaram na lista para casa.

Em seguida, iremos relatar aos alunos, que nas próximas aulas do curso, iremos abordar um novo conteúdo, a saber, Geometria Analítica. Durante três encontros iremos trabalhar com os tópicos mais importantes que permeiam este conteúdo matemático.

Atividade 02 (30 minutos)

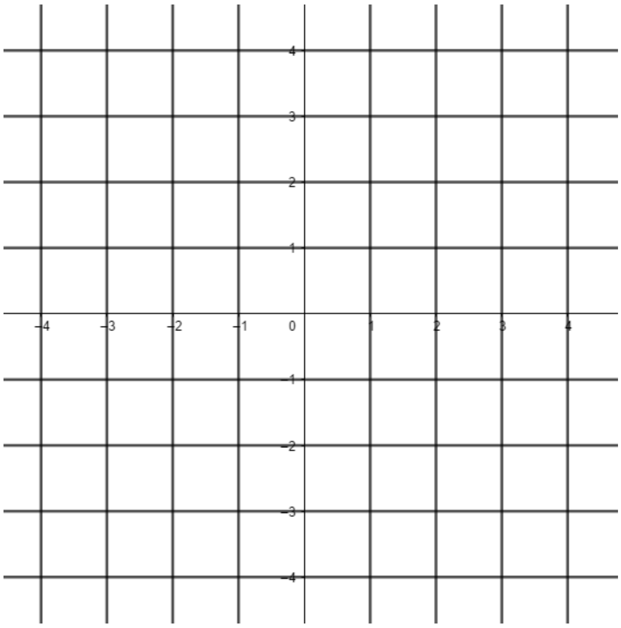
Para introduzir o novo conteúdo, utilizaremos um jogo, que servirá como base para os novos tópicos que serão abordados.

Batalha Naval

Essa atividade é uma adaptação do tradicional jogo “Batalha Naval”, dividiremos os alunos em grupos, cada grupo será dividido novamente em duas equipes. Cada equipe irá receber uma folha com um plano cartesiano, nesse, os alunos deverão marcar pontos para simbolizar os navios. Deverão marcar dois navios de um ponto, três navios de três pontos, dois navios de quatro pontos e um navio de cinco pontos.

Após isso, a primeira equipe deve escolher uma coordenada para atirar, a segunda equipe irá informar se eles acertaram um navio ou não, se sim, eles têm direito a atirar mais uma vez e assim procedem até que errem o tiro, passando a vez para a segunda equipe, que fará o mesmo. Vence quem tiver mais pontos. Cada navio afundado terá os seguintes valores:

- Navio de um ponto: 5
- Navio de três pontos: 7
- Navio de quatro pontos: 10
- Navio de cinco pontos: 15



Atividade 03 (15 minutos)

Após, relataremos aos alunos que o conteúdo de Geometria Analítica, é estudado através de elementos e processos algébricos. O primeiro elemento é o Ponto, em seguida vem a reta e, por fim, a circunferência.

De início, vamos mostrar como proceder com estudo do Ponto, e qual sua função, para isso iremos falar sobre o plano cartesiano.

Ao falar sobre plano cartesiano, precisamos definir quais os elementos que são necessários para identificação de um plano, e ainda falar sobre alguns elementos implícitos a sua abordagem.

Elementos de um plano cartesiano:

- Dois eixos; X e Y, em que, X denomina-se eixo das abscissas e Y o eixo das ordenadas.
- O ponto 0, denominado origem, que é a intersecção dos eixos X e Y.
- Quadrantes; todo plano cartesiano possui quatro quadrantes em sua constituição. Como visto na imagem a seguir:

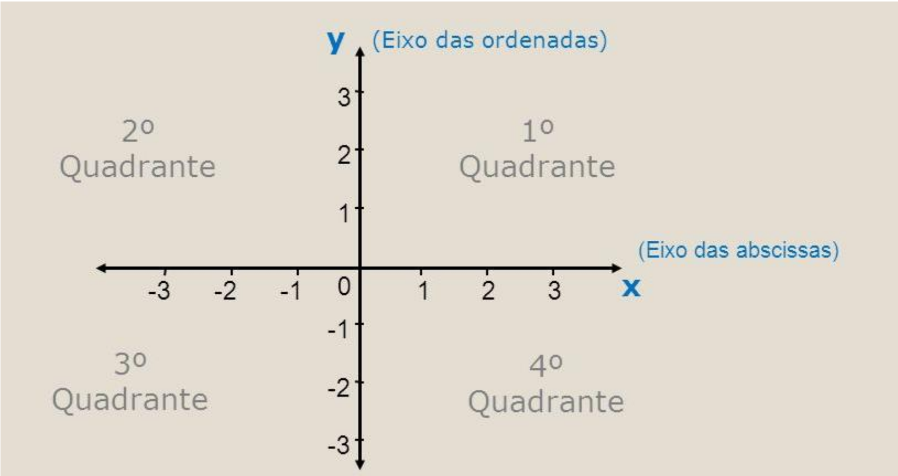
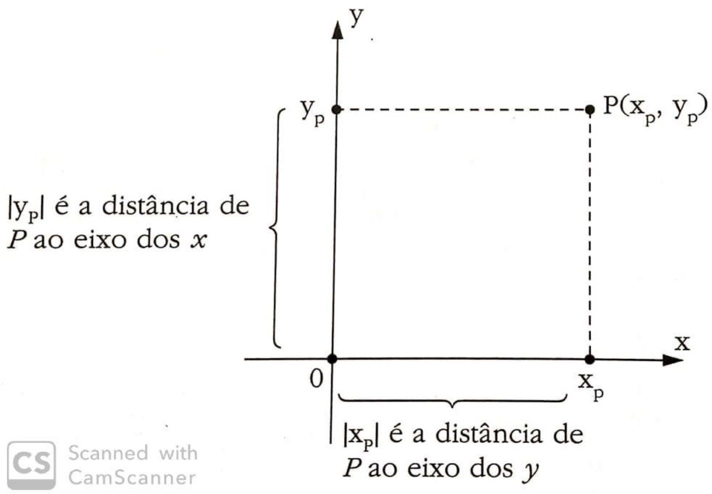


Figura 30: Quadrantes do ciclo trigonométrico
Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/6824013/

Um plano cartesiano é composto de duas retas numéricas reais que se interceptam formando um ângulo de 90º.

Para localizar um ponto sobre o plano cartesiano, necessitamos de duas coordenadas, uma delas, representa a posição do ponto em relação ao eixo X, e a outra representa a posição do ponto em relação ao eixo Y, e é representado como: $P(X_{P\,,}Y_P)$.

Mostraremos que o Ponto P procurado, se localiza exatamente na intersecção das projeções da coordenada da abscissa com a ordenada. E que o $|Y_P|$, se refere a distância de P ao eixo X, analogamente segue o $|X_P|$, utilizando de um exemplo.



Scanned with CamScanner

Figura 31: Representação geométrica da localização do ponto
Fonte: Filho e Barreto (2000)

Exemplo: Localizar no plano cartesiano alguns pontos, pediremos sugestões de pontos aos alunos, se possível utilizaremos os pontos contidos no jogo da batalha naval.

Atividade 5 (15 Minutos)

Prosseguindo com a aula, iremos abordar as bissetrizes dos quadrantes.

Vamos utilizar o exemplo anterior para destacar duas propriedades importantes sobre as bissetrizes dos quadrantes:

- 1ª propriedade – Todo ponto que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, apresenta abscissa igual a ordenada.

Podemos observar os pontos $F(-3,-3), T(0,0)\ e\ B(2,2)$, vemos que a reta formada pela ligação dos pontos corta os quadrantes exatamente na sua bissetriz.

- 2ª propriedade – Todo ponto que pertence à bissetriz dos quadrantes pares, apresenta abscissa igual ao oposto da ordenada.

Podemos observar os pontos $P(-1,1), T(0,0), L(2,-2)$, vemos que a reta formada pela ligação dos pontos corta os quadrantes exatamente na sua bissetriz.

Def. de Bissetriz: Bissetriz é a semirreta que se origina no vértice e divide ao meio um ângulo em dois ângulos com a mesma medida.

Exercício: A partir dos pontos localizados no plano cartesiano, escreva suas coordenadas.

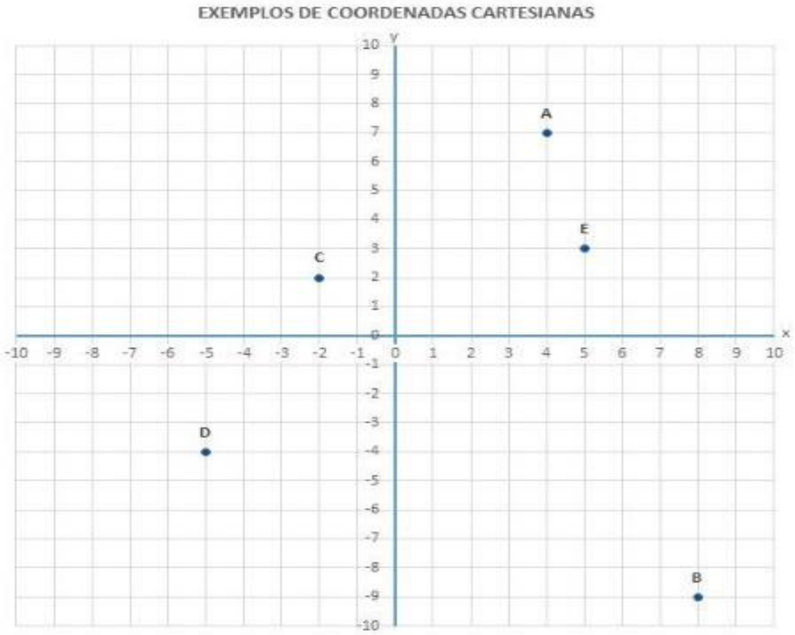


Figura 32: Plano cartesiano
Fonte: Filho e Barreto (2000)

Atividade 6 (20 Minutos)

Em seguida vamos abordar o conceito de distância entre pontos. Um dos conceitos básicos da Geometria diz que a menor distância entre dois pontos é dada por uma reta. Na Geometria Analítica, esses pontos recebem coordenadas no plano cartesiano e, por meio dessas coordenadas, podemos encontrar o valor da distância entre dois pontos.

A distância entre dois pontos A (X_A, Y_A) e B (X_B, Y_B), situados num plano cartesiano, pode ser determinada em função das suas coordenadas. Vejamos:

1º caso – O segmento AB é paralelo ao eixo Oy, em que a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre abscissas.

$d_{AB} = |Y_B - Y_A|$

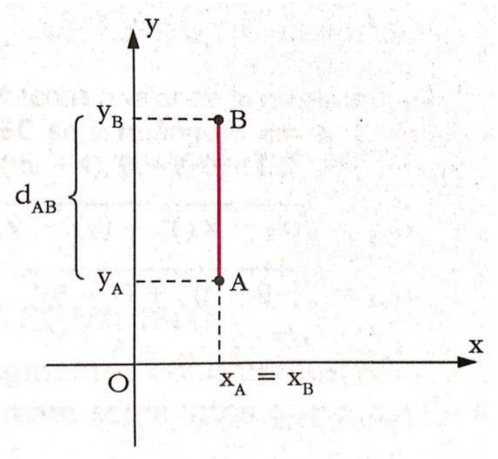


Figura 33: Distância entre pontos I
Fonte: Filho e Barreto (2000)

2º caso - O segmento AB é paralelo ao eixo Ox, em que a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre ordenadas.

$$d_{AB} = |X_B - X_A|$$

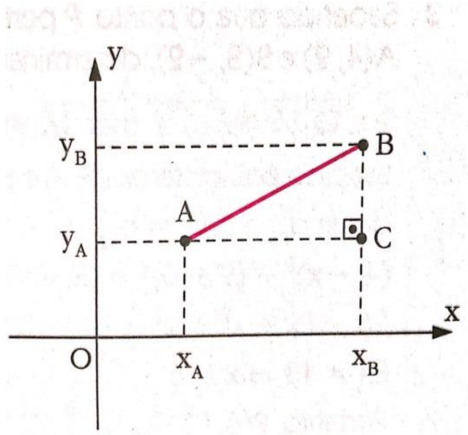


Figura 34: Distância entre pontos II
Fonte: Filho e Barreto (2000)

3º caso – O segmento AB não é paralelo a nenhum eixo. A distância d_{AB} depende das diferenças entre abscissas e ordenadas, de tal forma que, ao aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2$$

$$d_{AB}^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

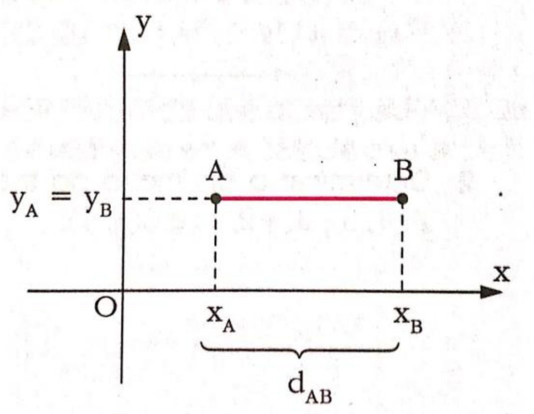


Figura 35: Distância entre pontos III
Fonte: Filho e Barreto (2000)

Exemplo: Determine a distância entre os seguintes pares de pontos:

a) $A\ (2, -3)$ e $B\ (5, -3)$
b) $C\ (-2, 6)$ e $D\ (-2, 4)$
c) $E\ (3, 7)$ e $F\ (1,1)$

Atividade 7 (15 minutos)

Daremos continuação a aula, trabalhando com o conceito do Ponto Médio de um segmento. Iniciaremos com o seguinte exemplo:

Calcule as coordenadas do ponto médio do segmento AB, tal que $A = (1,1)$ e $B = (3,5)$.

Após, faremos a generalização. Podemos observar que o ponto M divide $\overline{AB}$ em dois segmentos congruentes: $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$. As projeções de A, M e B nos eixos Ox e Oy formam segmentos que mantêm as mesmas relações.

$\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$ e $\overline{A''M''} = \overline{M''B''}$

Determinando a abscissa X_M do ponto médio M, temos:

$$\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$$
$$X_M - X_A = X_B - X_M$$
$$X_M + X_M = X_A + X_B$$
$$2X_M = X_A + X_B$$
$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2}$$

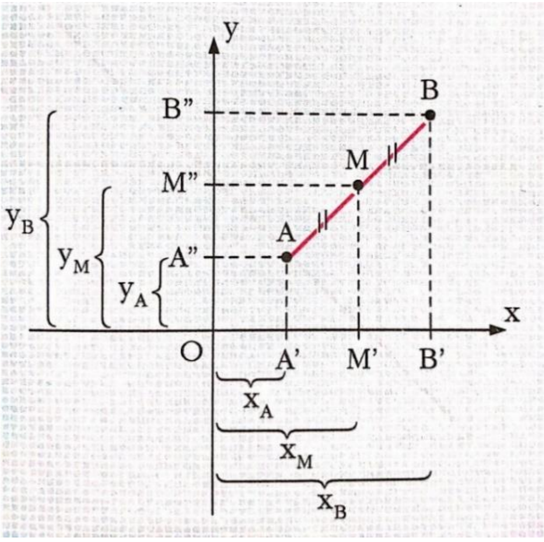


Figura 36: Representação geométrica do ponto médio
Fonte: Filho e Barreto (2000)

Da mesma forma, obtemos a ordenada Y_M do ponto médio M, a partir de $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$.

$$Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

Resumindo, as coordenadas do ponto médio M de um segmento AB são dadas por:

$$M\left(\frac{X_A+X_B}{2}, \frac{Y_A+Y_B}{2}\right)$$

Exemplo: As coordenadas do ponto médio M, do segmento AB de $A\,(-2,-6)$ e $B\,(8,4)$ são:

Atividade 8 (10 minutos)

Após, mostraremos aos alunos o conceito de colinearidade de três pontos. Três pontos, estão alinhados, ou seja, fazem parte de uma mesma reta *r*, se, e somente se, o determinante da matriz, formada pelas coordenadas dos pontos, for nulo.

Três pontos $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)\ e\ C = (x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se:

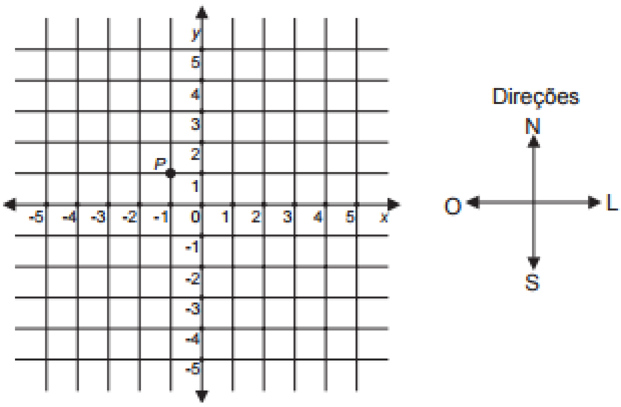
$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se $Det \neq 0$, os pontos são vértices de um triângulo.

Exemplo: Dados os pontos $A(3,1)$, $B(0,3)$ e $C(-3,5)$, verifique se estes pertencem a mesma reta.

Exercícios

1. (Questão adaptada ENEM 2014) Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô "anfíbio" que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra P, na ilustração.



A direção norte-sul é a mesma do eixo y, sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento de y, e a direção leste-oeste é a mesma do eixo x, sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de x.

Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano.

No plano cartesiano, qual será a posição do robô, depois de realizar os comandos dados pelo aluno?

Resolução: A posição inicial do robô, no plano cartesiano, é na coordenada $(-1,1)$*, no primeiro comando (4 norte) o robô salta para a coordenada* $(-1,5)$*, no segundo comando (2 leste) o robô salta para a coordenada* $(1,5)$ *e no último comando (3 sul) o robô salta para a coordenada* $(1,2)$*. Desta forma, a posição do robô, depois de realizar os comandos dados pelo aluno será* $(1,2)$.

2. Determine o ponto médio entre os pontos A e B, cujas coordenadas são $A = (-5,-10)$ e $B = (-7,-4)$.

   Resolução:

   $x_m = \frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow x_m = \frac{-5+(-7)}{2} \Rightarrow x_m = \frac{-12}{2} \Rightarrow x_m = -6.$

   $y_m = \frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow y_m = \frac{-10+(-4)}{2} \Rightarrow y_m = \frac{-14}{2} \Rightarrow y_m = -7.$

   Logo, as coordenadas do ponto médio são $M = (-6,-7)$.

3. A abscissa do ponto E é dada pela distância entre os pontos A e B, cujas coordenadas são $A = (6,-3)$ e $B = (6,5)$ e a ordenada do ponto E é dada pela distância entre os pontos C e D, cujas coordenadas são $C = (6,7)$ e $D = (9,11)$. Determine as coordenadas do ponto E.

   Resolução:

   $$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{(6-6)^2 + (5-(-3))^2} \Rightarrow$$
   $$d_{AB} = \sqrt{(0)^2 + (8)^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{0+64} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{64} \Rightarrow d_{AB} = 8.$$

   $$d_{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} \Rightarrow d_{CD} = \sqrt{(9-6)^2 + (11-7)^2} \Rightarrow d_{CD}$$
   $$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \Rightarrow d_{CD} = \sqrt{9+16} \Rightarrow d_{CD} = \sqrt{25} \Rightarrow d_{CD} = 5.$$

   Logo, as coordenadas do ponto E = (8, 5).

4. (UFMG) Determine o valor de ***m*** para que os pontos $A(2m+1, 2)$, $B(-6,-5)$ e $C(0,1)$ sejam colineares.

   Resolução: Para garantir que os pontos sejam colineares, é necessário que o determinante da matriz formada pelos pontos, seja nulo.

   Dada a matriz A: $\begin{pmatrix} 2m+1 & 2 & 1 \\ -6 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*, e seu determinante é:*

   $$[(2m+1) \cdot -5 \cdot 1] + [2 \cdot 1 \cdot 0] + [1 \cdot -6 \cdot 1] - [0 \cdot -5 \cdot 1] - [1 \cdot 1 \cdot (2m+1)] - [1 \cdot -6 \cdot 2] = 0$$

$$[(2m+1)\cdot -5]+0-6-0+[1\cdot(2m+1)]+12=0$$

$$-10m-5-6-2m-1+12=0$$

$$-12m+0=0$$

$$m=0$$

Portanto, o m deve assumir o valor de 0, para que os pontos sejam colineares. E o ponto A é $(1,2)$.

Avaliação:

A avaliação se desenvolverá no decorrer da aula por meio da observação e registro do desenvolvimento dos conceitos aprendidos pelos alunos em suas resoluções, e ainda por meio das resoluções da lista de exercícios que foi entregue.

Referências:

GIOVANNI, Jose Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: Ftd, 2002.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática: aula por aula.** São Paulo: FTD, 2000.

PROVA DO ENEM 2014. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 09 set. 2019.

PROVA DO ENEM 2016. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 09 set. 2019.

Anexo 1

Lista de exercícios – 5º Encontro

1. (Questão adaptada ENEM 2016) Observou-se que todas as formigas de um formigueiro trabalham de maneira ordeira e organizada. Foi feito um experimento com duas formigas e os resultados obtidos foram esboçados em

um plano cartesiano no qual os eixos estão graduados em quilômetros. As duas formigas partiram juntas do ponto O, origem do plano cartesiano xOy. Uma delas caminhou horizontalmente para o lado direito, a uma velocidade de 4 km/h. A outra caminhou verticalmente para cima, à velocidade de 3 km/h. Após 2 horas de movimento, quais as coordenadas cartesianas das posições de cada formiga?

Resolução:

Como elas andaram duas horas, multiplica sua velocidade por dois, então:

A primeira:

$$4 \cdot 2 = 8$$

e como foi para a direita, é a coordenada x, então fica $(8,0)$.

A segunda:

$$3 \cdot 2 = 6$$

e como foi para cima verticalmente, mas a coordenada está em y, então temos $(0,6)$.

2. Determine o valor de y de maneira que os pontos $P(1,3)$, $Q(3,4)$ e $R(y,2)$ sejam os vértices de um triângulo qualquer.

Resolução: Para que os pontos P, Q e R sejam os vértices de um triângulo qualquer, eles não podem estar alinhados. Dessa forma, o valor do determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos dados deverá ser diferente de zero.

Dada matriz A: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ y & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *formada pelas coordenadas dos pontos, basta calcular o determinante e garantir que ele seja diferente de 0.*

$$(1 \cdot 4 \cdot 1) + (3 \cdot 1 \cdot y) + (1 \cdot 3 \cdot 2) - (y \cdot 4 \cdot 1) - (2 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 3 \cdot 3) \neq 0$$

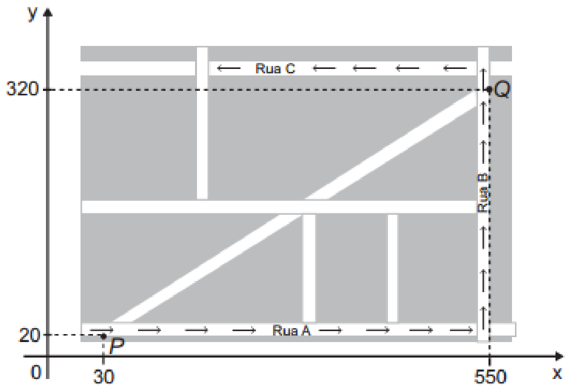
$$4 + 3y + 6 - 4y - 2 - 9 \neq 0$$

$$-1 - y \neq 0$$

$$y \neq -1$$

Sendo assim, tendo $y \neq -1$, garantimos que os pontos não são colineares, e consequentemente eles serão vértices de um triângulo.

3. Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. Quais devem ser as coordenadas do novo ponto de parada?

Resolução: Temos os pontos $P(30, 20)$ e $Q(550, 320)$. A distância percorrida pelo ônibus foi de: $(550 - 30) + (320 - 20) = 820$. O ponto T deve dividir a trajetória ao meio, logo, a distância percorrida P e T deve ser 410, assim, as coordenadas desse ponto será de $T\ (30 + 410, 20) = T(440, 20)$.

6.1.2 Relatório

No dia 14 de setembro de 2019, sábado, realizamos o quinto encontro do Promat na Unioeste, Cascavel. Estavam presentes 21 alunos organizados em grupos como de costume. Iniciamos a aula retomando as atividades entregues no encontro anterior, questionando os alunos sobre quais apresentaram dúvidas e gostariam que fossem resolvidas. Os alunos não se manifestaram e percebemos que poucos resolveram a lista, diante disso, escolhemos uma atividade, que acreditávamos ser a mais complicada, para resolver no quadro. Durante a resolução tivemos a ajuda de alguns alunos, entre os poucos que haviam resolvido às atividades.

Posteriormente, iniciamos o conteúdo do novo módulo, relatando aos alunos que nos próximos três encontros serão trabalhados os conceitos de Geometria

Analítica. Introduzimos o conceito de ponto e de plano cartesiano por meio de um jogo, sendo ele, uma adaptação do tradicional jogo “Batalha Naval”.

Sendo assim para darmos início ao jogo dividimos cada grupo novamente em duas equipes. Cada equipe recebeu uma folha com um plano cartesiano, no qual deveriam marcar pontos para simbolizar os navios, marcando dois navios de um ponto, três navios de três pontos, dois navios de quatro pontos e um navio de cinco pontos.

Após explicarmos o funcionamento do jogo para os alunos, andávamos em sala com o intuito de auxiliá-los em eventuais dúvidas que pudessem surgir. Durante a primeira etapa do jogo que consistia em marcar pontos no plano cartesiano para representar os navios, não notamos dúvidas dos alunos, apenas realizávamos a conferência em relação à quantidade de navios de cada tamanho.

Depois dessa etapa alguns alunos tiveram dúvidas quanto às coordenadas dos pontos, mostrando que não compreenderam que um par ordenado, representa as coordenadas de um ponto. Explicando que um par ordenado da forma (x, y) representa a posição de um ponto sobre um plano cartesiano, em que a primeira coordenada se refere à distância do ponto em relação ao eixo y, e a segunda se refere à distância do ponto em relação ao eixo x. Então para localizarmos um ponto no plano cartesiano podíamos traçar retas perpendiculares ao eixo x e y passando pelas coordenadas do ponto e que a intersecção dessas retas perpendiculares será a localização do ponto.

Acreditamos que o jogo possibilitou grande aprendizado a todos alunos, os quais se recordaram dos conceitos sobre plano cartesiano e pontos. O fato do jogo ser jogado em grupo possibilitou a interação entre os alunos, isso promoveu aprendizado, pois nos grupos eles se sentem à vontade para perguntar aos seus colegas e, consequentemente, sanar suas dúvidas.

Percebemos que a introdução dos conceitos por meio de uma atividade não convencional proporcionou aos alunos uma experiência de aprendizagem mais significativa, do que somente trabalhar os conteúdos de forma mecânica. A dificuldade que os alunos apresentaram em utilizar conceitos recorrentemente trabalhados no colégio regular, e alguns a pouco tempo, como o conteúdo de geometria analítica, mostrou-nos que não houve assimilação desse conhecimento quando o estudaram na escola. Esperamos que com o trabalho usando este jogo, os alunos possam futuramente se recordar desta atividade para usá-la em outros contextos.

Após o jogo, relatamos aos alunos que o estudo da Geometria Analítica está relacionado a três elementos: o ponto, a reta e a circunferência. Diante disso, neste primeiro encontro abordaríamos os conceitos relacionados ao ponto.

Começamos procedendo ao estudo de ponto por meio do plano cartesiano, o qual foi desenhado no quadro, e em seguida, mostrado os eixos X, o eixo das abscissas e o Y, o eixo das ordenadas, o ponto 0, a origem, ou seja, a intersecção dos eixos X e Y e os quadrantes. Esses conceitos já tinham sido abordados nos encontros anteriores em Trigonometria, porém realizamos a retomada para os alunos compreenderem melhor. Em seguida, explicamos como encontrar um ponto no plano cartesiano, sendo que o mesmo possui duas coordenadas, uma delas representando a posição do ponto em relação ao eixo X e a outra representando a posição do ponto em relação ao eixo Y, mostrando então no plano cartesiano que o ponto procurado se localiza na intersecção das projeções da coordenada da abscissa com a ordenada. Para melhor compreensão dos alunos, localizamos alguns pontos no plano cartesiano desenhado no quadro, pedindo sugestões dos alunos, sobre quais pontos tinham marcado no jogo Batalha Naval.

Em seguida, passamos um exercício no qual desenhamos um plano cartesiano no quadro, marcando alguns pontos. Solicitamos aos alunos que identificassem as coordenadas daqueles pontos, deixamos alguns minutos para resolverem e então, realizamos a correção no quadro.

Prosseguindo com a aula, abordamos os conceitos de bissetrizes dos quadrantes, realizando o desenho do plano cartesiano no quadro e explicando o que é a bissetriz de um quadrante, comentando sobre as suas propriedades e exemplificando para melhor compreensão.

Em seguida, passamos o conceito de distância entre pontos, explicando que podemos encontrar a distância entre dois pontos por meio das coordenadas desses pontos, e que essa distância pode ser representada por uma reta. Para isso explicamos no quadro, utilizando representações geométricas os três casos que podem ocorrer na distância entre dois pontos: quando o segmento é paralelo ao eixo das ordenadas, quando o segmento é paralelo ao eixo das abscissas e quando o segmento não é paralelo a nenhum eixo. Posteriormente, passamos um exercício no quadro para os alunos resolverem, o qual consistia em encontrar a distância entre dois pontos, abordando os três casos apresentados. Em seguida, realizamos a correção no quadro.

Dando sequência a aula, trabalhamos o conceito de ponto médio de um segmento, por meio de um exemplo e uma representação geométrica desenvolvida no quadro, generalizando até encontrar as coordenadas do ponto médio do segmento. Após, passamos um exercício para os alunos resolverem, abordando esse conceito, e em seguida, foi realizada a correção.

Posteriormente, apresentamos aos alunos o conceito de colinearidade de três pontos, mostrando de forma geométrica no plano cartesiano, que os pontos são colineares se estão alinhados em uma mesma reta. E ainda, abordamos o conceito de determinante, ou seja, se o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos for nulo, esses pontos são colineares.

Para abordar o conceito de determinante, questionamos primeiramente os alunos se já tinham visto em algum momento da vida escolar, tivemos respostas positivas, ou seja, todos os alunos responderam que já haviam visto, porém tinham esquecido. Então, realizamos um exemplo no quadro junto com os alunos, explicando passo a passo como realizar o cálculo do determinante. Em seguida, passamos um exemplo, o qual consistia em três pontos e era necessário verificar se estes eram colineares, resolvemos com a ajuda dos alunos.

Por fim, entregamos uma lista de exercício para os alunos resolverem em sala, os quais continham todos os conceitos abordados no decorrer da aula. Durante a resolução dos alunos estávamos sempre circulando nos grupos, dispostos a sanar dúvidas e ajudar no que fosse necessário. A maioria dos alunos resolveram rapidamente a lista, não apresentando dificuldades e comentando que estava muito fácil, outros demoraram um pouco mais. Porém, foi possível realizar a correção dos exercícios ao fim da aula, com a ajuda e participação dos alunos. Percebemos então que houve compreensão dos conceitos apresentados.

Ao término da aula, entregamos a lista de exercícios para casa, nos despedimos dos alunos e relatamos que esperávamos todos no próximo encontro, lembrando-os de resolverem os exercícios para corrigirmos e sanarmos as dúvidas no encontro seguinte.

6.2 Atividades dia 21/09

6.2.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 6º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Trabalhar com conceito de retas.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com conceito de retas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Determinar a equação geral e a partir disso, a equação reduzida de uma reta;
- Determinar o coeficiente angular da reta e compreender que a inclinação da reta é definida pelo coeficiente angular;
- Identificar a posição relativa entre duas retas.
- Resolver exercícios que envolvam o conceito de reta;

Conteúdo:

Geometria Analítica.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, listas de exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Atividade 01 (30 minutos)

Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção dos exercícios propostos para serem feitos em casa.

Atividade 02 (20 minutos)

Após, iremos definir a equação geral da reta.

Definição: Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencente à reta r.

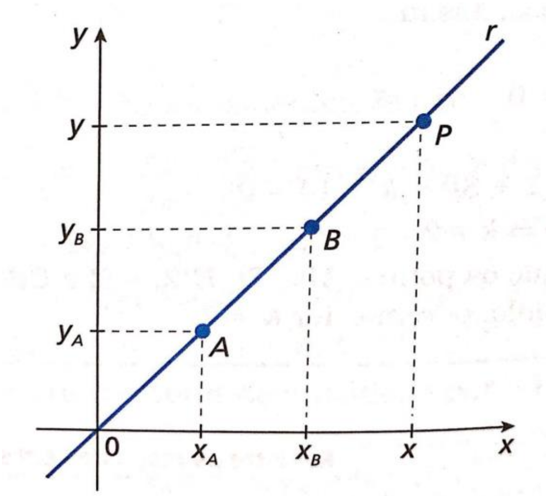


Figura 37: Equação geral da reta
Fonte: Leonardo (2013).

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B, e P, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Como, nesse determinante, as únicas variáveis são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer:

$$(y_A - y_B) = a$$

$$(x_B - x_A) = b$$

$$x_A y_B - x_B y_A = c$$

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta:**

$$ax + by + c = 0$$

Exemplo: Obter a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1{,}3)$ e $B(3{,}2)$.

Resolução: Considere um ponto $P(x, y)$ pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B. Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 2 - 9 - 2x + y = 0 \Rightarrow x + 4y - 11 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é:

$$x = 4y - 11 = 0$$

Atividade 03 (40 minutos)

Posteriormente, iremos propor uma questão pela qual objetiva-se discutir sobre o coeficiente angular da reta.

Questão:

(Leonardo (2013)) Um laboratório estudou uma colônia de bactérias composta por 350 indivíduos vivos. Verificou-se que, após a aplicação de certa droga, o número de indivíduos vivos na colônia diminuía com o tempo, sendo que, após 25 horas, não havia mais nenhum indivíduo vivo na colônia. Supondo que o número *y* de indivíduos vivos varie linearmente com o tempo x de vida, contando a partir da administração da droga, pede-se:

a) Determinar a expressão que relaciona *y* a *x*;
b) O número de indivíduos que permaneciam vivos após 10 horas do início do experimento.

Resolução:

a) Vamos considerar o par ordenado (x, y) para identificar que, após x horas, havia y indivíduos vivos na colônia. Assim, temos pontos com os seguintes significados:

- *A= (0,350): estado inicial da colônia (no tempo 0h, havia 350 indivíduos);*
- *B= (25,0): estado final da colônia (no tempo 25h, havia 0 indivíduo).*

Como a relação é linear, seu gráfico é um conjunto de pontos pertencentes à reta que passa pelos pontos A e B.

Formalização:

*O **coeficiente angular** m de uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ qualquer é dada por:*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

O coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é

$$m = \frac{0 - 350}{25 - 0} = -14.$$

A reta tem coeficiente angular $m = -14$ e passa por B = (25,0). Assim como:

A equação da reta que passa por $A = (x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

Logo,

$$y - 0 = -14(x - 25) \Rightarrow y = -14x + 350 \Rightarrow y + 14x - 350 = 0.$$

b) *Para obter o número de indivíduos vivos após 10 horas do início do experimento basta substituir x por 10 na igualdade* $y = -14x + 350$. *Assim:*

$y = -14 \cdot 10 + 350 = 210$.

Portanto, após 10 horas, havia 210 indivíduos vivos na colônia de bactérias.

Após correção desta questão, deduziremos, juntamente com os alunos, que o coeficiente angular é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x.

Para isso consideremos a reta que passa por A e B e faz um ângulo α com o eixo x:

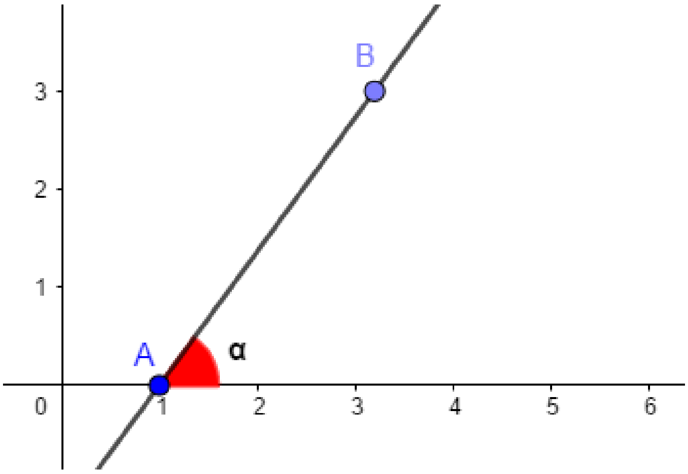


Figura 38: Reta que passa por A e B e faz um ângulo α com o eixo x
Fonte: Acervo dos autores.

Notemos que $y_B - y_A$ é a diferença entre os valores de y de A e B (medida do cateto oposto a α) e $x_B - x_A$ é a diferença entre os valores de x de A e B (medida do cateto adjacente a α). Assim percebemos o seguinte triângulo retângulo na figura anterior:

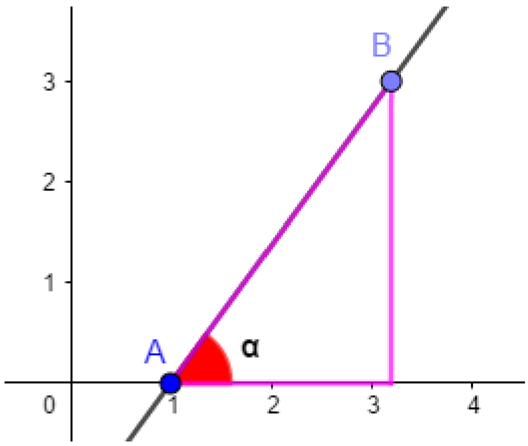


Figura 39: Ilustração do triângulo
Fonte: Acervo dos autores

Tomando como referência o ângulo α, sabemos a medida de seu cateto oposto e adjacente, logo podemos escrever m como:

$$m = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = tg\ \alpha.$$

Assim podemos concluir que:

Se:

- $0° \leq \alpha < 90° \Rightarrow m \geq 0$;
- $90° < \alpha < 180° \Rightarrow m < 0$;
- $\alpha = 90° \Rightarrow tg\ 90°\ não\ é\ definida.$

Atividade 04 (20 minutos)

Em seguida, iremos definir a equação reduzida da reta.

Definição: Sabemos que a equação da reta r que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é dada por $y - y_A = m(x - x_A)$. Como a reta r intercepta o eixo y no ponto $N(0, n)$, temos:

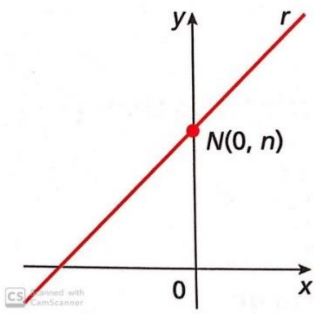


Figura 40: Equação reduzida da reta.
Fonte: Leonardo (2013).

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow y = mx + n$$

A forma $y = mx + n$ é denominada **equação reduzida da reta**, em que m é o coeficiente angular da reta e n é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo y.

Exemplo: Escrever na forma reduzida a equação da reta que passa pelo ponto $A(2,5)$ e tem coeficiente angular $m = -1$.

Resolução: Como $m = -1$ *e* $A(2,5)$, *temos:*

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

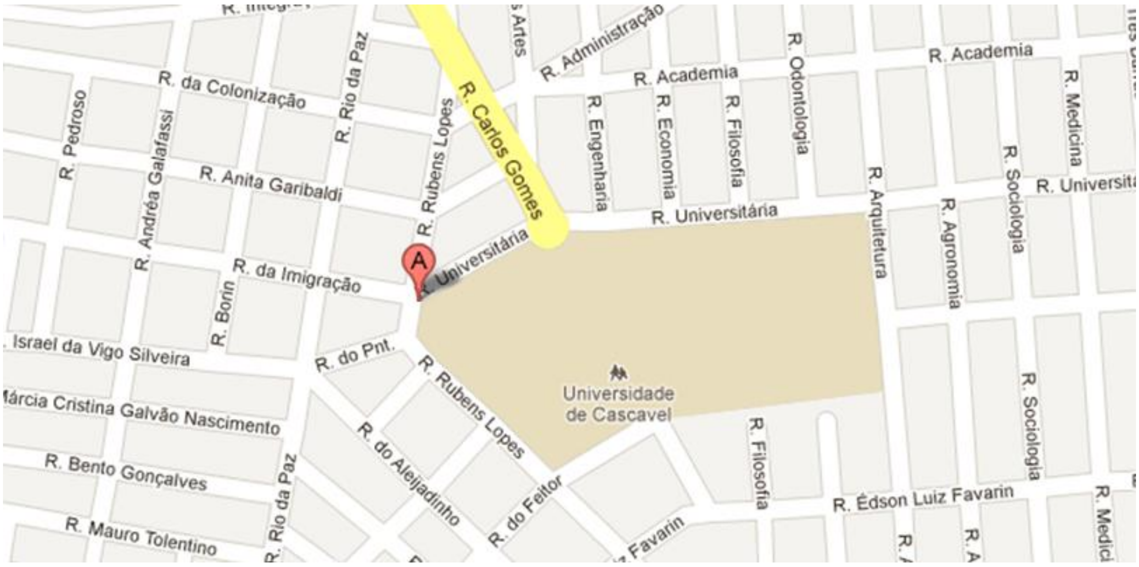
$$y - 5 = -1(x - 2) \Rightarrow y - 5 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 7$$

Portanto, a equação reduzida da reta que passa pelo ponto $A(2,5)$ *e tem coeficiente angular* $m = -1$ *é* $y = -x + 7$.

Atividade 05 (30 minutos)

Neste momento iremos abordar o conteúdo de posições relativas entre duas retas, por meio da seguinte atividade.

Atividade: Com base no mapa abaixo responda os seguintes questionamentos:



a) Dê exemplos de ruas que são paralelas?
b) Dê exemplos de ruas que são concorrentes?
c) Dê exemplos de ruas que são perpendiculares?
d) A rua Rio da Paz e a rua do Aleijadinho são perpendiculares? Por quê?
e) Quais das ruas que aparecem no mapa são paralelas à rua Anita Garibaldi?
f) Quais das ruas que aparecem no mapa são perpendiculares a rua Universitária?

A partir dessas perguntas e das respostas dos alunos, iremos definir retas paralelas, coincidentes e concorrentes.

Consideraremos as retas $l_1: y = m_1x + n_1$ e $l_2: y = m_2x + n_2$ de inclinações α_1 e α_2, respectivamente.

Podem ocorrer os seguintes casos:

1° caso: $\alpha_1 = \alpha_2$

Supondo $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 90°$, temos:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$$

Nesse caso, as retas l_1 e l_2 são paralelas $(l_1 // l_2)$, ou coincidentes $(l_1 \equiv l_2)$.

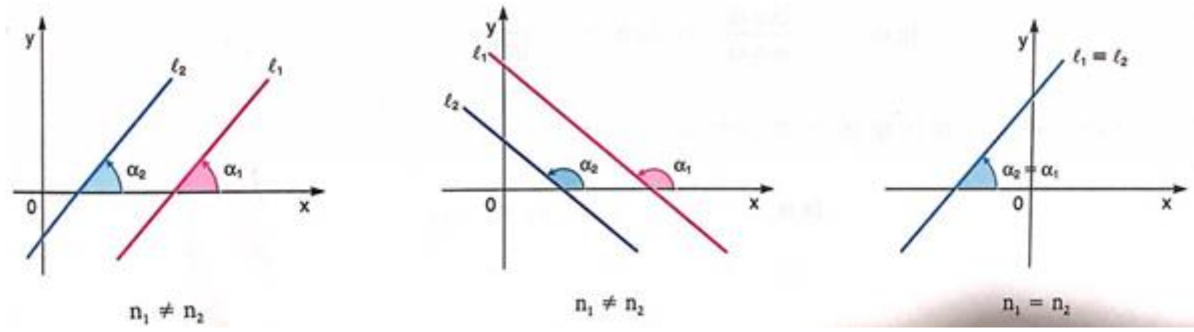


Figura 41: Retas Paralelas e Coincidentes
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Vejamos o que acontece se $\alpha_1 = \alpha_2 = 90°$. Particularmente teremos, $m_1 = tg\alpha_1$ e $m_2 = tg\alpha_2$ não estão definidos e as retas l_1 e l_2 são verticais.

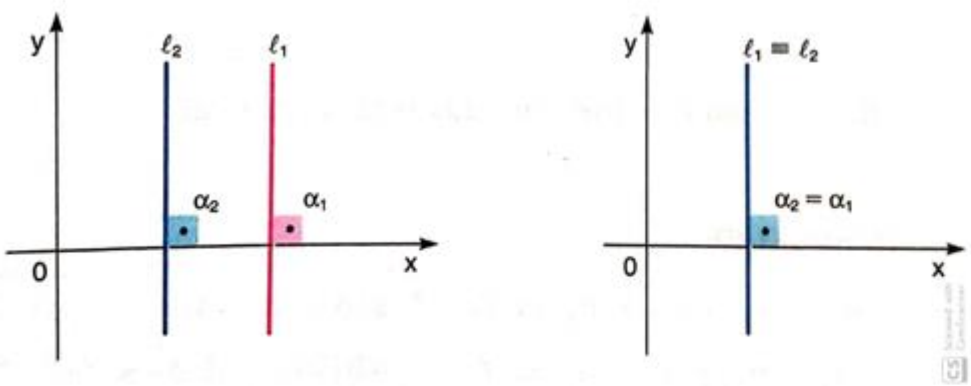


Figura 42: Retas Verticais
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

2° caso: $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Supondo $\alpha_1 \neq 90°$ *e* $\alpha_2 \neq 90°$, temos:

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \rightarrow tg\alpha_1 \neq tg\alpha_2 \leftrightarrow m_1 \neq m_2$$

Nesse caso, as retas l_1 e l_2 são concorrentes $(l_1 \times l_2)$.

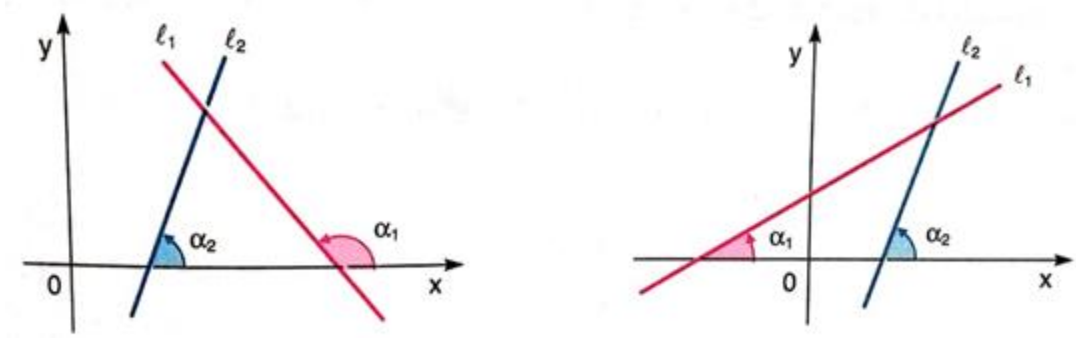


Figura 43: Retas Concorrentes
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Vejamos a condição particular em que as retas l_1 e l_2 são perpendiculares $(l_1 \perp l_2)$.

Definição: Duas retas l_1 e l_2 de coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente, são perpendiculares se, e somente se, $\mathrm{m}_1 = -\frac{1}{\mathrm{m}_2}$.

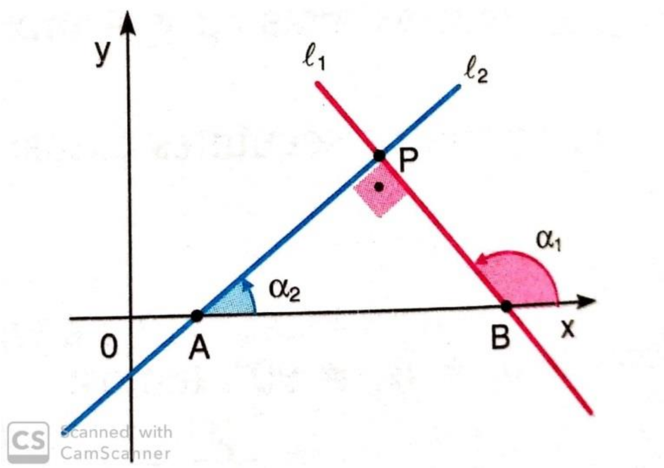


Figura 44: Retas Perpendiculares
Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Junior (2002)

Atividade 06 (90 minutos)

Após, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios para serem resolvidos na sala. Durante essa atividade auxiliaremos os alunos nos grupos.

1. Os pontos *A(1,2), B(3,1)* e *C(2,4)* são os vértices de um triângulo. Determine a equação das retas suporte dos lados desse triângulo.

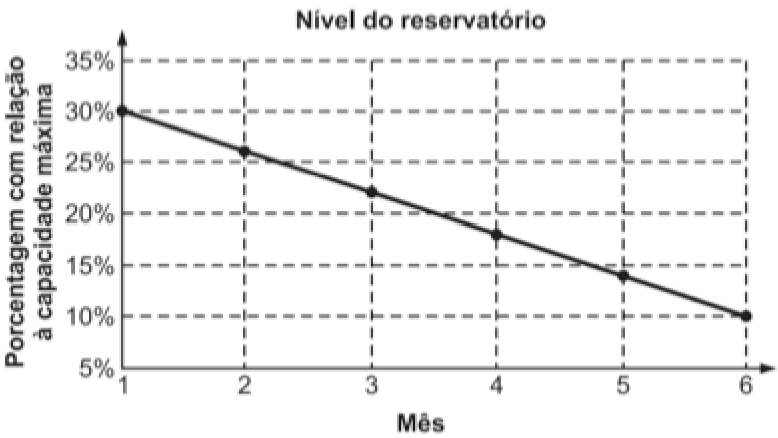
   Resolução:

Equação da reta suporte do lado AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + 3y + 1 - 6 - y -$ $x = 0 \rightarrow x + 2y - 5 = 0.$

Equação da reta suporte do lado AC: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + 2y + 4 - 4 - y -$ $4x = 0 \rightarrow -2x + y = 0$

Equação da reta suporte do lado BC: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 2y + 12 - 2 - 3y -$ $4x = 0 \rightarrow -3x - y + 10 = 0.$

2. (ENEM (2016) - adaptada) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses. Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?



Resolução: Como conhecemos dois pontos desta reta A = (6,10) e B = (1,30) podemos determinar sua equação $y = ax + b$*:*

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{30 - 10}{1 - 6} = \frac{20}{-5} = -4.$$

Substituindo a e A = (6, 10) na equação $y = ax + b$*, temos:*

$$10 = -4(6) + b \Rightarrow b = 10 + 24 \Rightarrow b = 34.$$

Assim teremos a equação:

$$y = -4x + 34.$$

Para $y = 0$*, temos:*

$$0 = -4x + 34 \Rightarrow 4x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{4} = 8{,}5.$$

Assim, o tempo mínimo depois dos 6 meses para que atinja o nível 0 será:

$$8{,}5 - 6 = 2{,}5\, meses.$$

3. (UFPA) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e é perpendicular a uma reta que forma com o sentido positivo do eixo do *x* um ângulo cuja tangente é $\frac{5}{2}$.

Resolução: Queremos encontrar uma reta s que passa pelo ponto $P = (\frac{1}{2}, -1)$ *perpendicular à reta r que tem coeficiente angular* $\frac{5}{2}$*, dessa forma devemos ter:*

$$ms \cdot mr = -1$$

$$ms \cdot \frac{5}{2} = -1 \rightarrow ms = \frac{-2}{5}$$

Assim a reta s é dada por:

$$y - y_0 = ms(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{-2}{5} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{-2x}{5} - \frac{4}{5}$$

4. (UFPA) Dados os pontos A(2,6) e B(4,3), determine a equação da mediatriz do segmento AB.

Resolução: Explicação passo-a-passo:

o ponto médio através dos pontos

$$P_m = \left(\frac{(2+4)}{2}; \frac{(6+3)}{2}\right) \rightarrow m = \left(3; \frac{9}{2}\right)$$

agora fazendo a equação da reta

$$y = ax + b \rightarrow (y - yo) = m_1.(x - xo) \rightarrow m_1 = \frac{(y - yo)}{(x - xo)} \rightarrow m_1 = \frac{(3-6)}{(4-2)} \rightarrow m_1 = \frac{-3}{2}$$

utilizando os pontos de B na equação

$$3 = \frac{-3}{2} \cdot 4 + b \rightarrow 3 = \frac{-12}{2} + b \rightarrow 3 = -6 + b \rightarrow b = 9$$

logo, a equação AB é:

$$y = \frac{-3}{2}x + 9$$

Esses dois segmentos formam um ângulo de 90° (perpendicular) então:

$$m_1.m_2 = -1 \rightarrow \frac{-3}{2}m_2 = -1 \rightarrow m_2 = \frac{2}{3}$$

$$y = ax + b \rightarrow \frac{9}{2} = \frac{2}{3}.3 + b \rightarrow \frac{9}{2} = \frac{6}{3} + b \rightarrow \frac{9}{2} = 2 + b \rightarrow b = \frac{5}{2}$$

Então a equação da reta mediatriz do seguimento AB é:

$$r = \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$$

Após as resoluções, entregaremos outra lista de exercícios para casa, a qual iremos corrigir na próxima aula. (Anexo 1)

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação e resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

GIOVANNI, Jose Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: FTD, 2002.

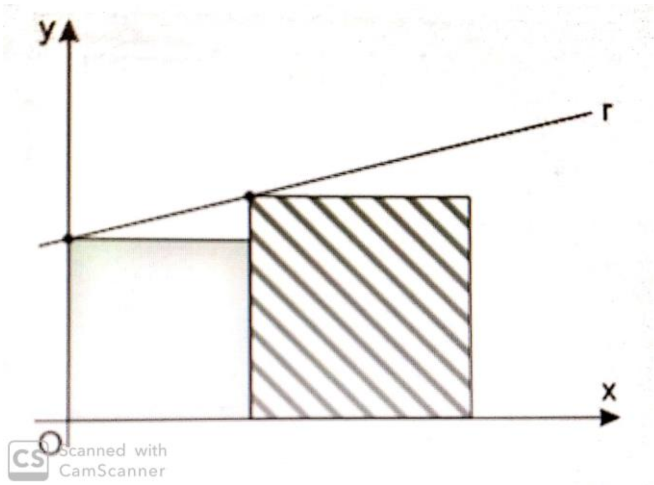
LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática 3**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVA DO ENEM 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/cad_5_prova_amarelo_12112016.pdf>. Acesso em: 29 mai. 2019.

Anexo 1

Lista de Exercícios – 6º Encontro

1. (UFPR 2012). Na figura abaixo estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é?



Resolução:

Sabendo as áreas dos quadrados podemos saber os pontos em que seus vértices se encontram, dessa forma achamos o coeficiente angular da reta r:

$$m_r = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}$$

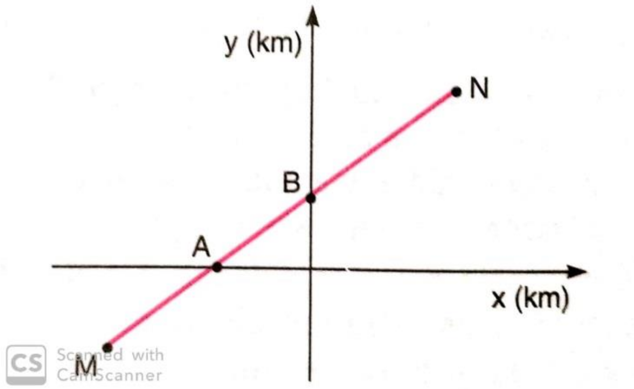
Logo a equação reduzida da reta r é:

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Que é equivalente a equação:

$$x - 2y = -4$$

2. (PUCC-SP - Adaptada). Na figura abaixo tem-se representada, em um sistema de eixos cartesianos ortogonais, a rota de uma aeronave, de uma cidade *M* a uma cidade *N*, passando sobre as pequenas cidades A e B.



Se os quatro pontos pertencem à reta de equação $4x - 3y + 1200 = 0$, a distância entre as cidades A e B, em quilômetros é?

Resolução: para $y = 0$, substituindo na equação teremos

$$x = -300$$

Assim o ponto A tem coordenadas (-300, 0).

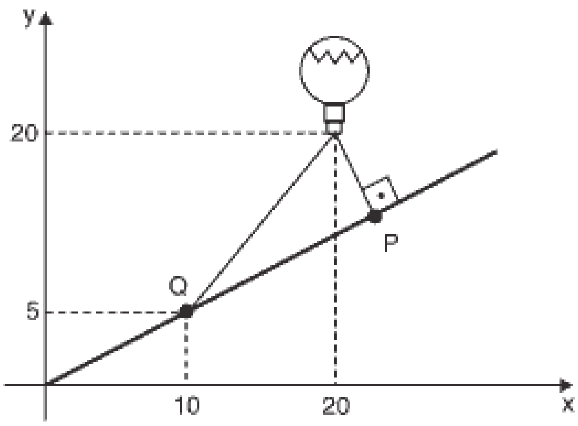
Para $x = 0$, teremos

$$y = 400$$

Assim o ponto B tem coordenadas (0, 400).

Então $AB^2 = 300^2 + 400^2 \rightarrow AB = 500$

3. (UFPR 2011 - Adaptada) Um balão de ar quente foi lançado de uma rampa inclinada. Utilizando o plano cartesiano, a figura abaixo descreve a situação de maneira simplificada.



Ao ser lançado, o balão esticou uma corda presa aos pontos P e Q, mantendo-se fixo no ar. Quais são as coordenadas do ponto P, indicado na figura?

Resolução: Utilizaremos as equações da reta para resolver.

Note que a reta que passa pelos pontos P e Q passa também pela origem, então esta reta tem a forma $y = ax$.

Utilizando o ponto $Q\ (10, 5)$*, encontramos o valor de a:*

$5 = a \cdot 10$

$a = 0{,}5$

$y = 0{,}5x$

Agora, sabemos que o segmento do balão e o ponto P é perpendicular à reta que acabamos de encontrar. Então seu coeficiente angular é o inverso negativo, ou seja, -2*. A reta perpendicular que passa pelo ponto do balão* $(20{,}20)$ *é:*

$y = ax + b$

$20 = -2 \cdot 20 + b$

$b = 60$

$y = -2x + 60$

Para encontrar o ponto P, basta achar a interseção entre as duas retas:

$0{,}5x = -2x + 60$

$2{,}5x = 60$

$x = 24$

Se $x = 24$*,* $y = 12$*. Então o ponto P é* $(24, 12)$*.*

6.2.2 Relatório

No dia 21 de setembro de 2019, sábado, realizamos o sexto encontro do Promat na Unioeste, Cascavel. Estavam presentes 21 alunos. Iniciamos a aula retomando as atividades entregues no encontro anterior, questionando os alunos sobre quais exercícios apresentaram dúvidas e gostariam que fossem resolvidos. Os alunos falaram que a última questão, a qual envolvia a lei de formação de uma função que descreve as marés de determinado lugar, havia gerado dúvidas. Acreditamos que essas dúvidas foram geradas por ser uma questão apenas interpretativa, não havendo necessidade de se efetuar cálculos. Dessa forma, fizemos a correção da questão no quadro relembrando os conceitos trabalhados na aula anterior. Percebemos que as dúvidas foram geradas pela dificuldade de interpretação do exercício, pois sua resolução era básica e após o entendimento do enunciado, os alunos nos auxiliaram na resolução do exercício no quadro, sendo assim acreditamos que as dúvidas foram sanadas.

Após esse momento iniciamos à aula sobre retas, abordando em um primeiro momento o conceito de equação geral da reta. Para isso utilizamos o conceito de colinearidade de pontos, o qual foi estudado na aula anterior. Após encontrada a equação geral da reta para um caso genérico, expusemos um exemplo para ser resolvido pelos alunos, com o seguinte enunciado: dados dois pontos de uma reta encontrar a equação geral dessa reta. Não houve dificuldade dos alunos na resolução deste exemplo, sendo assim acreditamos que este conceito foi entendido por eles.

Dando sequência à aula, propomos uma questão com o objetivo de trabalhar o coeficiente angular da reta. Após a resolução do problema por parte dos alunos formalizamos o conceito e em seguida corrigimos o exercício no quadro. Após isso deduzimos juntamente com os alunos no quadro por meio de um desenho e relembrando os conceitos estudados sobre trigonometria, que o coeficiente angular é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo *x.* A dedução da fórmula no quadro foi proveitosa, pois se em algum outro momento da vida dos alunos eles se depararem com um problema que envolva esse conceito, acreditamos que eles sejam capazes de novamente deduzir a fórmula, visto que eles não apenas a decoraram, mas compreenderam a construção dela.

Em seguida direcionamos a aula com o intuito de trabalhar com o conceito de equação reduzida da reta, sendo que a definimos, utilizando o conceito de coeficiente angular visto anteriormente. Após propusemos um exercício para a fixação do conceito e não percebemos dificuldades na resolução do exercício.

Após a correção do exercício no quadro, iniciamos o conteúdo de posições relativas entre retas, por meio de um exercício que continha um mapa e questionamentos acerca das posições relativas entre as ruas. Fizemos a correção oral deste exercício, e formalizamos os conceitos relacionando os coeficientes angulares das retas com as posições relativas destas. Por fim projetamos imagens de retas para que os alunos vissem geometricamente o conteúdo trabalhado.

Na sequência entregamos aos alunos uma lista de exercícios para ser resolvida ainda durante a aula. Andávamos pela sala com o objetivo de sanar eventuais dúvidas que os alunos tivessem. Percebemos que as dificuldades estavam na interpretação dos exercícios, sendo que após a explicação dos enunciados os alunos conseguiam resolver os exercícios.

Após a resolução dos exercícios pelos alunos, corrigimos as questões no quadro, contando com a participação oral deles. Expusemos nossa estratégia de resolução, mas estávamos sempre abertos a escutar os alunos e aceitar as estratégias adotadas por eles.

Ao término da aula, entregamos a lista de exercícios para casa, nos despedindo dos alunos e relatando que esperávamos todos no próximo encontro, lembrando-os de resolverem os exercícios para corrigirmos e sanarmos as dúvidas no encontro seguinte.

6.3 Atividades dia 28/09

6.3.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 7º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a aprender conceitos básicos sobre circunferência.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com circunferência, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar equações de uma circunferência;
- Discutir posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.

Conteúdo:

Circunferência.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Atividade 01 (30 minutos)

Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção dos exercícios propostos para serem feitos em casa.

Atividade 02 (30 minutos)

Em seguida, desenvolveremos a seguinte tarefa, destinando alguns minutos para que eles resolvam o problema.

Questão 1: Observe as imagens que representam rodas:

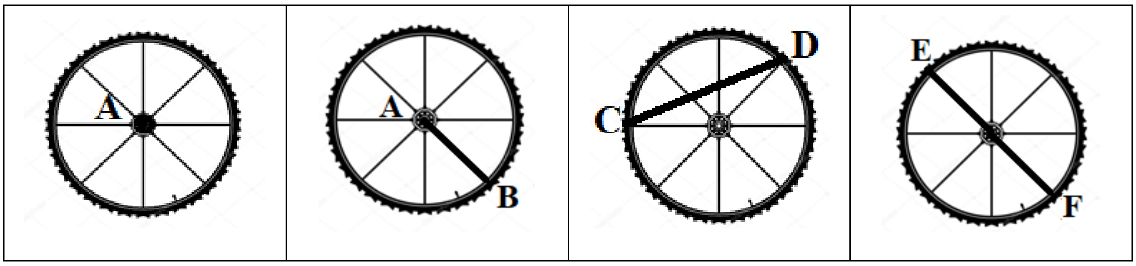


Figura 45: Roda de bicicleta e conceitos relacionados à circunferência.

Fonte: Adaptada de Depositphotos (2018).

a) Que forma geométrica podemos associar ao contorno da roda?

Resolução: A uma circunferência.

b) Como denominamos o ponto A?

Resolução: É um ponto fixo chamado de centro da circunferência.

c) Como chamamos o segmento $\overline{AB}$? E o segmento $\overline{CD}$? E o segmento $\overline{EF}$?

Resolução: O segmento $\overline{AB}$ é chamado de raio. O segmento $\overline{CD}$ é chamado de corda. O segmento $\overline{EF}$ é chamado de diâmetro da circunferência.

Posteriormente, corrigiremos as questões acima sanando as possíveis dúvidas e, com isso, definiremos os conceitos abordados.

Def.: **Circunferência** é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância não nula de um ponto fixo, denominado centro.

Def.: Cada segmento de reta que une o centro da circunferência a um de seus pontos é chamado **raio (r)**.

Def.: A **corda** é definida como segmento de reta que liga dois pontos pertencentes a uma circunferência.

Def.: O **diâmetro** fica definido como a maior corda que uma circunferência possui, ou, como a corda que passa pelo centro.

Após, apresentaremos a seguinte questão:

Questão 2: Pedro foi ao parque de diversões para brincar na Roda Gigante, conforme ilustra a Figura:

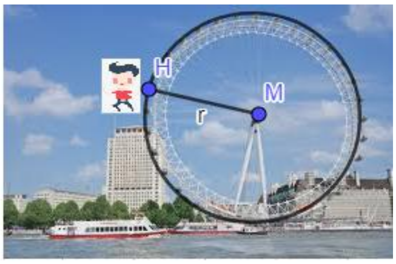


Figura 46: Roda gigante.
Fonte: Adaptada de Pxhere (2018).

Considere a imagem do brinquedo como a representação de uma circunferência. Sabendo que Pedro está localizado no ponto *H(x,y),* que o centro da circunferência é o ponto M(a,b) e que r é o raio da circunferência.

a) Determine a equação reduzida da circunferência.

Resolução: Vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer H(x,y) que pertence à circunferência de centro M(a,b) e raio r. O ponto H(x,y) pertence à circunferência se, e somente se, $d_{MH} = r$.

Relembraremos que a distância entre dois pontos é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Logo,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

Formalização:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

A equação descrita acima é conhecida como equação reduzida da circunferência de centro C(a,b) e raio r. Enfatizaremos que o raio da circunferência é sempre maior que zero.

b) Suponha que r=3 e C(-2,1), determine a equação reduzida dessa circunferência.

Resolução: Tomando um ponto H (x,y) qualquer da circunferência, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$[x-(-2)]^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

Logo, $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ *é a equação reduzida dessa circunferência.*

Atividade 3 (20 minutos)

Questão 3: (Questão adaptada de Ribeiro (2010)) Os primeiros anos do século XX ficaram conhecidos como o início da era nuclear em razão do deslumbramento causado pelas possibilidades da energia nuclear. No entanto essa energia passou a ser utilizada para fins bélicos (utilizados em guerras). Em 1945, a primeira bomba atômica foi estada (lançada) pelos EUA em um deserto do Novo México. Menos de um mês depois, esse país lançou outra bomba agora sobre a cidade de Hiroshima, no Japão, com um raio de destruição de 2 km, liberando energia equivalente a 20 mil toneladas de TNT (material explosivo) (20 quilotons). Atualmente, muito se tem discutido acerca da diminuição do número de armas nucleares. Ainda assim, alguns países insistem em desenvolver esse tipo de armamento. Certo país lançou um míssil, como teste, sobre uma região e devastou uma área de formato circular. O raio de destruição desse míssil foi registrado por meio da equação $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 4 = 0$. Determine o centro da circunferência e quanto mede o raio.

Na resolução desta questão, questionaremos os alunos a respeito da equação disponibilizada, chamando a atenção para a diferença em relação aos demais exercícios. Espera-se que eles observem que a equação não está na forma reduzida. Em seguida, mostraremos como encontrar a equação geral de uma circunferência a partir da equação reduzida.

A **equação geral** da circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r é obtida desenvolvendo-se os quadrados da equação reduzida:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0.$$

Portanto, a equação geral da circunferência é:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Essa equação também é chamada de **equação normal** da circunferência.

Resolução:

Ressaltaremos que a equação $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 4 = 0$ está na forma geral.

Podemos encontrar o raio e o centro da circunferência analisando os coeficientes da equação geral. Sabendo-se que a equação geral de uma circunferência é escrita como $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, e que a equação dada é $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 4 = 0$, para encontrar o centro e o raio da circunferência precisamos determinar os valores de a, b e r.

Ressaltaremos que para encontrar o valor de a, relacionamos o coeficiente de x na equação geral genérica e o coeficiente de x na equação geral dada no problema:

$$-2a = -12 \Rightarrow a = 6.$$

Procedemos de forma análoga para determinar b. Relacionamos o coeficiente de y na equação geral genérica e o coeficiente de y na equação geral dada no problema, assim:

$$-2b = -6 \Rightarrow b = 3.$$

Portanto, o centro da circunferência é $C = (6,3)$.

Agora vamos determinar o raio. Sabemos que

$$a^2 + b^2 - r^2 = -4.$$

Já encontramos a e b. Então, igualamos $a^2 + b^2 - r^2$ ao termo que está sozinho. Segue que

$$6^2 + 3^2 - r^2 = -4 \quad \Rightarrow r^2 = 36 + 9 + 4 \quad \Rightarrow r = \sqrt{49} \quad \Rightarrow r = 7.$$

Portanto, o raio da circunferência é 7 quilômetros.

Atividade 4 (20 minutos)

Para introduzir um novo tópico de conteúdo, vamos usar um problema que guiará o nosso estudo. Tal conteúdo é a posição relativa de pontos em relação a circunferência.

Questão 4:

(Questão baseada em Leonardo (2013)) Observe a imagem a seguir:

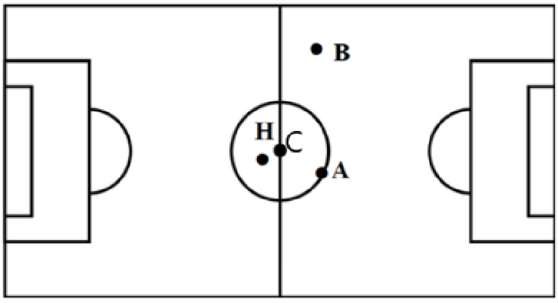


Figura 47. Campo de futebol
Fonte: Adaptada de Vectorstock (2018).

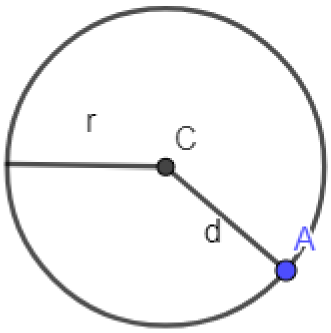
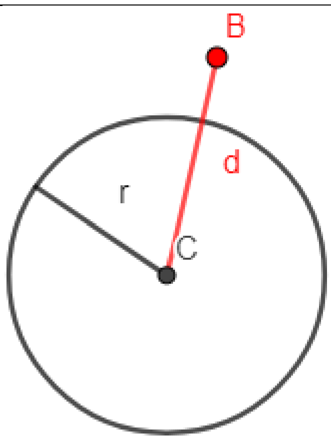
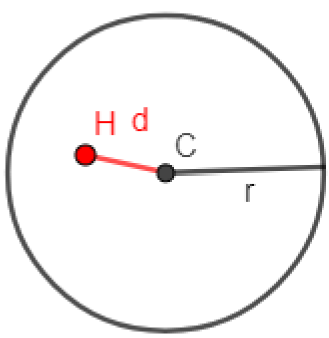
d = *r*	*d* > *r*	***d* < *r***
 O ponto *A* pertence à circunferência.	 O ponto *B* é **exterior** à circunferência.	 O ponto *H* é **interior** à circunferência.

Tabela 4: Posição relativa entre ponto e circunferência
Fonte: Adaptada de Leonardo (2013).

Os pontos *A*, *B* e *H* representam posições distintas de três jogadores de futebol em relação a circunferência do centro do campo de futebol. Analise a posição dos jogadores em relação à circunferência e complete o quadro. Observe o exemplo:

Observação: A escrita em vermelho não estará no material do aluno, os estudantes deverão preencher os espaços.
Ressaltaremos que para analisar a posição desse ponto em relação à circunferência, comparamos a distância d do ponto ao centro da circunferência com o raio r da circunferência.

Questão 5:
(Questão adaptada de UFPB (2006) *apud* Leonardo (2013)) Considerando as seguintes proposições relativas à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano cartesiano, identifique a(s) verdadeira(s):

(01) O ponto $P(-1,1)$ é interior à circunferência.

(02) O ponto $P(-2,2)$ é exterior à circunferência.

(03) O ponto $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ está sobre a circunferência.

(04) O ponto $P(5,1)$ é exterior à circunferência.

Qual é a soma das alternativas corretas?

Resolução: Primeiramente, precisamos descobrir qual é o centro e o raio da equação $x^2 + y^2 = 4$. Para isso, vamos analisar os coeficientes, como segue:

$$-2a = 0 \Rightarrow a = 0.$$

$$-2b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Portanto o centro da circunferência é $C(0,0)$.
E o raio é dado por

$$a^2 + b^2 - r^2 = -4 \quad \Rightarrow r^2 = 4 \quad \Rightarrow r = \sqrt{4} \quad \Rightarrow r = 2.$$

Então, vamos avaliar a alternativa (01). O ponto é interior à circunferência se a distância d do ponto ao centro da circunferência é menor que o raio r. A distância entre dois pontos $C(0,0)$ e $P(-1,1)$ é dada por:

$$d_{CP} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-0)^2}$$

$$d_{CP} = \sqrt{2}.$$

Portanto o $P(-1,1)$ é interior à circunferência, pois $\sqrt{2} < 2$.

Vamos avaliar (02). Um ponto é exterior à circunferência se a distância d do ponto ao centro da circunferência é maior que o raio r.

A distância entre dois pontos $C(0,0)$ *e* $P(-2,2)$ *é dada por:*

$$d_{CP} = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2}$$

$$d_{CP} = \sqrt{8} \cong 2{,}82$$

Portanto o $P(-2,2)$ *é exterior à circunferência, pois* $\sqrt{8} > 2$.

Vamos avaliar a alternativa (03). Um ponto pertence a uma circunferência se a distância d é igual ao raio r ou se satisfaz a equação.

A distância entre dois pontos $C(0,0)$ *e* $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ *é dada por:*

$$d_{CP} = \sqrt{\left(-\sqrt{2}-0\right)^2 + (\sqrt{2}-0)^2}$$

$$d_{CP} = \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad d_{CP} = 2.$$

Portanto, o ponto $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ *está sobre a circunferência, pois* $d = r$.

Também podemos verificar se o ponto $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ *satisfaz a equação* $x^2 + y^2 = 4$.

$$(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4.$$

Portanto, o ponto $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ *está sobre a circunferência, pois* $d = r$.

Vamos avaliar a alternativa (04). Um ponto é exterior à circunferência se a distância d do ponto ao centro é maior que o raio r.

A distância entre dois pontos $C(0,0)$ *e* $P(5,1)$ *é dada por:*

$$d_{CP} = \sqrt{(5-0)^2 + (1-0)^2}$$

$$d_{CP} = \sqrt{26} \cong 5{,}09.$$

Portanto, o ponto $P(5,1)$ *é exterior à circunferência, pois* $\sqrt{26} > 2$.

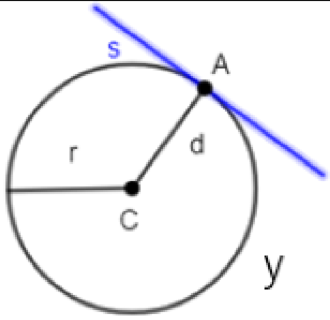
A soma das alternativas corretas é $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

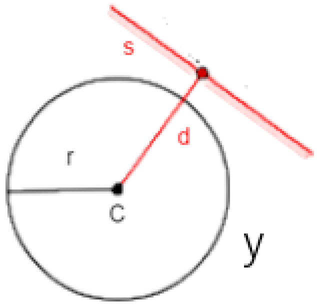
Atividade 5 (10 minutos)

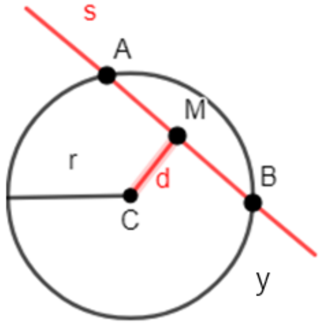
Após, utilizaremos uma ilustração para introdução do novo tópico de estudo, baseando as explicações nesta, a saber, posição relativa de retas em relação à circunferência.

Questão 6:

Dadas uma reta *s* e uma circunferência γ de centro $C(x_0, y_0)$ e raio *r*, ambas no mesmo plano, há três casos possíveis para a posição relativa entre *s* e γ. Complete o quadro.

<table>
<tr><th>d = r</th><th>d > r</th><th>d < r</th></tr>
<tr>
<td>

s é tangente à circunferência.</td>
<td>

s é exterior à circunferência.</td>
<td>

s é secante à circunferência.</td>
</tr>
</table>

Tabela 5: Posição relativa entre uma reta e uma circunferência
Fonte: Questão adaptada de Leonardo (2013).

Da observação dos três casos acima, sendo *d* a distância do ponto *C* à reta *s*, concluímos que:

- Se $d = r$, então $s \cap \gamma = \{A\}$ (*s* é tangente à circunferência γ);
- Se *d* > *r*, então $s \cap \gamma = \emptyset$ (*s* é exterior à circunferência γ);
- Se *d* < *r*, então $s \cap \gamma = \{A, B\}$ (*s* é secante à circunferência γ).

Observação: A escrita em vermelho não estará no material do aluno, os estudantes deverão preencher os espaços.

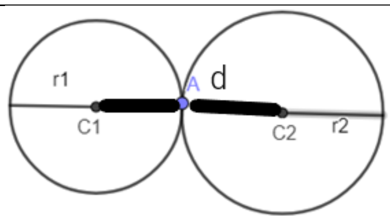
Atividade 6 (20 minutos)

Vamos novamente utilizar de um exercício para introdução de conteúdo, neste caso, posição relativa entre circunferências.

Questão 7:

Dadas duas circunferências, em quantos pontos elas se interceptam?

Dica: Compare a distância *d* entre seus centros, C_1 e C_2, com os raios das circunferências.

<table>
<tr><th>Circunferências secantes.</th><th>Circunferências tangentes.</th><th>Circunferências disjuntas.</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
</table>

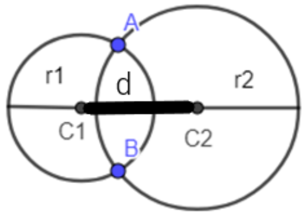
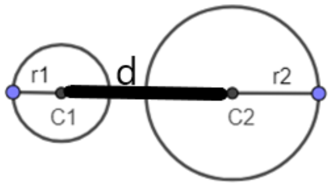
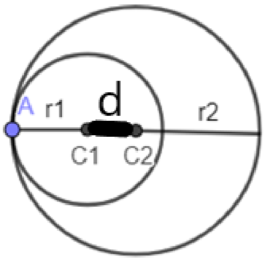
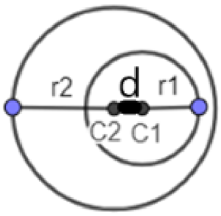
 $\lvert r_1 - r_2 \rvert < d < r_1 + r_2$.	Exteriores $d = r_1 + r_2$.	 Exteriores $d > r_1 + r_2$.
	 Interiores $d = \lvert r_1 - r_2 \rvert$.	 Interiores $0 \leq d < \lvert r_1 - r_2 \rvert$.
Dois pontos em comum.	Um ponto em comum.	Nenhum ponto em comum.

Tabela 6: Posição relativa entre duas circunferências
Fonte: Questão adaptada de Leonardo (2013).

Observação: A escrita em vermelho não estará no material do aluno, os estudantes deverão preencher os espaços.

Ressaltaremos que, para saber quantos são os pontos comuns entre duas circunferências, basta saber seus raios e a distância entre seus centros. E, para saber quais são esses pontos, é preciso resolver o sistema formado pelas equações a elas associadas.

Questão 8:

Verifique se as circunferências $x^2 + y^2 - 8x = 0$ e $x^2 + y^2 - 32x = 96$ possuem pontos comuns.

Resolução: Para saber se existem pontos em comuns vamos determinar os centros C_1 e C_2 e os raios r_1 e r_2 de cada circunferência

$$x^2 + y^2 - 8x = 0 \;\; \textit{(01)}.$$

A equação geral de uma circunferência é dada por:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

$$-2a = -8 \Rightarrow a = 4.$$

$$-2b = 0 \;\Rightarrow b = 0.$$

Portanto, o centro C_1 da equação (01) é $C_1(4{,}0)$.

O raio é $a^2 + b^2 - {r_1}^2 = 0 \Rightarrow 4^2 + 0^2 - {r_1}^2 = 0 \;\Rightarrow r_1 = 4$.

Da equação $x^2 + y^2 - 32x - 96 = 0$ (02), temos

$$-2a = -32 \Rightarrow a = 16.$$

$$-2b = 0 \Rightarrow b$$

Portanto, o centro C_2 *da equação (02) é* $C_2(16{,}0)$.

O raio é $a^2 + b^2 - {r_2}^2 = -96 \Rightarrow 16^2 + 0^2 - {r_2}^2 = -96 \Rightarrow -{r_2}^2 = -352 \Rightarrow r_2 \cong 18{,}76$.

Vamos calcular a distância d entre os centros:

$$d = \sqrt{(16-4)^2 + (0-0)^2} \Rightarrow \sqrt{12^2} = 12.$$

Logo, $0 \leq 12 < |4 - 18{,}76|$, *então,* $0 \leq 12 < 14{,}76$ *e as circunferências são disjuntas interiores e não possuem pontos em comum.*

Atividade 7 (60 minutos)

Após, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios para serem resolvidos na sala. Durante essa atividade auxiliaremos os alunos nos grupos.

1. Determine, nos casos a seguir, a equação reduzida da circunferência:
   a) De centro C(2,5) e raio $r = 3$

      Resolução: A equação reduzida da circunferência tem a seguinte forma:

      $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

      Dessa forma teremos:

      $$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$$

   b) De centro C(-1,-4) e raio $r = \sqrt{7}$

      Resolução:

      $$(x+1)\text{^}2 + (y+4)\text{^}2 = 7$$

   c) De centro (0,0) e raio 1

      Resolução:

      $$x^2 + y^2 = 1$$

   d) De centro C(-3,6) e diâmetro 8

      Resolução:

      $$(x+3)^2 + (y-6)^2 = 16$$

2. (Vunesp-SP). Considere o quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x -$

$4y + 12 = 0$. Determine as equações das retas que contêm as diagonais desse quadrado.

Resolução:

equação geral da circunferência

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$

Completando os quadrados

$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 12 = 0$

equação reduzida

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

para $x = 3$, $(y - 2)^2 = 1$, $y - 2 = 1$, $y = 3$

para $x = 3$, $(y - 2)^2 = 1$, $y - 2 = -1$, $y = 1$

para $y = 2$, $(x - 3)^2 = 1$, $x - 3 = 1$, $x = 4$

para $y = 2$, $(x - 3)^2 = 1$, $x - 3 = -1$, $x = 2$

coordenada do quadrado

A=(2,3)

B=(4,3)

C=(4,1)

D=(2,1)

equação reta suporte da diagonal AC

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$det = 3x + 4y + 2 - 12 - x - 2y = 0$

$2x + 2y - 10 = 0$

$x + y - 5 = 0$

equação reta suporte da diagonal BD

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$det = 3x + 2y + 4 - 6 - x - 4y = 0$

$2x - 2y - 2 = 0$

$x - y - 1 = 0$

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala e em casa.

Referências:

DEPOSITPHOTOS. **Ilustração em vetor roda de bicicleta.** Disponível em: <https://pt.depositphotos.com/72672795/stock-illustration-bicycle-wheel-vector-illustration.html>. Acesso em: 15 ago. 2019.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. Vol. 3. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PXHERE. **Roda gigante London Eye.** Disponível em: <https://pxhere.com/pt/photo/887794>. Acesso em: 15 ago. 2018.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**. Vol.3. 1 ed. São Paulo: Scipione, 2010.

VECTORSTOCK. **Soccer field icon outline style vector image**. Disponível em: **<**https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/soccer-field-icon-outline-style-vector-9531749>. Acesso em: 15 ago. 2019.

Exercício equação reduzida da reta. Disponível em: <https://querobolsa.com.br/enem/matematica/equacao-da-circunferencia>. Acesso em 09 set. 2019.

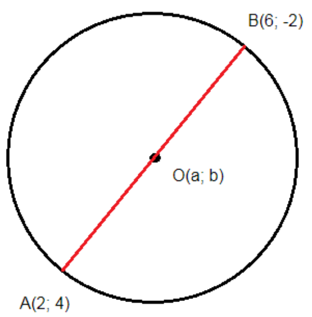
Anexo 1

Lista de exercícios – 7º Encontro

1- Determine a equação da circunferência que tem diâmetro $\overline{AB}$ tal que A(2; 4) e B(6; -2).

Resolução:

Ilustrando a situação, temos:



Sabemos que o centro O é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$a = \frac{2+6}{2} = 4 \text{ e } b = \frac{4-2}{2} = 1 \rightarrow \text{O(4;1)}$$

$$R = \sqrt{(4-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$$

Assim:

$$(4-2)^2 + (1-4)^2 = \sqrt{13^2}$$

6.3.2 Relatório

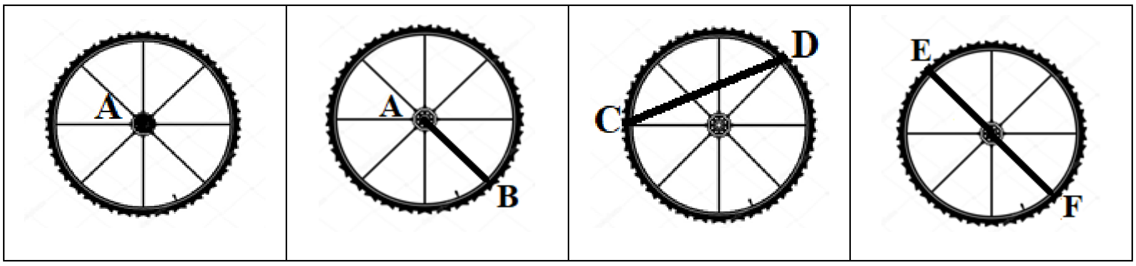
No dia 28 de setembro de 2019, sábado, realizamos o sétimo encontro do Promat na Unioeste, Cascavel. Estavam presentes 17 alunos. Iniciamo a aula, dando boas vindas aos alunos e agradecendo a presença de todos.

No primeiro momento da aula, questionamos os estudantes a respeito da lista de exercícios que foi deixada na aula anterior, a qual, os estudantes deviam resolver em casa e trazer as dúvidas para o início deste encontro. Alguns alunos questionaram os métodos de resolução de uma determinada questão, então resolvemos explicitar na lousa uma das resoluções possíveis.

O exercício, abordava vários conceitos estudados, mas enfatizava principalmente a relação entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares. Após as explicações dadas, os alunos mostraram compreender o exercício, o que nos levou a iniciar com os conteúdos programados para este encontro.

Falamos aos alunos que esta aula contemplava tópicos da última aula do módulo de geometria analítica voltado principalmente ao estudo da circunferência. Comentamos ainda que esta seria uma aula diferente das quais estávamos acostumados a ministrar, e que iríamos propor a resolução de um exercício para introdução de cada novo tópico da aula.

O primeiro exercício apresentado era puramente visual e abordava conceitos básicos para o estudo das circunferências.



A partir da imagem acima, mostramos aos alunos quais são os elementos de uma circunferência, apresentando e definindo o centro, o raio, o diâmetro e a corda, além de diferenciar um círculo de uma circunferência.

Em seguida, usamos um novo exercício, a saber, tratava de um garoto localizado a uma determinada altura em um roda gigante, sua localização se dava em um ponto (x,y), genérico, por meio deste exercício, deduziríamos a equação reduzida de uma circunferência. Os alunos tiveram um pouco de dificuldade em chegar na fórmula, embora muitos deles lembrassem do ensino médio, qual era a equação procurada.

Dando sequência à aula, introduzimos um novo exercício. Este estava contextualizado e fazia referência ao raio de destruição de uma bomba nuclear. No exercício ainda havia uma informação sobre a equação que resultava na destruição causada pela bomba, porém, esta equação era diferente da enunciada anteriormente (equação reduzida). Esta, estava na sua forma geral e o intuito desta questão era fazer com que os estudantes percebessem as diferenças e questionassem a respeito do problema que encontravam ali.

Usamos este exercício para fazer uma comparação entre os dois tipos de equações vistas até aqui. Colocamos lado a lado as equações geral e reduzida da circunferência, e as comparamos, mostrando aos alunos suas diferenças e ainda enunciando o modo com que podemos sair de um tipo de equação e chegar no outro.

Estes dois exercícios foram usados ainda, de modo a descobrir o valor de determinadas incógnitas da equação $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, a saber, os dois valores que nos fornece o centro da circunferência *a* e *b* e ainda outro valor que fornece o raio *r.*

Posteriormente, um novo exercício foi apresentado. Tal exercício, apresenta um campo de futebol, em que alguns pontos estão inseridos, devemos buscar relações entre o círculo central do meio campo e estes pontos, alguns localizam-se fora da circunferência, outros estão contidos na circunferência e outros pontos são internos à circunferência. Com ele, pudemos discutir com os alunos alguns conceitos que relacionavam um determinado ponto, com uma determinada circunferência. A esse estudo damos usualmente o nome de posição relativas entre pontos e circunferências. Mostramos aos estudantes, quando um ponto é interno, externo ou pertencente a uma circunferência.

Utilizamos o mesmo princípio dos exercícios, para mostrar coisas análogas ao tópico acima, mostramos aos alunos então, a posição relativa entre retas e circunferências e posteriormente a posição relativa entre circunferências. Durante este estudo, vimos que retas podem ser tangentes, exteriores ou secantes a circunferências e também que uma circunferência pode ser secante, tangente ou ainda disjunta a uma circunferência dada.

Antes do término da aula, propomos aos estudantes uma lista de exercícios, a qual deveria ser resolvida, a fim de que os estudantes fixassem o conteúdo visto neste encontro, e que além disso, eles tirassem possíveis dúvidas que pudessem surgir durante as resoluções.

É importante ressaltar, que ainda tínhamos programado jogar um jogo com nossos alunos. Este teria a mesma função da lista de exercícios, porém iria apresentar uma abordagem mais prática dos conteúdos. Entretanto, não tivemos tempo suficiente para a realização do mesmo.

Sendo assim, pouco tempo após a entrega da lista encerramos o nosso encontro, orientando que os estudantes terminassem a resolução em casa. Por fim, nos despedimos dos estudantes, desejando um bom final de semana, e dizendo que aguardaríamos os alunos no próximo encontro.

7. MÓDULO 4: ANÁLISE COMBINATÓRIA

7.1 Atividades dia 05/10

7.1.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 8º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a compreenderem conceitos sobre probabilidade.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com probabilidade, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Encontrar um conjunto que represente um espaço amostral:
- Calcular a probabilidade de um evento em um espaço amostral;
- Compreender o conceito de probabilidade com reunião e intersecção de eventos;
- Entender e resolver exercícios que envolvam probabilidade condicional;
- Calcular a probabilidade de eventos não equiprováveis.

Conteúdo:

Probabilidade.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Atividade 01 (30 minutos)

Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção dos exercícios propostos para serem feitos em casa.

Atividade 02 (40 minutos)

Em seguida iremos formar grupos de quatro alunos para realizar um jogo, o qual servirá de introdução para o conteúdo de probabilidade.

Avançando com o resto

Objetivo do jogo: Chegar em primeiro lugar ao espaço com a palavra FIM, trabalhando com divisão e restos.

Material: O material usado para o jogo consiste de um tabuleiro, como apresentado na figura acima, um dado de seis faces, e quatro marcadores (um para cada jogador).

Descrição do jogo: Escolha um critério para definir quem iniciará o jogo, sendo que o início é na casa 52. Jogue o dado e verifique se o número em que você se encontra no tabuleiro é divisível pelo número sorteado no dado. Caso seja divisível, não sobrará resto, portanto não mova seu marcador. Caso tenha resto, avance a quantidade de casas referentes a ele.

Após iremos entregar aos alunos algumas questões para resolverem baseados no jogo que acabaram de realizar:

1. Quando você está na casa do número 36, qual é a chance de avançar?

   Resolução: $\frac{1}{6}$.

2. E quando está em uma casa de número primo?

   Resolução: $\frac{5}{6}$.

3. Cite um número do tabuleiro em que a chance de avançar é de 2 em 6.

   Resolução: O número 6.

4. Se independentemente do número sorteado no dado você não avançar em qual casa do tabuleiro você está?

   Resolução: 0 ou 60.

5. Quando você está na casa do número 27 qual é a chance de não avançar?

   Resolução: $\frac{2}{6}$.

6. Cite um número do tabuleiro em que a chance de avançar é de 4 em 6.

   Resolução: O número 21.

Atividade 03 (100 minutos)

Após isso trabalharemos alguns exercícios com os alunos. Sendo o primeiro relacionado a espaço amostral, o segundo a evento, o terceiro acerca de probabilidade com reunião e intersecção de eventos, o quarto acerca de probabilidade condicional, o quinto eventos independentes e o último irá tratar de experimentos não equiprováveis.

Durante os exercícios realizaremos uma dinâmica para que os alunos percebam a importância dos conceitos de probabilidade, trabalharemos com o Problema das Portas (Monty Hall).

O problema: A “Porta dos Desesperados” é um jogo com três portas: atrás de uma delas há um prêmio, e atrás das outras, um monstro. O participante escolhe uma porta, o apresentador, sabendo em qual porta está o prêmio, abre uma das portas não escolhidas revelando um monstro. E faz a derradeira pergunta: “Quer trocar?”. Afinal, é ou não vantajoso trocar de porta?

A resposta intuitiva da maioria das pessoas ao Problema de Monty Hall seria que, quando o apresentador revela uma porta não-premiada, ter-se-ia à frente um novo dilema com apenas duas portas e um prêmio, portanto, a chance de que o prêmio estivesse em qualquer uma das duas portas seria de 50% e não faria diferença alguma trocar.

Para trabalhar com a turma adaptaremos o problema, trocando o uso das portas por canecas, chamaremos alguns alunos para o papel do participante e os instigaremos sobre como aumentar as chances de se ganhar um prêmio. Após isso projetaremos uma tabela com todas as possíveis situações e concluiremos que trocar de porta é mais vantajoso.

Os convenceremos que o evento analisado não é apenas “escolher uma porta”. São 2 eventos: “escolher uma porta” e “trocar de porta”. O que se percebe pela análise do espaço amostral é que, quando o participante decide trocar de porta, ele ganha 2 vezes e perde 1 (sucesso em 2/3 das vezes); já, ao permanecer com a mesma porta, ele terá êxito em apenas 1/3. Ou seja, sua probabilidade de ganho é de 2 para 1 caso ele decida trocar de porta. São, portanto, 66,7% de chance de ganhar e 33,3% de chance de perder.

Exercícios:

1. Em um cesto há bolas de vôlei, sendo 3 brancas e 3 vermelhas. Desse cesto são retiradas, sucessivamente, 3 bolas. Calcular o número de elementos dos seguintes eventos:

   a) As três bolas têm a mesma cor.

   Resolução: Chamando a bola branca de B e a vermelha de V temos que o espaço amostral desse experimento é:

   U={(BBB), (BBV), (BVB), (BVV), (VBB), (VBV), (VVB), (VVV)}.

   Se as três bolas têm a mesma cor, o evento é:

   A={(BBB), (VVV)}, assim teremos 2 elementos.

   b) Duas das bolas são brancas.

   Resolução: Teremos:

   B={(BBV), (BVB), (VBB)}, assim teremos 3 elementos.

   c) As três bolas são vermelhas.

   Resolução: Teremos:

   C={(VVV)}, assim teremos 1 elementos.

   d) O número de bolas brancas é igual ao número de bolas vermelhas.

   Resolução: Verifica-se que sempre o número de bolas brancas nunca é igual ao número de bolas vermelhas.

2. No lançamento de um dado, determinar a probabilidade de se obter:

   a) O número 2.

   Resolução: O espaço amostral é U={1, 2, 3, 4, 5, 6}, portanto n(U)=6.

Portanto A={2}, portanto n(A)=1,

assim teremos $P(A) = \frac{1}{6}$.

b) Um número par.

Resolução: B={2, 4, 6}, portanto n(B)=3

$P(B) = \frac{1}{2}$.

c) Um número múltiplo de 3.

Resolução: C={3, 6}, portanto n(C)=2

$P(C) = \frac{1}{3}$.

3. Em uma pesquisa foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi o seguinte: 250 delas leem o jornal A, 180 leem o jornal B e 60 leem os jornais A e B. escolhendo um dos entrevistados ao acaso determine a probabilidade de ele ser:

a) Leitor dos jornais A e B;

Resolução: Analisaremos neste item a intersecção, usando conceitos da teoria de conjuntos encontraremos que há 60 pessoas que leem os dois jornais assim a probabilidade será:

$$\frac{60}{470}.$$

b) Leitor do jornal A ou do jornal B.

Resolução: Teremos neste item que encontrar a probabilidade das pessoas que leem somente um dos jornais assim faremos:

$$\frac{250}{470} + \frac{180}{470} - \frac{60}{470} = \frac{37}{47}$$

4. Pensando em um experimento do lançamento de dois dados, um branco e um vermelho, encontre a probabilidade de a soma dos números obtidos serem menor que 7, sendo que o número 4 saiu em pelo menos um dado.

Resolução: iremos elencar aqui todas as possibilidades em que o número 4 saiu em pelo menos um dado:

(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4), observamos que isso ocorre 11 vezes, agora dentre estes queremos os que a soma dos números obtidos seja menor do que 7, teremos então:

(4,1),(4,2),(1,4),(2,4).

Sendo assim chamando B a ocorrência do número 4 e A a soma dos números ser menor que 7 teremos:

$$P(A/B) = \frac{4}{11}.$$

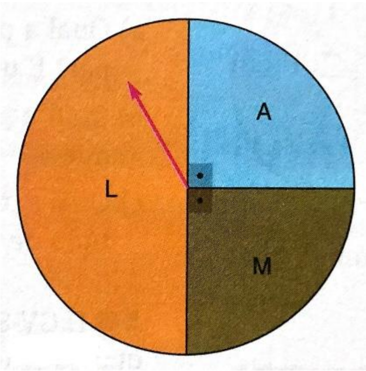
5. Lançando sucessivamente uma moeda e um dado, qual a probabilidade de se obter o resultado (cara, 5)? E a probabilidade de se obter (coroa, número par)?

   Resolução: Esperamos que os alunos construam a árvore de possibilidades, e por meio dela encontrem a resposta do exercício.

   Para obtermos (cara, 5) teremos a probabilidade de $\frac{1}{12}$*, pois podemos combinar cara e coroa com os seis números do dado, tendo assim 12 diferentes combinações, porém só uma será (cara, 5).*

   Para (coroa, número par) teremos também 12 combinações, e os casos (coroa, 2), (coroa, 4) e (coroa, 6), são os que procuramos, assim a solução será $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

6. Observando a roleta abaixo encontre a probabilidade de ela parar em cada uma das regiões.



   Resolução: Pela figura podemos perceber que a área A corresponde a $\frac{1}{4}$ *da área do círculo e a área M também, já a área L corresponde a metade do círculo, então:*

   $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(M) = \frac{1}{4}$, *e* $P(L) = \frac{1}{2}$.

Após, a resolução dos exercícios pelos alunos, realizaremos a correção destes no quadro e formalizaremos os conceitos trabalhados. Neste momento apresentaremos em slides as definições relevantes ao conteúdo.

Definição: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado espaço amostral, o qual indicaremos por U.

Exemplos:

- No lançamento de uma moeda: U={cara, coroa};
- No nascimento de uma criança: U={menino, menina}.

Definição: Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado evento.

Exemplos: No lançamento de um dado podemos ter os seguintes eventos:

- O número é par: {2, 4, 6};
- O número é menor que 5: {1, 2, 3, 4};
- O número é múltiplo de 10: { }.

Definição: Sendo $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$ o número de elementos do espaço amostral U e $n(A)$, o número de elementos do evento A.

Definição: A probabilidade de ocorrer um evento A ou um evento B ocorrer é dada pela expressão:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Definição: A probabilidade de ocorrer um evento A dado que B ocorreu e dada pela expressão:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Em seguida, entregaremos outra lista de exercícios para resolverem e posteriormente realizarmos a correção.

Atividade 04 (30 minutos)

Exercícios

1. (Questão adaptada de ENEM (2015)) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala,

serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. Qual é a probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês?

Resolução: A probabilidade de um aluno não responder em inglês à pergunta em inglês é:

$$100\% - 30\% \Rightarrow \frac{100}{100} - \frac{30}{100} \Rightarrow 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Como a resposta de cada aluno é um evento independente, a probabilidade de nenhum dos três alunos responderem em inglês à pergunta em inglês é:

$$0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \Rightarrow 0{,}343 \Rightarrow 0{,}343 \cdot 100 = 34{,}3\%$$

Assim a probabilidade de o entrevistador ter sua pergunta respondida em inglês por algum dos alunos é:

$$1 - 0{,}343 \Rightarrow 0{,}657 \Rightarrow 0{,}657 \cdot 100 = 65{,}7\%$$

2. (Questão adaptada de ENEM (2011)) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, qual é a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica?

Resolução: De acordo com a tabela apresentada no exercício, temos informações a respeito de cinco tipos de público-alvo. O total formado por esses cinco grupos compõe o nosso espaço amostral. Vamos então somar e encontrar o total de pessoas vacinadas:

$$n(\Omega) = 42 + 22 + 56 + 30 + 50$$
$$n(\Omega) = 200$$

Então o grupo total de vacinados são 200 pessoas. Precisamos agora do número de casos favoráveis, sendo a quantidade de pessoas portadoras de doenças crônicas que foram vacinadas. De acordo com a tabela, esse valor é de 22 pessoas. Vamos então utilizar a fórmula para o cálculo da probabilidade:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$
$$p(E) = \frac{22}{200} \Rightarrow \frac{11}{100} = 0{,}11 \cdot 100 = 11\%$$

3. (Questão adaptada de ENEM (2017)) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região. Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

Resolução: Como a probabilidade de chover na região é de 30%, então a probabilidade de ***não chover*** *é de 70%.*

1° Caso (Chover no dia)

Neste caso, consideremos o evento desejado A, assim descrito – "A: atrasar-se ***e*** *chover".*

$$p(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$$

2° Caso (Não chover no dia)

Neste caso, consideremos o evento desejado B, assim descrito – "B: atrasar-se ***e*** *não chover".*

$$p(B) = 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}175$$

Como pode chover ***ou*** *não no dia, temos* $p(A) + p(B) = 0{,}15 + 0{,}175 = 0{,}325$

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala.

Referências:

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

PROVA DO ENEM 2011. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 16 set. 2019.

PROVA DO ENEM 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 16 set. 2019.

PROVA DO ENEM 2017. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 16 set. 2019.

Anexo 1

Lista de exercícios – 8º Encontro

1. (Questão adaptada de ENEM (2016)). Um casal, ambos com 30 anos de idade, pretende fazer um plano de previdência privada. A seguradora pesquisada, para definir o valor do recolhimento mensal, estima a probabilidade de que pelo menos um deles esteja vivo daqui a 50 anos, tornando por base dados da população, que indicam que 20% dos homens e 30% das mulheres de hoje alcançarão a idade de 80 anos.

   Qual é essa probabilidade?

   Resolução: sendo Hv a porcentagem de homens vivos com mais de 80 anos e Mv a porcentagem de mulheres vivas com mais de 80 anos, e Hm a porcentagem de homens que não alcançarão a idade de 80 anos e Mm a porcentagem de mulheres que não alcançarão 80 anos, temos:

   $Hv = 20\%, Mv = 30\%$

   $Hm = 80\%, Mm = 70\%$

$$Hv\ e\ Mv$$

$P(1) = \left(\frac{20}{100}\right) \cdot \left(\frac{70}{100}\right) = \frac{14}{100}$

$$Mv\ e\ Hm$$

$$P(2) = \left(\frac{30}{100}\right) \cdot \left(\frac{80}{100}\right) = \frac{24}{100}$$

$$Hv\ e\ Mv$$

$$P(3) = \left(\frac{20}{100}\right) \cdot \left(\frac{30}{100}\right) = \frac{6}{100}$$

$$Ptotal\ = \frac{14}{100} + \frac{24}{100} + \frac{6}{100}$$

$$Ptotal\ = \frac{44}{100}$$

2. (Questão adaptada de ENEM (2015)). Um bairro residencial tem cinco mil moradores, dos quais mil são classificados como vegetarianos. Entre os vegetarianos, 40% são esportistas, enquanto que, entre os não vegetarianos, essa porcentagem cai para 20%. Uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, é esportista. A probabilidade de ela ser vegetariana é?

   Resolução: Primeiro encontraremos o número de esportistas vegetarianos que será:

$$1000 \cdot 0{,}4 = 400$$

   Depois os não vegetarianos esportistas:

$$4000\ \cdot 0{,}2 = 800$$

   A probabilidade de um esportista ser vegetariano será então:

$$\frac{400}{1200} = \frac{1}{3}.$$

3. Dois dados usuais e não viciados são lançados. Sabe-se que os números observados são ímpares. Então, a probabilidade de que a soma deles seja 8 é?

   Resolução: No lançamento de dois dados temos que a soma entre as faces ímpares em que o resultado seja 8 é dado pelos pares $(5, 3)$ *e* $(3, 5)$. *Somente 2 eventos satisfazem a situação proposta. Já o espaço amostral estará reduzido ao número de combinações entre resultados ímpares, que é 9,* $(1{,}1), (1{,}3), (1{,}5), (3{,}1), (3{,}3), (3{,}5), (5{,}1), (5{,}3)$ *e* $(5{,}5)$. *Portanto:*

$$P = \frac{2}{9}.$$

4. Em uma urna existem bolas enumeradas de 1 a 15. Qualquer uma delas possui a mesma chance de ser retirada. Determine a probabilidade de se retirar uma bola com número nas seguintes condições:

a) Par.

Resolução: Espaço amostral: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$

No espaço amostral de 15 números, temos 7 números pares.

$$P = \frac{7}{15} = 0{,}466 = 46{,}6\%$$

b) Primo.

Resolução: Temos 6 números primos dentre o espaço amostral de 15 números.

$$P = \frac{6}{15} = 0{,}4 = 40\%$$

c) Par ou primo.

Resolução: Número par = 7 possibilidades entre 15

Número primo = 6 possibilidades entre 15

Par ∩ primo = 1entre 15

$$P(par) + P(primo) - P\,(par \cap primo)$$

$$\frac{7}{15} + \frac{6}{15} - \frac{1}{15} = \frac{12}{15} = 0{,}8 = 80\%$$

d) Par e primo.

Resolução: Dentro do intervalo dado, temos um único número que satisfaz a condição de ser par e primo ao mesmo tempo, que é o número 2. Portanto, temos a seguinte probabilidade:

$$P = \frac{1}{15} = 0{,}066 = 6{,}6\%$$

7.1.2 Relatório

No dia cinco de outubro de 2019, sábado, realizamos o oitavo encontro do Promat na Unioeste, Cascavel. Estavam presentes 17 alunos. Iniciamos a aula explicando aos alunos que começaríamos um novo módulo, a saber: probabilidade. Dessa forma, falamos que não corrigiríamos os exercícios que ficaram para serem resolvidos em casa, caso eles tivessem dúvidas deveriam nos chamar que as sanaríamos de modo individual.

Após, iniciamos o conteúdo programado para esse encontro, probabilidade. Os alunos, como de costume, já estavam sentados em grupos, então, entregamos para cada grupo um tabuleiro, um dado e quatro marcadores, para que assim eles pudessem jogar o jogo “Avançando com o resto”. Explicamos como eles deveriam jogar e os mesmos começaram, enquanto isso, circulamos pela sala sanando as possíveis dúvidas que surgissem.

Os princípios básicos do jogo se davam através da identificação dos divisores de alguns números. O tabuleiro que foi entregue aos alunos era composto por determinados números naturais, todos os alunos começavam a jogar iniciando do mesmo número. Um a um os alunos deviam laçar o dado e verificar o número obtido, a partir deste número devia ser verificado o resto da divisão do número observado no tabuleiro, pelo número obtido no dado. O resto da divisão corresponde ao número de casas que o indivíduo devia avançar pelo tabuleiro, daí o nome “avançando com o resto”. Ganharia o jogo, aquele que chegasse na última casa do tabuleiro.

Os alunos se mostraram entusiasmados com o jogo, todos estavam participando e tentando ganhar. No decorrer do jogo eles foram percebendo questões que faziam parte dos nossos objetivos, como perceber que quando parassem no número 0 ou 60 que estão contidos no tabuleiro, eles não conseguiriam mais mover o marcador, ou seja, a probabilidade dele se mover era 0, pois todos os números do dado são divisores de 60 e nenhum deles divide o 0. Deixamos que os alunos jogassem por alguns minutos e, em seguida, levantamos alguns questionamentos sobre probabilidade, como: “quando você está na casa do número 36, qual é a chance de avançar?” e “Cite um número do tabuleiro em que a chance de avançar é de 2 em 6”. Com este tipo de indagações, levamos os alunos a perceberem quais números proporcionavam a maior e a menor chance de avançar, assim como eventos impossíveis (o número 60 e o 0).

Posteriormente, entregamos para cada aluno uma lista com problemas para serem resolvidos, solicitamos que resolvessem apenas os seis primeiros. Enquanto os alunos tentavam resolver, nós circulamos pela sala os ajudando e sanando as eventuais dúvidas.

Os alunos não mostraram muitas dificuldades nos dois primeiros problemas, já no terceiro muitas dúvidas apareceram, por se tratar de um problema envolvendo conjuntos eles tiveram dificuldade em montar o espaço amostral do problema. Os três últimos problemas também não geraram muitas dúvidas, apenas dúvidas pontuais que foram sanadas nos grupos.

Tais problemas tinham como objetivo introduzir definições e fórmulas de probabilidade, portanto, enquanto realizamos a correção no quadro já íamos explicando os conceitos envolvidos. Durante a correção os alunos se mostraram atentos, poucos interagiram conosco, mas todos prestaram muita atenção nas explicações. Após terminarmos de corrigir a terceira questão, estava na hora do intervalo, então liberamos os alunos e dissemos que terminaríamos a correção depois.

Quando retornamos do intervalo, terminamos a correção dos demais problemas que faltavam. Em seguida, realizamos mais uma dinâmica com os alunos, o *Problema das Portas (Monty Hall).* Utilizamos 3 canecas para simbolizarem as portas e balas como prêmio. Pedimos a ajuda dos alunos, para que fossem os jogadores, então, o aluno deveria sair da sala por um momento, e nós colocávamos o prêmio embaixo de uma caneca, o aluno retornava e deveria acertar em qual caneca estava. Após escolher uma das canecas, retirávamos uma que não estava com o prêmio e fazíamos a seguinte pergunta: “Quer trocar?”.

Depois de realizarmos o jogo diversas vezes, perguntamos aos alunos se era mais vantajoso permanecer com a mesma caneca ou trocar, a maioria disse que era permanecer com a mesma caneca. Então explicamos por que trocar era mais vantajoso, explicamos que inicialmente a chance de se escolher a caneca premiada era de uma em três, já que apenas uma caneca contém o prêmio dentre as três canecas. Porém após a escolha do participante e a retirada de uma caneca, temos um jogo envolvendo apenas duas canecas sendo que uma contém o prêmio e a outra não, ou seja a chance de se ganhar escolhendo uma caneca é de uma em duas. Dessa forma trocar de caneca é mais vantajoso.

Em seguida, explicamos formalmente as definições utilizadas no cálculo de probabilidades, sempre fazendo ligação com os problemas já resolvidos. Após, pedimos que os alunos resolvessem os demais exercícios da lista, e circulamos pela sala ajudando e tirando as dúvidas dos grupos.

Quando já estava no horário de dispensá-los, agradecemos a todos pela presença e pedimos que viessem no próximo encontro, no qual iremos trabalhar com contagem, assim, encerramos mais um encontro.

7.2 Atividades dia 19/10

7.2.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 9º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a aprender conceitos básicos de análise combinatória.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com análise combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar e utilizar o princípio fundamental da contagem;
- Compreender o conceito de permutação;
- Aplicar as técnicas de contagem para resolver problemas.

Conteúdo:

Análise combinatória.

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Atividade 01 (30 minutos)

Iniciaremos a aula relembrando os conteúdos da aula anterior, realizando a correção dos exercícios propostos para serem feitos em casa. E posteriormente, comentando com os alunos que iniciaremos um novo capítulo de estudos, a saber, análise combinatória.

Atividade 02 (140 minutos)

Neste módulo de estudo, trabalharemos com nossos alunos, usando outra metodologia de ensino.Introduziremos os conteúdos por meio da metodologia da Resolução de Problemas. Assim, solicitaremos aos alunos a resolução de vários problemas. O intuito da resolução destes problemas, é que os alunos resolvam utilizando conhecimentos básicos, e que estejam engajados pela intuição, sem precisar do apoio de fórmulas matemáticas neste primeiro momento.

Na resolução destes 3 primeiros problemas, queremos que os estudantes resolvam e posteriormente percebam a abordagem do princípio aditivo de contagem.

1- Para realizar viagens entre Curitiba (PR) e São Paulo (SP), dispõe-se de 3 companhias diferentes de aviação e 4 empresas de ônibus. De quantas maneiras é possível realizar essa viagem?

Resolução: $4 + 3 = 7$

2- Numa caixa existem 20 bolas brancas e 15 bolas verdes. De quantas maneiras podemos selecionar 1 bola?

Resolução: $20 + 15 = 35$

3- Numa lanchonete há 6 sabores de doces e 4 sabores de salgados. Suponha que Sofia só pretenda comer um doce ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Sofia pode fazer?

Resolução: $4 + 6 = 10$

Trabalhando com os exercícios 4, 5 e 6, buscaremos levar os alunos a percepção do princípio multiplicativo de contagem, diferindo dos problemas anteriores.

4- Ao lançarmos uma moeda e um dado quantas são as possibilidades?

Resolução:$2 \cdot 6 = 12$

5- Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa pode viajar de Recife a Porto Alegre?

Resolução:$4 \cdot 5 = 20$

6- Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra GATO? (lembrando que um anagrama é uma palavra formada com as mesmas letras da palavra original, mas em uma ordem qualquer, sendo que a nova palavra não necessariamente precisa fazer sentido).

Resolução: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Com os exercícios 7 até 14, buscaremos abordar a noção intuitiva de arranjo.

7- Quantos números de três algarismos podemos escrever com os algarismos 2, 4 e 6? E sem repetir algarismos?

Resolução: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$*, sendo eles, 246, 264, 624, 642, 426, 462.*

8- Numa sala de aula queremos escolher dois alunos dentre quatro para representarem a turma em uma reunião com a direção. De quantos modos podemos fazer essa escolha?

Resolução: $4 \times 3 = 12$

9- Caso esses alunos fossem ocupar cargos diferentes sendo que o primeiro a ser escolhido ocupará o cargo de presidente e o segundo de vice, de quantas maneiras podemos fazer essa escolha?

Resolução: $\frac{4\times 3}{2} = 6$

10- Tendo quatro cores disponíveis de quantos modos posso pintar uma bandeira formada por 4 listras adjacentes, sem repetir as cores?

Resolução: Na primeira listra podemos utilizar qualquer uma das 4 cores, na segunda, devemos retirar a cor que foi usada anteriormente, sobram 3, na terceira listra, devemos retirar as cores inicias, restando então, duas cores e por fim, só nos resta uma cor, uma vez que já utilizamos 3, logo temos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ *maneiras de fazer a pintura*

11- Tendo quatro cores disponíveis de quantos modos posso pintar uma bandeira de 4 listras adjacentes, sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor?

Resolução: Na primeira listra não temos restrição, na segunda, temos uma cor a menos, na terceira, a restrição é que a cor não pode ser igual a anterior, porém ainda restam 3, na quarta listra temos o mesmo caso, portanto $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$ *maneiras distintas.*

12- De quantas maneiras distintas podemos colocar em fila indiana seis homens e seis mulheres em qualquer ordem? E iniciando com homem e terminando com mulher?

Resolução: No primeiro caso, a resolução se dá por $12! = 479001600$ *maneiras.*

No segundo caso, temos uma restrição, a primeira pessoa deve ser um homem, portanto temos apenas 6 opções, e outra restrição, a última pessoa deve ser uma mulher, portanto: $6 \times 10! \times 6 = 130636800$ *opções.*

13- Exemplo 13: Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra GATA?

Resolução: $\frac{4!}{2!} = 12$

14- Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ARARA?

Resolução: $\frac{5!}{3!2!} = 10$

Utilizando o problema 15, vamos falar sobre um caso interessante contido neste módulo de estudo, que é a permutação circular.

15- De quantas formas podemos organizar 3 crianças numa roda?

Resolução: duas formas.

Um dos últimos tópicos a serem trabalhados é o de combinação, para isso os exercícios 9 (já trabalhado) e o 16 a seguir, serão apresentados aos estudantes.

16- Quantos são os números de três algarismos distintos? Quantos desses são pares?

Resolução: $9 \times 9 \times 8 = 648$*. Portanto são 648 números distintos, pois na casa das centenas o número 0 não pode ser contado, na casa das dezenas não há restrições, porém, um número já foi utilizado na casa anterior, e na casa das unidades não há restrições, porém, dois números já estão em uso.*

Para o caso dos números pares, temos 2 casos, o primeiro deles consistem em manter o 0 na casa das unidades, neste caso temos: $9 \times 8 \times 1 = 72$*, pois a casa das centenas só tem uma restrição, só não pode ser 0, e a casa das dezenas não pode ter os dois números que já estão em uso, restando 8 opções.*

O segundo caso consiste em não ter 0 na casa das unidades, assim, temos 4 opções para esta casa, 8 opções para a casa das centenas, já que ela não pode ser 0, e 8 opções para a casa das dezenas, uma vez que dois números estão em uso, logo $8 \times 8 \times 4 = 254$*, somando os dois casos, temos 326 números pares.*

Vale ressaltar que os problemas propostos podem ser resolvidos de diferentes maneiras, por isso deixaremos que os alunos pensem e resolvam pela maneira que acharem melhor, sendo estimulados pela intuição.

Atividade 3 (30 minutos)

Usaremos o tempo restante da aula para formalizar o conceito de permutação, mostrando aos alunos os tópicos que o permeiam, princípio aditivo, princípio multiplicativo, permutação simples e permutação circular.

Iniciaremos abordando o princípio fundamental da contagem, definindo e mostrando suas aplicações, enfatizando os problemas trabalhados no decorrer da aula.

Regra da Soma: Quando um evento é composto por m e n etapas independentes, consideramos então que o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pela soma: $m + n$.

Regra do produto: Quando um evento é composto por m etapas sucessivas e independentes, de tal forma que as possibilidades da segunda etapa é n, consideramos então que o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto: $m \times n$.

Usaremos o seguinte exemplo para deduzir a fórmula de permutação:

Exemplo: Se temos n elementos distintos e os organizamos em uma fila, de quantas maneiras podemos escolher um deles para ser o primeiro elemento da fila? E se escolhemos o primeiro da fila, de quantas maneiras podemos escolher o segundo elemento da fila?

Resolução: Usando este raciocínio e o princípio multiplicativo podemos concluir que o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos os n *elementos é dado por:* $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$

Comentaremos que esses agrupamentos ordenados recebem o nome de permutação simples e indicamos por P_n o número de permutações simples de n elementos:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Este valor obtido também é chamado de fatorial do número natural n, e é indicado por $n!$ ou seja, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $n \geq 1.$ Considera-se 0! = 1.

Após, explicaremos sobre a permutação com elementos repetidos, sendo que esta é diferente da permutação simples, pois os elementos repetidos permutam entre si. De uma maneira geral, dada a permutação de um conjunto com n elementos, alguns elementos repetem n_1 vezes, $n_2$vezes, ... e $n_n$vezes. Então, a permutação é calculada por

$$P_n = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_{n!}}.$$

Em seguida, explanaremos o conceito de permutação circular:

Exemplo: De quantas maneiras podemos colocar *n* objetos distintos em *n* lugares igualmente espaçados numa circunferência, se considerarmos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação?

Diferença entre permutação simples e circular:

Permutações simples: importam os lugares que os objetos ocupam.

Permutações circulares: o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si, ou seja, quais objetos que são os antecessores e os sucessores.

$$P_c = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

Assim, neste exemplo:

$$P_c = (3-1)! = 2! = 2$$

Em seguida, na intenção de ilustrar o que acabara de ser enunciado, vamos propor a resolução de alguns problemas que retratam a situação estudada, estes podem ser resolvidos em sala de aula, caso haja tempo suficiente, ou serão destinados como lista complementar que deve ser resolvida em casa.

Referências:

CHAVES, C.; BRUNING, E. M; JUNKERFUERBOM, M. A.; FABRICIO, P. A. **Relatório das Atividades da Disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática Estágio Supervisionado II: Promat e outros projetos.** Cascavel, 2015, p. 17-25.

UNIOESTE. **Relatório das Atividades Desenvolvidas pelos Alunos da Disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática: Estágio Supervisionado II no Projeto PROMAT**, Cascavel, 2012.

Anexo 1

1. (UFSC) Calcule o número de anagramas da palavra CLARA em que as letras AR aparecem juntas e nessa ordem.

Resolução: Como temos 2 letras fixas, podemos considerá-las como uma só. Sobrando então, 4 alternativas para deslocamento de posições:

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24 vezes.

2. Quantas são as permutações possíveis da palavra MATEMATICA?

   Resolução: Temos aqui um exemplo típico de permutação com repetição, sendo assim, utilizamos da fórmula vista anteriormente:

   $$P_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_{n!}}$$

   Aplicando a fórmula no problema, temos:

   $$P_n = \frac{10!}{2!2!3!}=151200$$

   Portanto, temos 151200, combinações possíveis.

3. (UEL-PR) Em uma reunião há 12 rapazes, 4 dos quais usam óculos, e 16 garotas, 6 das quais usam óculos. De quantos modos possíveis podem se formados casais para dançar sendo o par formado por uma pessoa que usa óculos com outra que não usa?

   Resolução: Na primeira, vamos calcular o número de pares possíveis de homens que usam óculos com mulheres que não usam óculos:

   Homens que usam óculos = 4

   Mulheres que não usam óculos = 10

   Total de pares = $4 \cdot 10 = 40$

   Na segunda, vamos calcular o número de pares possíveis de homens que não usam óculos com mulheres que usam óculos:

   Homens que não usam óculos: 8

   Mulheres que usam óculos: 6

   Total de pares = $8 \cdot 6 = 48$

   Agora basta somar os dois resultados:

   Total de pares possíveis =$40 + 48 = 88$ *pares.*

4. Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa?

   Resolução: Temos aqui um caso de permutação circular, como vimos anteriormente, basta utilizarmos a fórmula, que é dada por: $(n-1)!$

   Sendo assim temos: $(6-1)! = 5! = 120$

   E concluímos então, que a família pode se sentar de 120 maneiras diferentes.

5. De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda? Considerando que duas determinadas crianças sempre estarão juntas e na mesma ordem.
   Resolução: Novamente temos uma permutação circular, a forma de resolução é análoga, entretanto, temos a condição de que duas crianças devem ficar juntas, por isso, podemos considerar que estas duas, são apenas uma (ocupam apenas uma posição), sendo assim, a resolução é dada por:
$$(11-1)! = 10! = 3628800$$

7.2.2 Relatório

Iniciamos a aula do dia 19 dando boas-vindas a todos os alunos, que voltavam as aulas do Promat após duas semanas, devido ao feriado do dia 12 de outubro. Neste encontro estavam presentes 16 alunos.

Em seguida, relembramos os alunos sobre o conteúdo trabalhado no último encontro, que foi de Probabilidade, corrigimos alguns exercícios contidos na lista complementar que geraram dúvidas nos alunos e posteriormente iniciamos um novo tópico de estudo.

Comentamos com os alunos que iríamos trabalhar nos últimos dois encontros do Promat, com o conteúdo de Análise Combinatória, dissemos ainda que trabalharíamos de maneira diferente dos demais encontros. Neste tópico específico, nos voltaríamos para a resolução de vários exercícios durante a aula, buscando assim, levar os alunos a compreenderem os diferentes tipos de problemas que permeiam este conteúdo.

A aula do dia 19 de outubro foi a primeira parte da abordagem sobre Análise combinatória, os conteúdos que foram abordados neste primeiro dia foram: Princípio aditivo da contagem, princípio multiplicativo da contagem, permutação simples e permutação circular.

Logo no início da aula, após as primeiras considerações, entregamos aos alunos uma lista que continha os exercícios que seriam trabalhados durante todo o encontro, destinamos um tempo para que os alunos resolvessem alguns dos exercícios, enquanto isso andávamos pela sala, esclarecendo eventuais dúvidas. Depois que os alunos terminaram a resolução de uma parte dos exercícios, os corrigimos no quadro, mostrando os diferentes métodos de resolução, que pudemos perceber entre as resoluções elaboradas pelos alunos.

Da mesma forma procedemos após a correção destes primeiros exercícios, destinamos um tempo a resolução de mais uma parte da lista de exercícios e em seguida os corrigimos no quadro.

Mostramos aos alunos nesta aula que é possível resolver exercícios sobre Análise Combinatória mesmo sem conhecer as fórmulas. Entretanto, mostramos aos estudantes como são determinadas as fórmulas utilizadas usualmente. Neste encontro não tratamos sobre exercícios que envolvessem arranjos e combinações, pois destinamos outro encontro para tratar destes dois tópicos.

Acreditamos que nossos alunos compreenderam o que queríamos mostrar nesta aula, alguns deles apresentaram bastante facilidade na resolução dos exercícios, outros, nem tanto, e precisaram de explicações individuais. Pensamos ainda, que a maneira pela qual introduzimos os conteúdos foi proveitosa, pois podemos mostrar que existem mais que um método que nos levam a solução de um mesmo exercício e que não é necessária a implementação de fórmulas matemáticas em todos os casos.

7.3 Atividades dia 26/10

7.3.1 Plano de aula

PLANO DE AULA - 10º ENCONTRO

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral:

Levar os alunos a compreender os conceitos básicos de Análise Combinatória, relacionando-os com a realidade.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com análise combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Distinguir os diferentes tipos de problemas de contagem: permutação simples, permutação com elementos repetidos, permutação circular, arranjo e combinação;
- Resolver problemas envolvendo conceitos de permutação, arranjo e contagem;

Conteúdo:

Permutação simples, permutação com elementos repetidos, permutação circular, arranjo e combinação;

Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lápis, computador, projetor, listas de exercícios.

Atividade 01 (10 minutos)

Iniciaremos a aula retomando o conteúdo da aula anterior, após, daremos continuidade ao conteúdo de análise combinatória, nessa aula, relembraremos as definições permutações e em seguida definir o que são arranjos e combinações.

Atividade 02 (20 minutos)

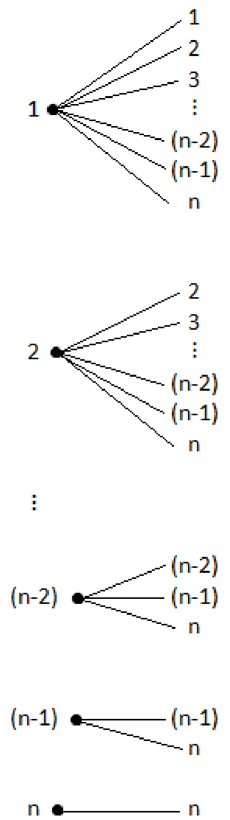
Para introduzir o conceito de arranjo usaremos o seguinte exemplo:

Exemplo: Como calcular o número total de agrupamentos no caso de *n* elementos arranjados *p* a *p*, com $n \geq p$, ou seja, como calcular $A_{n,p}$.

Resolução: Para n = p, já estudamos e podemos calcular da seguinte maneira:

$$A_{n,p} = P_n = n!$$

Vejamos agora como calcularmos para n > p. Temos n elementos distintos e vamos arranjá-los p a p. Construindo a árvore de possibilidades, temos:



** na primeira posição: n possibilidades*

** na segunda posição: (n-1) possibilidades*

** na terceira posição: (n-2) possibilidades*

⋮

** na p-ézima posição: 1 possibilidades*

Aplicando o princípio fundamental da contagem, temos que o número total de possibilidades é dado por: $A_{n,p} = \underbrace{n\,.(n-1)\,.\;(n-2)\,.\;\ldots\;.[n-(p-1)]}_{p\ fatores}$

Podemos ainda indicar $A_{n,p}$ *por meio de fatoriais. Observe:*

$$A_{n,p} = n\,.(n-1)\,.\;(n-2)\,.\;\ldots\;.(n-p+1)$$

Multiplicando esse número por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ *temos:*

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2).\ \dots\ .(n-p+1).\frac{(n-p)!}{(n-p)!} \quad =>$$

$$A_{n,p} = \frac{n.(n-1).(n-2).\ \dots\ .(n-p+1).(n-p-1).\dots\ .2.1}{(n-p)!}$$

Portanto:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

que é a definição de arranjo para um conjunto A com n elementos, sendo este o arranjo dos n elementos tomados p a p (1 ≤ p ≤ n) a qualquer sequência de p elementos formados com elementos de A todos distintos.

Atividade 03 (20 minutos)

Após, trabalharemos a definição de combinação:

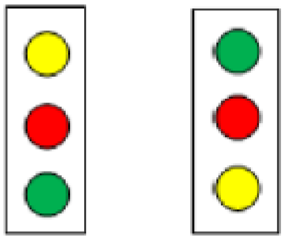
Combinações simples de *n* elementos tomados *p* a *p* (*p* ≤ *n*) são subconjuntos diferentes com exatamente *p* elementos que se podem formar com os *n* elementos dados. Indica-se por $C_{n,p}$ o número total de combinações de *n* elementos tomados *p* a *p* e calcula-se por:

$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_n} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Como são subconjuntos de um conjunto, a ordem dos elementos não importa, as combinações são caracterizadas pela natureza dos elementos;

Atividade 4 (50 minutos)

Após, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios para serem resolvidos na sala. Durante essa atividade auxiliaremos os alunos nos grupos. Após a resolução por partes dos alunos iremos corrigir as questões no quadro.

6. O semáforo é um aparelho de sinalização urbana, rodoviária ou ferroviária que orienta o tráfego por meio de luzes. A escolha da sequência de cores: vermelho no topo, amarelo no meio e verde embaixo é uma forma de não confundir o motorista e segue convenções internacionais. Imagine que fosse possível construir outros tipos de semáforos que não se preocupassem com as facilidades visuais dos motoristas. Considerando que a ordem em que as cores aparecem é importante, ou seja, os sinais abaixo são diferentes:



Pergunta-se:

a) Quantos são os diferentes sinais de trânsito que podemos construir com essas três cores, sem repetir às cores?

Resolução: $3! = 6\, maneiras$.

b) E se pudéssemos repetir as cores?

Resolução: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27\, maneiras$.

7. (FATEC-PR) Se o número de permutações simples de *n* elementos é 120, então qual o número de combinações simples que se podem formar com estes *n* elementos, 2 a 2?

Resolução: *Sabemos que:*

$$P_n = n!$$

Dado que:

$$P_n = 120$$

$$P_n = 5!$$

Então $n = 5$.

Fazendo a Combinação pedida:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

8. (UECE-CE) Uma empresa possui 8 sócios dos quais serão escolhidos 2 para cargos de presidente e vice-presidente. Se *n* é o número de maneiras distintas como pode ser feita a escolha, então *n* é igual a quanto?

Resolução: Como a ordem de escolha importa, temos que usar a fórmula de arranjo, logo temos:

$$A_{8,2} = \frac{8\,!}{(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$$

9. (FATEC-SP) Dispomos de 10 produtos para montagem de cestas básicas. Qual o número de cestas que podemos formar com 6 destes produtos, de modo que um determinado produto seja sempre incluído?

Resolução: Como um dos produtos tem de estar sempre presente nas combinações a fazer, restam-nos 9 produtos para formar grupos de 5 produtos.

Assim número de formas será dado por:

$$C_{9,5} = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{3024}{24} = 126\, maneiras$$

10. (UFSC) Numa circunferência são tomados 8 pontos distintos. Ligando-se dois quaisquer desses pontos, obtém-se uma corda. Qual é o número total de cordas assim formadas?

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28\, cordas$$

11. (PUC-PR) Um colecionador possuía determinado número de selos raros e diferentes entre si. Agrupando-os 4 a 4, obteve o mesmo número de grupos que se os juntasse 6 a 6. Quantos, pois, são os selos raros que o colecionador possuía?

Resolução: Seja n o número de selos temos

$$C_{n,4} = C_{n,6} \Rightarrow \frac{n!}{6!\,(n-6)!} = \frac{n!}{4!\,(n-4)!}$$

Assim precisamos que $(n-6)! = 4!$ *e* $(n-4)! = 6!$*, logo* $n - 4 = 6 \Rightarrow n = 10.$

12. Suponha que no início de um jogo você tenha R$5,00. A cada jogada, se você ganhar, recebe R$1,00, e se perder paga R$1,00 (você não paga nada para jogar). Ao final de três jogadas, determine, construindo o diagrama de árvores:

    a) De quantos modos o jogo pode se desenvolver?

    Seja P = perder e G = ganhar, temos as seguintes possibilidades:

    PPP – PPG – PGP – PGG – GGG – GGP – GPG – GPP.

    b) Quais as possíveis quantias em dinheiro que você poderá ter ao final?

    PPP = R$ 2,00

    PPG = PGP = GPP = R$ 4,00

    PGG = GGP = GPG = R$ 6,00

    GGG = R$ 8,00

13. Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

$$A_{26,3} = \frac{26\,!}{(26-3)!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23\,!}{23!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600\, palavras$$

14. Quantos números de quatro dígitos são maiores que 2400 e:

a) Têm todos os dígitos diferentes?

Resolução: Números a partir de 3000:

$$7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3528$$

Números de 2400 à 2500:

$$1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 = 56$$

Números de 2500 à 3000:

$$1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$$

Total: $3528 + 56 + 280 = 3864$

b) Não têm dígitos iguais a 3, 5 ou 6?

Resolução: Números a partir de 3000:

$$4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 1372$$

Números de 2400 à 2500:

$$1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 = 49$$

nesse caso, devemos descontar o número 2400, então temos $49 - 1 = 48$.

Números de 2500 à 3000:

$$1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 147$$

Total: $1372 + 48 + 147 = 1567$

Neste dia iremos encerrar o encontro por volta das 10h, pois iremos realizar uma confraternização com os alunos.

A avaliação ocorrerá de forma contínua por meio da participação, resolução de exercícios em sala.

Referências:

CHAVES, C.; BRUNING, E. M; JUNKERFUERBOM, M. A.; FABRICIO, P. A. **Relatório das Atividades da Disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática Estágio Supervisionado II: Promat e outros projetos.** Cascavel, 2015, p. 17-25.

PAIVA, M. **Matemática.** 2.ed. São Paulo: Moderna, 2003, volume único.

UNIOESTE. **Relatório das Atividades Desenvolvidas pelos Alunos da Disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática: Estágio Supervisionado II no Projeto PROMAT**, Cascavel, 2012.

7.3.2 Relatório

No dia 26 de outubro de 2019, sábado, realizamos o décimo e último encontro do Promat na Unioeste, Cascavel. Estavam presentes 15 alunos. Antes de darmos início a aula, comentamos com os alunos que neste dia como combinado anteriormente, faríamos uma confraternização e que desta forma daríamos aula até as 10h15, após isso, juntaríamos todas as turmas no corredor para comemorarmos o fim do Promat.

Após esse momento inicial, demos início de fato à aula, retomando o conteúdo trabalhado no encontro anterior, relembrando as definições trabalhadas sobre permutações, em seguida introduzimos o conceito de arranjo usando o seguinte exemplo:

Como calcular o número total de agrupamentos no caso de *n* elementos arranjados *p* a *p*, com $n \geq p$, ou seja, como calcular $A_{n,p}$.

Comentamos com os alunos que para o caso $n = p$, procedemos da mesma maneira que na aula anterior, dessa forma, esse caso de arranjo é um caso particular, em que podemos proceder da mesma forma que procedemos em uma permutação. Para o caso $n > p$, por meio de uma árvore de possibilidades feita em quadro e utilizando o princípio fundamental da contagem, deduzimos juntamente com os alunos a fórmula utilizada em arranjos.

Após isso, definimos combinação simples e expomos com o uso do projetor a fórmula utilizada para se resolver problemas que envolvam este conceito.

Na sequência, entregamos uma lista de exercícios para os alunos resolverem em sala, durante a resolução dos exercícios por parte dos alunos, andávamos pela sala, auxiliando-os a encontrarem estratégias de resolução. Acreditamos que este momento foi importante, pois a resolução de exercícios promove a fixação do conteúdo.

Após a resolução dos exercícios pelos alunos nos grupos, demos início à correção no quadro, buscamos a todo momento ouvir as estratégias utilizadas por eles, para que dessa forma pudesse surgir mais de uma forma de resolução. Não percebemos dúvidas durante a correção, apenas dificuldades de interpretação. Diante disso buscávamos ser claros durante nossa explicação em quadro, para que houvesse entendimento das estratégias de resolução utilizadas.

Por fim, como o horário destinado à aula estava terminando, agradecemos aos alunos pela participação deles durante o semestre, e entregamos os certificados a cada um, e então demos início a confraternização juntamente com as outras turmas do Promat.

8. CONSIDERAÇÕES

O Promat como esperado foi de grande importância no que se diz a experiência em sala de aula, nos proporcionando a oportunidade de ter contato com uma turma no papel de professor, nos permitindo muito aprendizado e reafirmando a vontade de sermos educadores.

Desde à preparação das aulas, tínhamos em mente a preocupação com a aprendizagem dos alunos, os quais possuíam dificuldades em diversos conteúdos matemáticos e viam a matemática como algo abstrato e longe de sua realidade.

Para elucidar o conteúdo matemático buscamos sempre exercícios que acreditávamos condizerem com a vivência dos alunos, para que eles percebessem a aplicação da matemática no cotidiano, além de atividades de investigação matemática e a realização de jogos, o que acreditamos tornou os conteúdos menos inóspitos aos alunos, quebrando a barreira presente entre os alunos e o conhecimento matemático.

Houve uma boa participação dos alunos durante a realização das atividades, sendo que esses participavam ativamente das aulas, gerando discussões sobre conteúdos, o que foi bem proveitoso para definir conceitos. Em diversas oportunidades, havia a exposição das resoluções dos alunos em que comentavam sobre sua estratégia de resolução, o que favorecia o andamento da aula, pois, nos munia de diversas resoluções para um mesmo exercício, mostrando que não há só uma forma de resolver um exercício, e que cada aluno pensa de forma diferente, nos levando a estar preparados para diferentes possibilidades em uma sala de aula.

Durante o Promat, crescemos amplamente no âmbito profissional e pessoal, para nós o crescimento pessoal foi extremamente importante, pois esse está diretamente ligado com nosso lado profissional. Consideramos que um professor, antes de trabalhar com conteúdos sobre sua disciplina, realiza um trabalho com pessoas, as quais são únicas, cada pessoa tem sua personalidade e modo de agir, precisa ser respeitada e valorizada integralmente.

Acreditamos que cumprimos com objetivo proposto para o Promat. Por meio dos depoimentos e observações, pudemos perceber que os alunos compreenderam os conteúdos abordados nos dez encontros. Ao longo do projeto desenvolvemos paulatinamente a capacidade de perceber as dificuldades dos alunos, mesmo que eles não nos questionassem sobre o conteúdo, agíamos de forma a esclarecer incompreensões e sanar as dúvidas.

Durante todos os encontros do Promat os alunos foram organizados em grupos de quatro elementos. Habitualmente, aos sábados, abríamos a sala e organizávamos as carteiras formando quartetos. Assim, quando os alunos chegavam, a disposição favorecia o agrupamento. Ficou evidente para nós que a possibilidade da prática pedagógica ser realizada em grupo é muito enriquecedora, pois, possibilita um maior contato entre os alunos, favorece o esclarecimento de dúvidas, permite a socialização de resoluções e estratégias alternativas, naturalmente entre colegas, elevando, dessa forma, a qualidade da aula, diminuindo assim as dúvidas restantes.

Por fim, podemos enaltecer a importância do Promat para nossa formação e crescimento profissional, o qual nos forneceu experiências distintas das até então experimentadas em nossa curta atuação como docentes, como o uso de jogos e atividades lúdicas. Isso impactou positivamente em nossa atuação como educadores da disciplina de matemática.