Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE - Campus Cascavel
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCET
Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado II

JANAINA MARIA DE LIMA GONÇALVES
LUCAS CAMPOS DE ARAÚJO
PATRÍCIA FERREIRA SURI

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II -
PROMAT

CASCAVEL
2019

JANAINA MARIA DE LIMA GONÇALVES
LUCAS CAMPOS DE ARAÚJO
PATRICIA FERREIRA SURI

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II -
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina metodologia e prática de ensino de matemática - estágio supervisionado II para aprovação.

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Vicente
Prof. Dr. Flávio Roberto Dias Silva

CASCAVEL
2019

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos nossos professores:

Amarildo Vicente e Flávio Roberto Dias Silva por suas orientações no decorrer do projeto Promat que possibilitaram um aprendizado mutuo e um aprimoramento metodológico de nossas aulas.

Dulcyene Maria Ribeiro por suas observações e direcionamentos em suas aulas, por compartilhar suas experiências e por acreditar em nosso potencial como profissionais.

Aos demais professores participantes do projeto por suas observações e sugestões em relação as aulas ministradas as quais possibilitaram uma visão diferenciada do trabalhado desenvolvido.

Agradecemos aos nossos familiares, pela compreensão, paciência e por nos apoiarem em continuar prosseguindo com nossas atividades vencendo os obstáculos em conjunto.

Agradecemos aos nossos colegas de graduação, por partilharem seus conhecimentos e experiências no intuito de enriquecer e sugerir ideias para o desenvolvimento das atividades.

Agradecemos também a Unioeste, em especial ao diretor-geral Alexandre Almeida Webber pelo apoio ao projeto Promat.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta Pasta da disciplina contém uma descrição dos momentos nos quais estivemos exercendo a prática docente.

Nosso exercício de prática ocorreu em dois locais e em dois momentos distintos: no segundo semestre de 2019 estivemos envolvidos na preparação e execução do projeto denominado Programa de Acesso e Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas - Promat, o qual visa oportunizar primordialmente a alunos do terceiro ano do ensino médio uma oportunidade de aprofundar e reforçar seus conhecimentos a respeito principalmente dos conceitos matemáticos abordados no ENEM e em vestibulares.

Encontram-se nesse trabalho os materiais produzidos como planos de aula, relatórios e lista de atividades, os quais foram utilizados para o desenvolvimento dos encontros do Promat, estes ocorreram presencialmente nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste – Campus Cascavel - aos sábados no período matutino. As aulas e materiais foram preparados com o intuito de facilitar o ensino-aprendizagem de maneira significativa, propiciando aulas interativas em que o aluno expõe suas dúvidas, resoluções e conjecturas aos demais colegas ocasionando a partilha e filtração mutua dos conhecimentos.

O projeto Promat contou com cerca de 150 participantes, dentre estes os acadêmicos estagiários, professores orientadores, alunos e dentre outros participantes e perdurou por dez encontros semanais.

As atividades aqui presentes foram desenvolvidas em grupo, porém discutidas e aprimoradas com os demais grupos do Promat em encontros semanais.

Nós Janaina, Lucas e Patrícia representamos um dos grupos de estagiários, sendo nosso professor orientador de estágio Flávio Roberto Dias Silva.

2. PROMAT

O Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas – Promat visa oportunizar a alunos do ensino médio, primordialmente do terceiro ano, um aprofundamento e reforço dos conhecimentos a respeito da matemática trabalhados no decorrer do processo de aprendizagem destes discentes, de forma a esclarecer os possíveis obstáculos epistemológicos presentes frutos de deficiências no processo de ensino. Ainda visa, com o aprofundamento dos conhecimentos, possibilitar um melhor desempenho por parte dos discentes em provas como o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM e em vestibulares em geral, possibilitando assim uma chance maior de que estes ingressem no ensino superior.

As atividades são desenvolvidas no decorrer de dois semestres no decorrer de um ano. No primeiro semestre, alunos do 3º ano de Licenciatura em Matemática matriculados na disciplina de metodologia de ensino e estágio I desenvolvem o projeto abordando conceitos, primordialmente, do ensino fundamental como razão, proporcionalidade, conjuntos numéricos, equação, polinômios, função e geometria euclidiana. Já no segundo semestre, alunos do 4º ano de Licenciatura em Matemática matriculados na disciplina de metodologia de ensino e estágio II desenvolvem o projeto abordando conceitos do ensino médio como geometria analítica, trigonometria, entre outros.

2.1 OPÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

De um ponto de vista teórico, um cursinho preparatório para vestibulares/ENEM pode, em muitos casos, ser considerado um “golpe fatal” ao conhecimento científico, uma vez que a maneira que o conteúdo é apresentado nos cursinhos é feita de forma que o estudante saia sabendo o método para resolver as questões da prova, não sendo priorizado o motivo pelo qual ele usa tal método, de forma resumida o estudante sairá sabendo aplicar determinada fórmula, sem saber ao certo o porquê dela. A presença, marginal ao sistema de ensino oficial, e ao mesmo tempo quase institucionalizada na trajetória escolar dos jovens das camadas privilegiadas em nosso país, se constitui um paradoxo.

Por um lado, atesta o fracasso do sistema educacional em preparar seus jovens para o vestibular - tanto para os que cursaram a escola pública quanto para aqueles que vieram da particular (Whitaker, 1989; Whitaker & Fiamengue, 1999, 2001) enquanto, por outro lado, usa e cria práticas e metodologias de ensino, as mais antipedagógicas possíveis, ligadas à memorização pura e simples, como a aula-show e a repetição de fórmulas em ritmos populares, sem tempo para debates, reflexões, críticas e mobilização dos conhecimentos prévios construídos no decorrer do seu desenvolvimento escolar e cultural.

Nesse sentido, temos que a apropriação de conhecimentos de modo diferenciado tem um papel importante e contributivo no desenvolvimento cultural e consequentemente na formação do cidadão. Tomando como exemplo a Matemática, temos que essa é utilizada para formar opinião, ditar regras e justificar ou validar problemas de ordem econômica, política e social. Logo, possui importância na formação cultural do ser. Conforme Araújo:

> […] é utilizada na apresentação de decisões políticas, por exemplo, de uma maneira tal que sugira que a decisão tomada aponta o melhor caminho a ser seguido, sem deixar margens para contra-argumentações, o que caracteriza seu uso como linguagem de poder. Ou seja, a Matemática participa na estrutura do debate político, o que explicita sua dimensão política na sociedade. Assim sendo, aqueles que não têm acesso a Matemática estão sujeitos ao controle e às vontades daqueles que o têm e que detêm o poder autoritário na sociedade, já que a impossibilidade de acesso significa não participar do complexo debate político, sustentado por essa ciência. Como consequência, podem-se reforçar as desigualdades sociais, o racismo, as discriminações socioeconômicas, etc. (ARAÚJO, 2007).

Logo, atividades diferenciadas e a experimentação no ensino são práticas que visam à construção do conhecimento aliada ao desenvolvimento de atitudes de cooperação social.

> A ideia do ensino despertado pelo interesse do estudante passou a ser um desafio à competência do docente. O interesse daquele que aprende passou a ser a força motora do processo de aprendizagem, e o professor, o gerador de situações estimuladoras para a aprendizagem (CUNHA, 2012).

No entanto, no atual cenário da educação, apesar da grande diversidade de metodologias de ensino/aprendizagem, temos professores “[...] inseguros diante das novas ações” (PACHECO; 2013, p.44) que, por vezes, preferem não sair da zona de conforto deixando assim de lado a responsabilidade com a capacitação teórica e prática. D’Ambrósio (2012) ainda enfatiza que para ser bom professor é necessária dedicação e preocupação com os alunos, pois

> Ninguém poderá ser um bom professor sem dedicação, sem preocupação com o próximo, sem amor num sentido amplo. O professor passa ao próximo àquilo que ninguém pode tirar de alguém, que é o conhecimento. Conhecimento só pode ser passado adiante, por meio de uma doação. O verdadeiro professor passa o que sabe não em troca de um salário (pois, se assim fosse, melhor seria ficar calado 49 minutos!), mas somente porque quer ensinar, quer mostrar os truques e os macetes que conhece (D’AMBRÓSIO, 1991).

Desse modo, durante o desenvolvimento dos planos de aula para o PROMAT, em um primeiro momento, discutiu-se e estabeleceram-se reflexões acerca da opção metodológica a ser adotada que possibilitasse abordar os conteúdos de forma eficiente e significativa sem práticas retrógradas. Para tal fora necessário um aprofundamento teórico sobre algumas metodologias que possibilitasse suprir nossas dúvidas e superar alguns obstáculos didáticos que ainda persistiam.

Diante disso, buscamos levar para sala de aula os conteúdos de modo diferenciado, sem cansar os alunos e repetir práticas abordadas em outras aulas. Para tal, optamos por utilizar diferentes metodologias de ensino aliadas ao ensino tradicional em alguns momentos, por exemplo, o uso de materiais didáticos e manipuláveis, o uso de Resolução de Problemas em determinados momentos de introdução ao conteúdo, Modelagem Matemática e Investigação Matemática para contextualizar determinados conteúdos.

Além disso, as práticas desenvolvidas em cada módulo constituíam-se de um misto de discussões de erros e acertos anteriores que obtivemos no Estágio I e parte do Estágio II. E também sobre os conhecimentos advindos de experiências anteriores. Assim, o planejamento de cada módulo ficou mais leve em relação à orientação de conteúdos e a sua abordagem. Para expor de modo mais claro faz-se necessário detalhar cada abordagem realizada em cada um dos quatro módulos, sendo esses o Tratamento da Informação; Relações Trigonométricas; Geometria Analítica; Estatística e Probabilidade.

No primeiro módulo, com o objetivo de abordar o conteúdo de tratamento da informação, utilizamos de algumas concepções da Etnomatemática apresentando inúmeros gráficos e situações-problemas do próprio convívio dos discentes.

A palavra Etnomatemática, de acordo com D'Ambrósio (2008), é composta por três raízes: *etno*, diversos ambientes (social, cultural, natureza, etc); *matema*, explicar, entender, ensinar, lidar com; *tica*, artes, técnicas, maneiras. Ou seja, o conjunto de artes, técnicas de explicar e de entender, de lidar com o ambiente social, cultural e natural, desenvolvido por diferentes grupos sociais. Ela não se trata apenas de ensinar teorias e práticas congeladas nos livros, esperando que o aluno seja capaz de repetir o que outros fizeram, mas sim de fazer o novo em resposta as necessidades ambientais, sociais, culturais, dando espaço para a imaginação e para a criatividade.

A proposta da Etnomatemática, cujo maior objetivo é analisar as raízes socioculturais do conhecimento matemático, não significa a rejeição da matemática acadêmica, mas sim um aprimoramento, incorporando a ela valores de humanidade, sintetizados numa ética de respeito, solidariedade e cooperação. Pois nela há uma interação natural das várias áreas do conhecimento, tendo a Matemática uma situação privilegiada por se relacionar com todas as áreas do conhecimento.

Além disso, consideramos os conhecimentos prévios dos alunos acerca do conteúdo. Conforme Lorenzato (2008) propõe, que devemos proporcionar um ensino partindo do momento em que o aluno se encontra, considerando os pré-requisitos cognitivos matemáticos referentes ao assunto a ser aprendido pelo aluno.

O segundo plano de aula, objetivando retomar os conteúdos de relações trigonométricas, propusemos uma atividade de investigação por meio de dobraduras. Isso corrobora com o que afirma Skovsmose (2000), ele propõe que o ensino deve mover-se para o paradigma da investigação. Nesse paradigma enquadra-se, entre outras tendências, a Investigação Matemática. Esta propõe, de modo geral, que os alunos a partir de uma situação aberta, proposta pelo professor, ajam como matemáticos profissionais levantando questões para investigar, formulando e testando hipóteses e por fim, validando seus resultados, redescobrindo a Matemática.

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade Matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (PONTE, 2006).

Segundo Ponte (2006) uma investigação matemática se desenvolve em quatro momentos. Estes momentos descrevem as ações desenvolvidas pelos alunos em uma Investigação Matemática. No primeiro acontece a identificação da situação, sua exploração e a formulação de questões, no segundo formulam-se as conjecturas e em seguida no terceiro momento fazem-se testes e o refinamento das conjecturas e por fim, o quarto momento, diz respeito à argumentação, à demonstração e à validação dos resultados. É importante ressaltar que, muitas vezes, os momentos podem ocorrer simultaneamente e alguns podem repetir-se ao longo da atividade, como por exemplo, após negar alguma conjectura os alunos podem formular outra e assim como anteriormente testar sua veracidade.

Ponte (2006), também, traz orientações para o trabalho dos professores afirmando que uma atividade de investigação geralmente se desenvolve em três fases. Na primeira o professor propõe aos alunos a tarefa seja por escrito ou oralmente, na segunda os alunos realizam a investigação seja individualmente ou em grupos e por fim na terceira fase faz-se a socialização e discussão dos resultados.

Vale salientar, dentre os momentos da atividade, que na fase da investigação o professor deve acompanhar como os alunos estão trabalhando e prestar apoio quando necessário, salientando que eles utilizem seus conhecimentos prévios, porém é importante que os alunos interajam em grupo decidindo o rumo da investigação e o professor só interfira quando identificar que o grupo precisa.

> No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois polos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. (PONTE, 2006).

As definições estabelecidas no estudo das relações trigonométricas foram baseadas na atividade de dobradura, para tal fez-se necessário o estabelecimento de um questionário em conjunto a outras situações-problema apresentadas com o auxílio das mídias digitais disponíveis. Os questionamentos, tanto dos alunos quanto os nossos, valorizaram significativamente a aula, pois possibilitaram relacionar a atividade com os conceitos formais. As dúvidas e certezas encontradas pelos alunos representaram as inquietações resultantes de necessidades não satisfeitas. Conforme Bock (2008) afirma que as perguntas ampliam o desejo de aprender, pois lida com essas inquietações. Desse modo, buscamos em outras aulas, em determinados momentos, criar este ambiente.

No trabalho das relações trigonométricas na circunferência propiciamos situações-problema que possibilitassem uma correlação com as aulas anteriores. Assim, com base nas aulas anteriores e inspirados por Freire e Faundez (1985) que afirmam que “…o início de conhecimento, repito, é perguntar.”, propusemos novamente um ambiente baseado em perguntas, relacionando as descobertas da aula anterior, com esta aula.

O diálogo nesta aula foi de extrema importância, pois possibilitou que os discentes relacionassem as relações trigonométricas apresentadas nas situações-problema com as proporções obtidas na circunferência trigonométrica. Sobre isso Freire (1975) afirma que o diálogo não pode se reduzir a um ato de depositar ideias de um sujeito no outro, nem tampouco se tronar simples troca de ideias a serem consumidas pelos permutantes. É um ato de criação. Novamente, as perguntas, tantas dos alunos como as realizadas por nós, contribuíram efetivamente para o ambiente de aprendizagem.

E no trabalho com as funções trigonométricas, novamente buscamos um ambiente movimentado por questionamentos. Para assim retomarmos intuitivamente o conceito de função e expor com o uso da ferramenta *Geogebra* as transformações de cada função trigonométrica. Para tal, propusemos questionamentos acerca das características básicas de uma função como o domínio, a imagem, o período e sobre as transformações gráficas conforme alterasse a lei de formação.

Desse modo e de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), utilizamos a ferramenta para que os alunos pudessem explorar cada transformação, um tema novo até então, expusemos o tema tradicional de maneira nova. Oferecemos assim, novas possibilidades de exploração aos alunos. Além disso, apesar de termos utilizado a ferramenta *Geogebra,* a partir de nosso aprofundamento teórico, temos consciência da existência de inúmeras outras tecnologias que tornam o trabalho da matemática com a tecnologia exequível e eficaz.

O terceiro módulo tinha por objetivo trabalhar os conceitos básicos da Geometria Analítica. Para tal, propormos inicialmente uma atividade contextualizada acerca da Ponte da Amizade, que está entre o Brasil-Paraguai. Expusemos vários fatos acerca da ponte e detalhes técnicos da sua construção. Em seguida, influenciados pela "ideologia da pergunta", propusemos indagações que viriam a ser problemas para abordar o conceito de posição, localização e distância.

As aulas foram baseadas pelo conceito proposto por D' Ambrosio (1986), o autor afirma que a Modelagem Matemática se constitui em "um processo muito rico de encarar situações reais e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial". Consequentemente, a contextualização foi aliada para culminar neste ambiente de aprendizagem.

No trabalho com as posições relativas entre retas, pontos e planos, propusemos um ambiente contextualizado por meio de mapas geográficos da região urbana da cidade de Cascavel, localizada no oeste do estado do Paraná. O intuito era que os alunos observassem os conceitos que poderiam ser retirados e abordados por meio do mapa em questão. A contextualização, conforme os PCN (2000):

> Interdisciplinaridade e Contextualização são recursos complementares para ampliar as inúmeras possibilidades de interação entre disciplinas e entre as áreas nas quais disciplinas venham a ser agrupadas. Juntas, elas se comparam a um trançado cujos fios estão dados, mas cujo resultado final pode ter infinitos padrões de entrelaçamento e muitas alternativas para combinar cores e texturas.

Consequentemente, relacionamos a matemática com vários outros contextos conhecidos pelos alunos. Para realizar esta contextualização, propusemos indagações aos alunos, de modo que o mesmo interpretasse o objeto de estudo, o mapa.

Já no trabalho das posições relativas entre circunferência, retas, planos e pontos. Novamente, trabalhamos com o *software* Geogebra, levantando questionamentos sobre as possíveis posições e exemplificando na ferramenta. Além disso, propusemos situações-problema que abordassem os conceitos apresentados durante a aula, ou seja, problemas mais específicos com menos contextualização do que os anteriores.

No quarto módulo, sobre Estatística e Probabilidade, como o intuito era abordar de modo geral os conceitos básicos e propiciar o entendimento dos conceitos aliado a resolução de atividades, baseamo-nos na Resolução de Problemas e Modelagem Matemática. Primeiramente propomos atividades para introduzir o conceito de Principio Fundamental da Contagem, Arranjo, Combinação e Permutação.

Para isto, propusemos situações-problema ser resolvidas intuitivamente e com o conceito que abordaríamos posteriormente. Conforme Schoenfeld (1991) argumenta que os problemas devem ser servir como introdução ao pensamento matemático e necessita ser relativamente acessível, permitir inúmeras resoluções, servir de introdução a ideias matemáticas e possibilitar a sua exploração.

Em contexto com isso, a Resolução de Problemas foi fundamental para o levantamento e testagem de hipóteses feitas pelos alunos. Propusemos a eles, a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, baseados na proposta de D' Ambrosio (1989) que "nesse processo o aluno envolve-se com o 'fazer' matemático no sentido de criar hipóteses e conjecturas e investigá-los a partir da situação-problema proposta.".

Já no trabalho específico com probabilidade optamos em abordar uma situação do cotidiano de muitas famílias as Loterias, para tal utilizamos da Modelagem Matemática envolvendo a conhecida Mega-Sena. Retomamos a ideia de "ideologia da pergunta" como meio facilitador e de comunicação entre os alunos e nós professores, naquele momento.

A Modelagem neste momento foi uma alternativa para a introdução dos conceitos, no qual atribuímos sentido a cada situação-problema exposta aos alunos.

FIORENTINI (1995) afirma que:

> O aluno aprende significativamente Matemática, quando consegue atribuir sentido e significado às ideias matemáticas – mesmo aquelas mais puras (isto é, abstraídas de uma realidade mais concreta) – e, sobre elas, é capaz de pensar, estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar.

Assim, proporcionamos condições de conscientização aos discentes, como: "qual a quantidade de números, dependendo da quantidade disposta a gastar, aumentaria as chances reais de ganhar na Mega-Sena?". Essa indagação e problematização proposta na aula alia-se a ideia de BARBOSA (2004, p.75), para o autor "a Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”.

Portanto, ao planejar as aulas excluímos a ideia de sermos o artista principal da aula. Queríamos proporcionar aos alunos a aprendizagem significativa seja ela por qualquer meio que tomássemos como metodologia.

Ao fim, concluímos que a metodologia sofre inúmeras alterações desde o seu planejamento à execução da aula planejada. De fato, lidamos com seres humanos, nada previsíveis, por isso é importante estar proposto a mudar: de atitude, metodologia e ideias.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na Educação Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática:** O que é? Por quê? Como?. Veriatati, n.4, p.73-80, 2004.

BÖCK, V. R. Motivação para aprender e motivação para ensinar: reencantando a escola. Porto Alegre: CAPE, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais:** Bases legais. Brasília: Ministério da Educação. 2000. 109 p.

CUNHA, M. B. **Jogos no Ensino de Química:** Considerações Teóricas para sua utilização em Sala de Aula. Revista Química Nova na Escola Vol.34, Nº 2, p.92-98. São Carlos-SP, Maio 2012.

D’ AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte : Autêntica, 2008.

D’AMBRÓSIO, U. **Matemática, ensino e educação: uma proposta global**. Temas & Debates, São Paulo, 1991.

D’AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N 2. Brasília, 1989. P. 15-19.

D’AMBROSIO, U. **Da realidade à ação** – reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: SUMMUS/UNICAMP, 1986. 115p

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FREIRE. P. **Pedagogia do oprimido.** 2.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1975.

FREIRE, P.; FAUNDEZ, **A. Por uma pedagogia da pergunta**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1985

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 2ª Ed. Campinas: Autores associados, 2008.

PACHECO, J; PACHECO, M. F. **A Escola da Ponte sob múltiplos olhares:** palavras de educadores, alunos e pais. Porto Alegre: Penso, 2013.

PONTE, João Pedro da. BROCARDO, Joana. OLIVEIRA, Hélia. Investigações Matemáticas em sala de aula. **Coleção Tendências em Educação Matemática**. 1ª edição. Editora Autêntica. Belo Horizonte, 2006.

SCHOENFELD, A. **Por que toda esta agitação acerca da Resolução de Problemas**? Em: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projecto MPT, p. 61 – 72, 1996.

Whitaker, D. C. A. (1989). **Diferentes perfis de candidatos para diferentes cursos:** Estudo de variáveis de capital cultural (Série Pesquisa Vunesp, Vol. 2). São Paulo: Fundação Vunesp.

Whitaker, D. C. A., & Fiamengue, E. (2001). **A heterogeneidade socioeconômica vestibulandos dos diferentes cursos da UNESP a partir de algumas variáveis de capital cultural** (Série Pesquisa Vunesp, Vol. 17). São Paulo: Fundação Vunesp.

2.2 Cronograma

Encontro	Data	Conteúdo
1	10/08	Tratamento da Informação
2	17/08	Trigonometria
3	24/08	Trigonometria
4	31/08	Trigonometria
5	14/09	Geometria Analítica
6	21/09	Geometria Analítica
7	28/09	Geometria Analítica
8	05/10	Estatística e Probabilidade
9	19/10	Estatística e Probabilidade
10	26/10	Estatística e Probabilidade

2.3 Módulo 1 – Tratamento da Informação

2.3.1 Plano de aula - 10.08.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves
Lucas Campos de Araújo
Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos necessários para o tratamento da informação, interpretação de gráficos e análise de dados.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com tratamento da informação, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Analisar diferentes tipos de gráficos;
- Comparar informações tabeladas;
- Identificar a frequência relativa e absoluta;
- Resolver problemas que envolvam análise de gráficos;
- Analisar tabelas de frequência;
- Resolver problemas de interpretação de dados.

Conteúdo: Análise de dados e noções de estatística.

Recursos Didáticos: quadro, giz, folhas A4 e régua.

Dinâmica de apresentação (30 minutos):

Inicialmente realizaremos uma roda de conversa com os discentes para que possamos nos apresentar e conhecê-los melhor, principalmente, a respeito de seus objetivos com o Promat. Em sequência explanaremos que o Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: um enfoque à área de Matemática – Promat tem por objetivo oferecer um curso de matemática preparatório para vestibulares e ENEM para estudantes que cursam seu ensino básico em instituições públicas. O Promat centrará as atividades para os ingressantes aos cursos superiores, ofertando conteúdos de matemática da Educação Básica exigidos nos concursos vestibulares da Unioeste, na forma de “Curso de Conceitos Básicos de Matemática”, objetivando assim, além de sua preparação ao vestibular, a apropriação de determinados conteúdos, conceitos, estruturas matemáticas e desenvolvimentos cognitivos necessários às disciplinas da graduação, para que além de ingressar na universidade, os alunos que ingressaram possam ter menos dificuldades nas disciplinas que envolvem Matemática direta ou indiretamente. A partir desse projeto estamos utilizando mecanismos de reparação de deficiências de conteúdos matemáticos não aprendidos ou superficialmente aprendidos ao longo da escolaridade da Educação Básica.

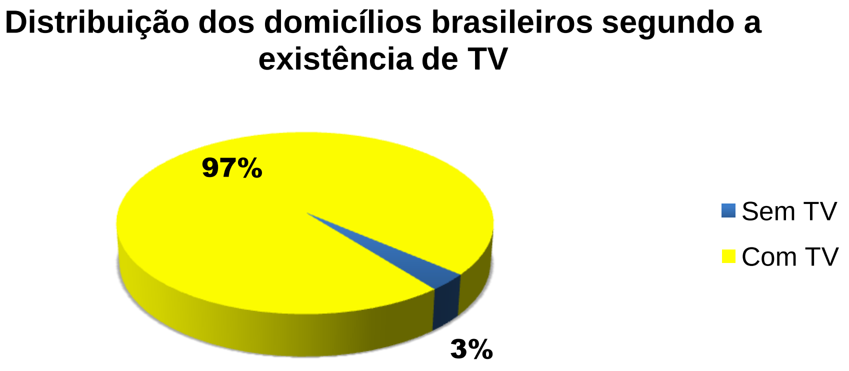
Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1 - Noções de Estatística (40 minutos)

No intuito de introduzir a aula iremos expor a seguinte pesquisa a respeito da “TV digital”:

Situação 1. A tecnologia da TV digital garante acentuada melhoria na qualidade da imagem e do som, permite a transmissão simultânea de programas diferentes em um único sinal e a participação ativa do telespectador. Além disso, possibilita sintonizar as emissoras em aparelhos celulares e em automóveis. Essas qualidades, principalmente a interatividade, estimulam a mudança de comportamento do telespectador, até então quase totalmente passivo.

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE e da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios – PNAD, em 2011, 96,9% dos domicílios brasileiros tinham acesso à televisão, conforme o seguinte gráfico:



A partir desses dados iremos indagar aos discentes “Qual é o universo\conjunto\população estudado (a)? E qual é a amostra analisada?”. Com esta pergunta, esperamos que os discentes respondam que na pesquisa realizada os domicílios brasileiros formam uma população\universo de estudo enquanto os domicílios pesquisados formam uma amostra dessa população. E ressaltaremos que, em geral, se analisam amostras para estabelecer inferências estatísticas, dado que nem sempre é possível ou viável analisar toda a população.

Também, definiremos na lousa os conceitos abordados conforme abaixo:

Definição

Uma **população** é um conjunto de elementos que têm pelo menos uma característica em comum.

Uma **amostra** é um subconjunto finito formado por elementos extraídos de uma população.

Em sequência iremos indagar aos discentes sobre as características analisadas por eles na compra de uma televisão. Esperamos ter como resposta as dimensões da tela, os recursos disponíveis, a marca, bem como o preço. Então explicaremos que cada uma dessas características é chamada variável. E definiremos este conceito conforme abaixo:

Definição

Variável é uma característica ou atributo estudado em todos os elementos da população.

Então ressaltaremos que as variáveis podem ser classificadas em **qualitativas** e **quantitativas**.

- **Variável qualitativa:** seus valores são expressos por atributos (qualidade do elemento pesquisado).

Exemplos: No caso de indivíduos: cor dos olhos, grau de escolaridade, time preferido, classe social.

Uma variável qualitativa pode ser **ordinal** ou **nominal:**

➢ **Qualitativa Ordinal:** Quando seus valores podem ser ordenados.

Exemplos: O grau de escolaridade, classe social, classificação do grau de dificuldade das questões de uma prova em fácil, médio ou difícil.

➢ **Qualitativa Nominal:** Quando seus valores não podem ser ordenados.

Exemplos: A cor dos olhos, o sexo, o time preferido.

Uma variável quantitativa pode ser **discreta** ou **contínua:**

- **Quantitativa Discreta:** Quando é proveniente de contagem, ou seja, é expressa por número inteiro.

Exemplos: O número de irmãos, a quantidade de computadores, o número de animais.

- **Quantitativa Contínua:** Quando é proveniente de medida, ou seja, é expressa por número real.

Exemplos: A massa, a idade, a altura, a temperatura, o volume.

Posteriormente iremos propor o seguinte problema:

1) (FUNIVERSA – 2015) Considerando-se que um estatístico seja contratado por um grande banco para realizar o estudo do tempo médio que os clientes passam na fila, nos horários de pico, em uma determinada agência, e considerando-se, ainda, que, nesse estudo, o estatístico tenha anotado o número de clientes à frente de cada cliente no momento da retirada da senha e o tempo que cada cliente espera até ser atendido, a variável "número de clientes à frente de cada cliente no momento da retirada da senha" será:

a) qualitativa discreta.
b) qualitativa ordinal.
c) quantitativa contínua.
d) quantitativa discreta.
e) qualitativa nominal.

Como dever extraclasse dessa etapa iremos propor os seguintes exercícios:

1) Identifique as variáveis e classifique-as em quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa nominal ou qualitativa ordinal.

a) Classificação das colunas de um jornal, por seu editor, como excelente, boa ou ruim.
b) Os números de páginas de uma lista telefônica.
c) Grau de escolaridade dos governantes dos estados brasileiros.
d) Vendas anuais de uma empresa do setor de telefonia celular.
e) Marcas de desodorante.
f) Tamanhos de roupa expressos em P, M e G.
g) Tipos de queijo vendidos em um supermercado.

h) Tipos de loja da cidade de Ilhéus na Bahia.

2) Para saber o grau de satisfação dos habitantes de Porto Alegre em relação ao governo, foram entrevistadas 8.500 pessoas. Sabendo que, na época da pesquisa , a cidade de Porto Alegre tinha cerca de 1,4 milhão de habitantes, identifique a população e amostra estudadas.

3) Observe o quadro de cadastro de funcionários de uma microempresa:

Quadro de funcionários				
Nome	**Sexo**	**Salário (R$)**	**Grau de escolaridade**	**Tempo de serviço**
Keila	F	1.350	Ensino Médio	2 anos
Carla	F	1.000	Ensino Médio	3,5 anos
Marco	M	2.500	Graduado	2 anos
Alex	M	2.000	Graduado	5 anos
Bia	F	3.100	Pós-Graduado	8 anos

Identifique as variáveis qualitativas e as quantitativas.

ETAPA 2 – Distribuição de Frequências (40 minutos)

Em sequência para introduzirmos o conceito de distribuição de frequência relativa, acumulada e absoluta iremos propor a seguinte situação problema:

Situação 2. Em uma pesquisa, realizada no estado do Paraná, sobre os preços (em reais) de um modelo de *tablet*, em 20 lojas do ramo, foram coletados os valores a seguir:

1.000	1.500	1.000	1.600	1.000	1.600	1.600	1.500	1.500	1.000
1.000	1.000	1.500	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600

Iremos indagar aos discentes como podemos analisar/organizar essas informações coletadas. Esperamos que os discentes respondam que podemos agrupar os valores que são iguais e estabelecer a quantidade de lojas conforme tabela abaixo:

Preço (R$)	**Quantidade de lojas**
1.000	6
1.500	4
1.600	10
Total	20

Então iremos expor a seguinte definição:

Definição

A quantidade de vezes que cada valor é observado chama-se **frequência absoluta**, ou simplesmente, **frequência (f_i).**

Além disso, denotaremos que a tabela que mostra a relação entre a variável e a quantidade de vezes que cada valor se repete (frequência) é chamada de **tabela de frequências** ou **distribuição de frequências.**

Então explicaremos que se acrescentarmos à tabela de frequências uma coluna com valores que indiquem a razão entre cada frequência absoluta e o total pesquisado teremos os valores da denominada **frequência relativa (f_r)**, os quais geralmente são expressos em porcentagem, para facilitar a interpretação dos dados. Assim teremos a seguinte tabela:

Preço (R$)	**Frequência absoluta f_i**	**Frequência relativa f_r**
1.000	6	$\frac{6}{20} = 0{,}30\ ou\ 30\%$
1.500	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20\ ou\ 20\%$
1.600	10	$\frac{10}{20} = 0{,}50\ ou\ 50\%$
Total	20	$\frac{20}{20} = 1\ ou\ 100\%$

Além disso, iremos expor que para saber mais sobre a variável estudada, podemos calcular a soma de cada frequência absoluta com as frequências absolutas anteriores, que chamamos de **frequência absoluta acumulada (F_i),** e a soma de cada frequência relativa com as frequências relativas anteriores, que chamamos de **frequência relativa acumulada (F_r)**.

Em sequência iremos propor outra situação-problema, mas no intuito de trabalhar o agrupamento de dados em intervalos, conforme abaixo:

Situação 3. Em uma pesquisa foram coletados os tempos (em minutos) que 30 pessoas gastam no banho, conforme tabela abaixo:

5	15	14	5	10	12	10	6	3	2	8	8	8	5	10
12	13	15	12	5	7	14	5	6	4	3	5	9	12	14

a) Determinar a porcentagem de pessoas que gastam 5 minutos ou mais no banho.

b) Considerando que a cada minuto de banho gastam-se aproximadamente 9 litros de água e que as pessoas entrevistadas tomam apenas um banho por dia, quantos litros de água essas pessoas gastam no banho em um dia?

c) Se todas as pessoas entrevistadas passassem a tomar banhos de 5 minutos, quantos litros de água seriam economizados por dia?

d) Quantas pessoas, aproximadamente, poderiam ser abastecidas com a água economizada, sabendo que uma pessoa precisa de 110 litros de água por dia?

Então indagaremos aos discentes se podemos organizar estes dados da mesma forma que antes. No intuito de que percebam que por haver muitos dados distintos teríamos uma tabela muito extensa. Logo organizá-los em intervalos seria a melhor opção.

A partir disso, definiremos o conceito de amplitude dos dados, ou seja, a diferença entre o maior valor e o menor valor.

Definição

A **amplitude total (A)** de um conjunto de dados é a diferença do maior valor pelo menor valor coletado.

$$\boldsymbol{A = Maior\ valor - Menor\ valor}$$

Além disso, denotaremos que para construir a tabela devemos estabelecer o tamanho dos intervalos o que depende do número de classes e da quantia de elementos na amostra.

Então definiremos que para obter o número de classes adequado para cada situação devemos calcular o valor da expressão $1 + 3.\log(n)$ em que n é o número de elementos da amostra. No entanto, ressaltaremos que como nem sempre dispomos de uma calculadora podemos efetuar o calculo de modo aproximado, para tal dividimos os dados em $n \geq 4$ classes (pois com 10 elementos na amostra teríamos $1 + 3log(10) = 4$, e com menos elementos bastaria fazer uma tabela de distribuição de frequência comum).

Então apresentaremos a definição de amplitude do intervalo:

Definição

A **amplitude do intervalo (**$\boldsymbol{Amp_i}$**)** é, se for um número inteiro, o quociente obtido pela divisão da amplitude total pelo número $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 4$ de classes. Se o quociente não for inteiro, então devemos arredondá-lo para o menor número inteiro superior ao quociente obtido.

$$\boldsymbol{Amp_i = \frac{A}{n^{\underline{o}}\ de\ classes}}$$

A partir destas informações iremos construir a tabela de frequências com o agrupamento dos dados em intervalos para situação 3 exposta anteriormente, conforme abaixo:

$$\boldsymbol{Amp_i} = \frac{30}{5} = 2{,}6$$

Para facilitar, vamos arredondar a amplitude do intervalo igual a 3 minutos. Assim o primeiro intervalo começa em 2 indo até 5 (2+3=5). E para representar esse intervalo vamos utilizar a notação $2 \vdash 5$ (se lê intervalo numérico fechado em 2 e aberto em 5).

Logo, obtemos a seguinte tabela da qual iremos extrair as informações para responder a situação-problema:

Tempo (min)	f_i	F_i	f_r	F_r
$2 \vdash 5$	4	4	$13,3\%$	$13,3\%$
$5 \vdash 8$	9	13	$30,0\%$	$43,3\%$
$8 \vdash 11$	7	20	$23,3\%$	$66,6\%$
$11 \vdash 14$	5	25	$16,7\%$	$83,3\%$
$14 \vdash 17$	5	30	$16,7\%$	100%

a) A porcentagem dos que gastam 5 minutos ou mais no banho é o mesmo que a diferença do total entrevistado pelo seu complementar, ou seja, $100 - 13,3 = 86,7\%$.

b) Para determinar o total de litros de água gastos, inicialmente devemos somar todos os tempos registrados:

$$\sum_{i=1}^{30} n_i = 257$$

Em seguida multiplicamos o tempo total em minutos por 9 litros: $257.9 = 2313$. Assim, os entrevistados, juntos, consomem 2313 litros de água com banho em um dia.

c) Se todas as pessoas levassem apenas 5 minutos no banho, teríamos um tempo total de:

$$30.5 = 150$$

Multiplicando esse tempo por 9 litros:

$$150.9 = 1350$$

Em seguida, calculamos a diferença entre os valores:

$$2313 - 1350 = 963$$

Assim, por dia seriam economizados 963 litros de água.

d) Dividindo os 963 litros por 110, temos: $963:110 = 8{,}75$. Portanto, com 963 litros de água seria possível abastecer, por dia, aproximadamente 8 pessoas.

Como dever extraclasse dessa etapa iremos propor os seguintes exercícios:

1) Observe o valor das diárias dos quartos de um Hotel:

Valor da diária no Hotel	
Diária (R$)	**Número de quartos**
$100 \vdash 130$	73
$130 \vdash 160$	48
$160 \vdash 190$	40
$190 \vdash 220$	24
$220 \vdash 250$	15
TOTAL	200

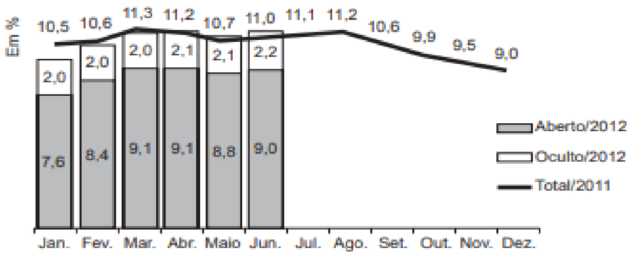
Complete a tabela com mais colunas contendo os valores das frequências: absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. E responda as questões:

a) Qual é o extremo inferior da 1º classe?
b) Que intervalo representa os valores de diárias mais comuns?
c) Qual é a porcentagem de quartos cujas diárias são inferiores a R$160,00?
d) Quantos quartos correspondem a diárias inferiores a R$190,00?
e) Quantos quartos correspondem a diárias a partir de R$190,00?

ETAPA 3 – Análise de dados e Gráficos (80 min)

No intuito de introduzirmos o trabalho com gráficos e a continuação da análise de dados, iremos propor a seguinte situação problema:

Situação 4. (ENEM 2014) O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

Disponível em: www.dieese.org.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (fragmento).

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de

a) 1,1
b) 3,5
c) 4,5
d) 6,8
e) 7,9

Resolução

Este problema tem por objetivo ser desafiador, visto que envolve a interpretação do gráfico e do enunciado em conjunto. Portanto, o mesmo, será proposto aos discentes que utilizarão de seus conhecimentos prévios e de alguns direcionamentos, promovidos por meio de indagações, para tentar solucioná-lo.

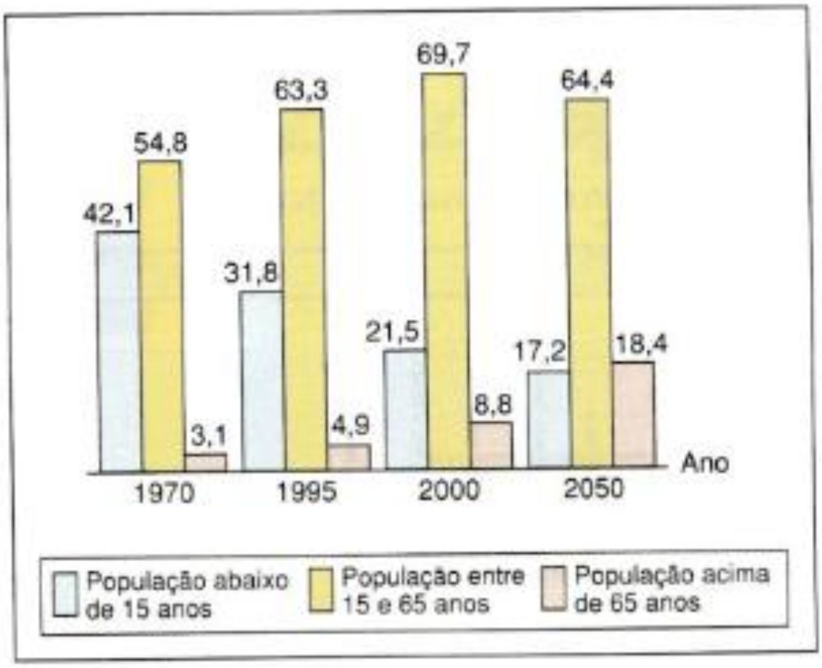
Posteriormente o mesmo será exposto na lousa e com o auxílio dos discentes iremos resolvê-lo, da seguinte forma:

- Sabemos que o desemprego oculto em dezembro de 2012 será metade do valor tido em junho de 2011, logo $2{,}2 \div 2 = 1{,}1\%$;
- Como temos também que o valor de desemprego total em dezembro de 2012 é igual ao de dezembro de 2011 temos que este é $9{,}0\%$;
- Como o desemprego total é a soma do oculto com o aberto temos que o desemprego aberto é dado pela diferença do total pelo oculto $9{,}0 - 1{,}1 = 7{,}9\%$.

Após este problema iremos expor aos discentes que existem alguns tipos de gráficos, no caso da situação 4 tínhamos um gráfico misto usando barras verticais e um segmento. Em sequência denotaremos que serão abordados outros gráficos utilizando situações-problema diversas.

Então iremos propor as seguintes situações:

Situação 5. (ENEM 2005) Em reportagem sobre crescimento da população brasileira, uma revista de divulgação científica, publicou uma tabela com a participação relativa de grupos etários na população brasileira, no período de 1970 a 2050 (projeção), em três faixas de idade: abaixo de 15 anos; entre 15 e 65 nos; e acima de 65 anos.



Admitindo-se que o título da reportagem se refira ao grupo etário cuja população cresceu sempre, ao longo do período registrado, um título adequado poderia ser:

a) “O Brasil de fraldas”

b) “Brasil: ainda um país de adolescentes”

c) “O Brasil chega à idade adulta”

d) “O Brasil troca a escola pela fábrica”

e) “O Brasil de cabelos brancos”

Resolução

Este problema tem por objetivo que os discentes observem o crescimento e decrescimento da população nas faixas etárias abaixo de 15 anos e entre 15 e 65 anos, além de que percebam a população acima de 65 anos vem crescendo período a período. Assim o título mais apropriado para descrever a situação seria a alternativa e) “O Brasil de cabelos brancos”.

Situação 6. Observe a tabela e gráficos a seguir, elaborados com base nos dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio 2011 (PNAD), feita pelo IBGE.

População por grupos de idade

Idade	Número de pessoas (em milhares)
de 0 a 9 anos	28.256
de 10 a 19 anos	34.243
de 20 a 29 anos	32.319
de 30 a 39 anos	30.099
de 40 a 49 anos	26.225
50 anos ou mais	44.101
Total	195.243

* Foram consideradas economicamente ativas as pessoas que estavam trabalhando ou tinham tomado alguma providência efetiva de procura de trabalho na semana da pesquisa.

Considerando os dados apresentados, o número aproximado de pessoas com 10 anos ou mais, economicamente ativas e que recebiam no máximo 1 salário mínimo na ocasião da pesquisa, em milhões, é:

- **a)** 8
- **b)** 24
- **c)** 43
- **d)** 100
- **e)** 167

Resolução

Essa situação-problema tem por intuito analisar a capacidade de interpretação e reconhecimento de dados dos discentes. Vamos resolvê-la por dois modos, em ambos, analisando os dados da tabela e dos dois gráficos.

Denotaremos que os dados indicados na tabela apresentam o número de pessoas segundo a faixa etária. Já o gráfico de setores apresenta dados específicos da população de 10 anos ou mais, classificando-a em dois grupos: “economicamente ativa” e “não economicamente ativa”. O gráfico de barras detalha o rendimento da população de 10 anos ou mais economicamente ativa.

Além disso, retomaremos que a pergunta da situação é a quantidade de pessoas que têm as seguintes características: 10 anos ou mais, economicamente ativos e que recebem até 1 salário mínimo. Analisando as informações apresentadas temos:

- **Pessoas com 10 anos ou mais**

Com os dados da tabela, podemos obter o número de pessoas com 10 anos ou mais somando o número de pessoas dos grupos “ de 10 a 19 anos”, “de 20 a 29 anos”, “de 30 a 39 anos”, “de 40 a 49 anos” e “50 anos ou mais” ou, simplesmente, subtrair o número de pessoas do grupo “de 0 a 9 anos” do número total de pessoas.

Obtemos, assim, o número de pessoas com 10 anos ou mais: 166.987.000 (note que os números de pessoas na tabela estão em milhares).

- **Pessoas economicamente ativas**

Para obter o número de pessoas economicamente ativas recorremos ao gráfico de setores.

Pelo gráfico, 60% das pessoas com 10 anos ou mais são economicamente ativas, e 60% de 166.987.000 são aproximadamente 100.192.200. Assim, 100.192.200 pessoas com 10 anos ou mais são economicamente ativas.

- **Pessoas que recebem até 1 salário mínimo**

Das pessoas economicamente ativas, $24{,}1\%$ recebem até 1 salário mínimo e $24{,}1\%$ de 100.192.200 são aproximadamente 24.146.320. Portanto, cerca de 24 milhões de pessoas com 10 anos ou mais e economicamente ativas recebem no máximo 1 salário mínimo.

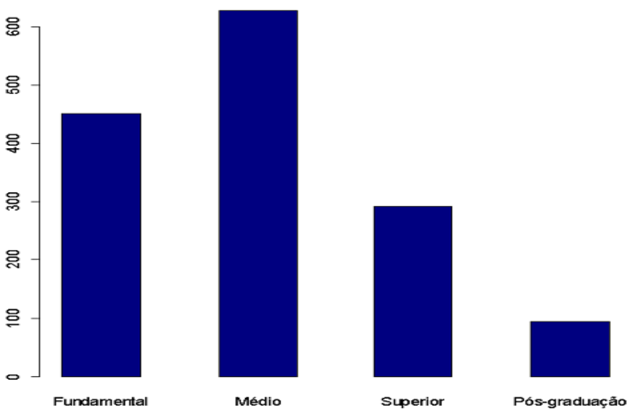
Além disso, apresentaremos outra forma de resolução, dado que é possível resolver este problema por estimativas, o que fornece uma noção de ordem de grandeza da resposta. Mesmo não sendo exata, essa prática antecipa a sequência de cálculos da resolução, auxilia na análise do resultado obtido no cálculo, além de ser mais rápida. Esta resolução é dividida em três etapas:

- Número aproximado de pessoas com 10 anos ou mais: $195\, milhões - 28\, milhões \approx 170\, milhões$.
- Número aproximado de pessoas economicamente ativas: $60\%\ de\ 170\, milhões \approx 100\, milhões$.
- Número aproximado de pessoas economicamente ativas com até 1 salário mínimo: $24\%\ de\ 100\, milhões = 24\, milhões$.

Após essas três situações problemas de gráficos iremos apresentar algumas definições sobre gráfico de barras, gráfico de segmento e gráfico de setores, conforme abaixo:

Gráfico de Barras

- Os **gráficos de barras verticais** apresentam os dados por meio de colunas (retângulos) dispostas em posição vertical. A altura de cada coluna corresponde à frequência (absoluta ou relativa) dos valores observados.



- Outra forma de apresentar as informações coletadas é por meio de um **gráfico de barras horizontais**. Esse tipo de gráfico utiliza as barras (retângulos) dispostas em posição horizontal. Os comprimentos das barras correspondem à frequência (absoluta ou relativa) dos valores observados.

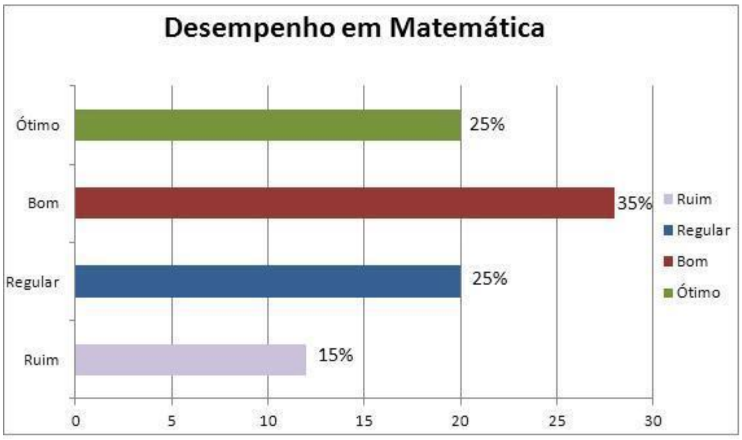


Gráfico de segmentos

Os **gráficos de segmentos** (gráficos de linhas) são muito empregados para representar o comportamento de um conjunto de dados ao longo de um período. Para construir um gráfico de segmentos, adotamos um referencial parecido com o plano cartesiano, no qual os pontos são correspondentes aos dados são marcados e, em seguida, unidos por meio de segmentos de reta.

Gráfico de setores

Os **gráficos de setores** apresentam os dados em um círculo, no qual cada setor indica a frequência (absoluta ou relativa) de um valor observado. Nesse tipo de representação, a área e o ângulo de cada setor são diretamente proporcionais à porcentagem que representam em relação ao todo (100%).

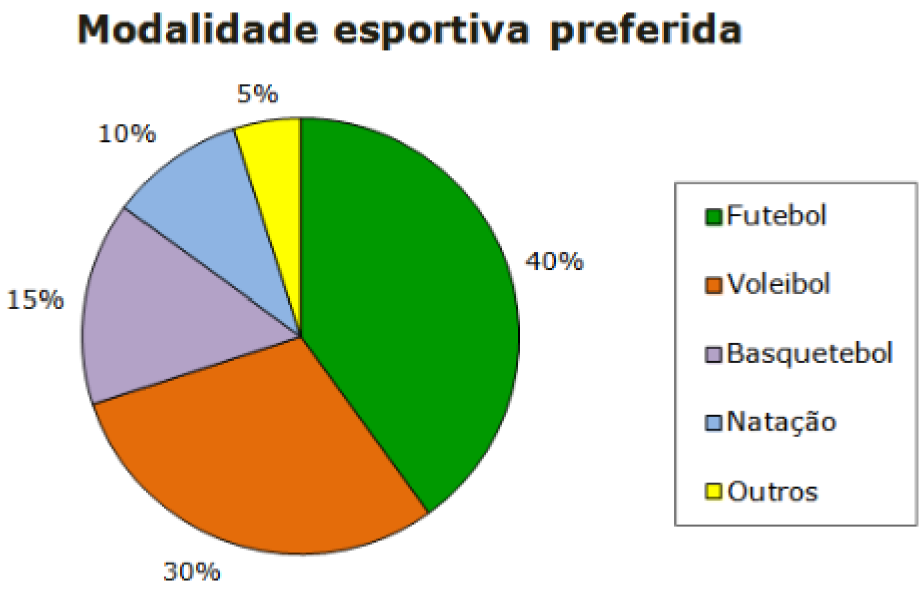
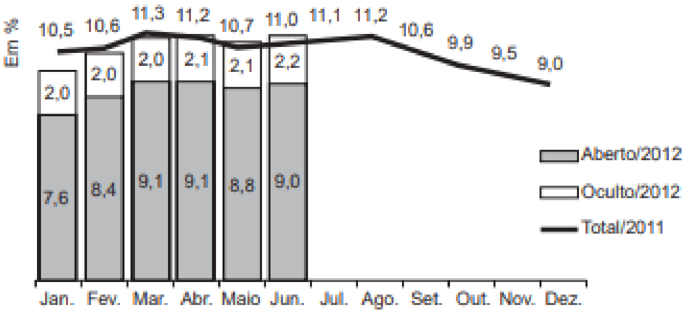
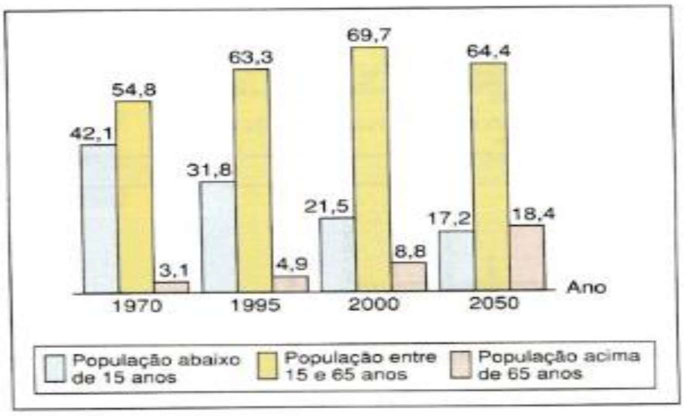


Gráfico Múltiplo

Em algumas situações, é necessário representar simultaneamente duas ou mais características. Para facilitar a comparação entre características distintas podemos construir um **gráfico múltiplo**, ou ainda, **gráfico misto**.





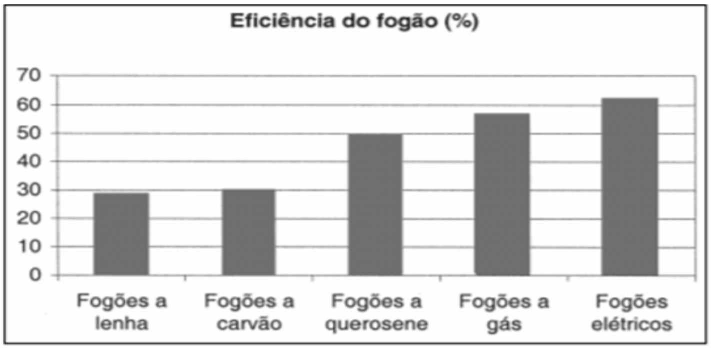
Pictograma

Os gráficos chamados de **pictogramas** exibem os dados por meio de símbolos autoexplicativos que, geralmente, estão relacionados com o tema apresentado, o que confere eficiência e atratividade ao resultado final.

ETAPA 4 – Resolução das situações-problema (80 min)

Em sequência iremos propor as seguintes situações problema:

Situação 7. (ENEM-2003) A eficiência do fogão de cozinha pode ser analisada em relação ao tipo de energia que ele utiliza. O gráfico abaixo mostra a eficiência de diferentes tipos de fogão.



Pode-se verificar que a eficiência dos fogões aumenta:

a) à medida que diminui o custo dos combustíveis.

b) à medida que passam a empregar combustíveis renováveis.

c) cerca de duas vezes, quando se substitui fogão a lenha por fogão a gás.

d) cerca de duas vezes, quando se substitui fogão a gás por fogão elétrico.

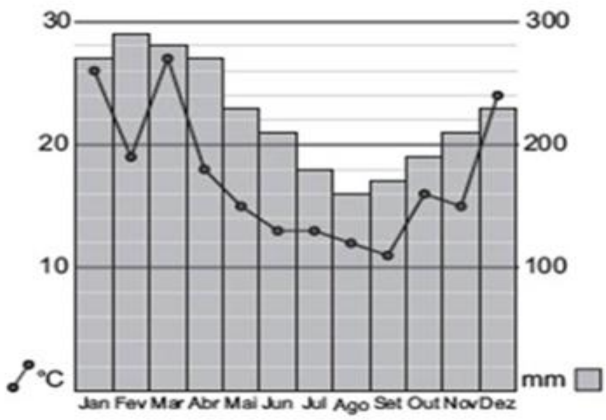
e) quando são utilizados combustíveis sólidos.

Resolução

Neste problema esperamos que os discentes observem atentamente o gráfico e percebam que a eficiência dos fogões a lenha é de aproximadamente 30% e a eficiência dos fogões a gás é de aproximadamente 60%, ou seja, duas vezes mais que o fogão a lenha.

Assim a alternativa correta é a **c)** “cerca de duas vezes, quando se substitui fogão a lenha por fogão a gás.

Situação 8. (OBMEP 2010) O gráfico mostra a temperatura média e a precipitação de chuva em Quixajuba em cada um dos meses de 2009. Qual das afirmativas abaixo está correta?



a) Mês mais chuvoso foi também o mais quente.

b) O mês menos chuvoso foi também o mais frio.

c) De outubro pra novembro aumentaram tanto a precipitação quanto a temperatura.

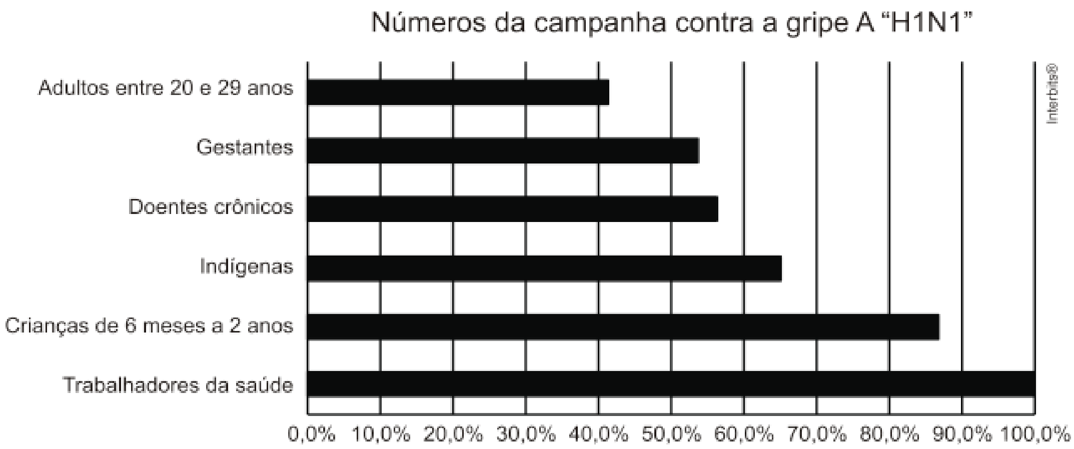
d) Os dois meses mais quentes também foram os de maior precipitação.

e) Os dois meses mais frios foram também os de menor precipitação.

Resolução

Neste problema esperamos que os discentes sejam capazes de analisar o gráfico e compreender que os segmentos representam a temperatura e as barras verticais a precipitação de chuva. E assim concluam que a alternativa correta é **e)** “os dois meses mais frios foram também os de menor precipitação”.

Situação 9. (ENEM 2010) O gráfico expõe alguns números da gripe A-H1N1. Entre as categorias que estão em processo de imunização, uma já está completamente imunizada, a dos trabalhadores da saúde.



Época. 26 de abr. 2010 (adaptado).

De acordo com o gráfico, entre as demais categorias, a que está mais exposta ao vírus da gripe A-H1N1 é a categoria de

a) indígenas.

b) gestantes.

c) doentes crônicos.

d) adultos entre 20 e 29 anos.

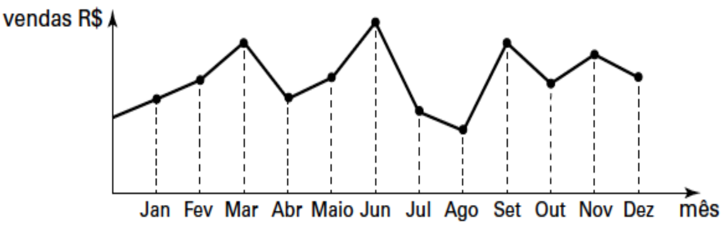
e) crianças de 6 meses a 2 anos.

Resolução

Neste problema esperamos que os discentes sejam capazes de identificar que o gráfico apresenta em porcentagem a relação de grupos imunizados contra o vírus, ou seja, quanto menor a porcentagem maior é o número de pessoas não imunizadas no grupo. Portanto a alternativa correta é **d)** "adultos entre 20 e 29 anos".

Situação 10. (ENEM 2012) O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.

De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absoluta em 2011 foram



a) março e abril.

b) março e agosto.

c) agosto e setembro.

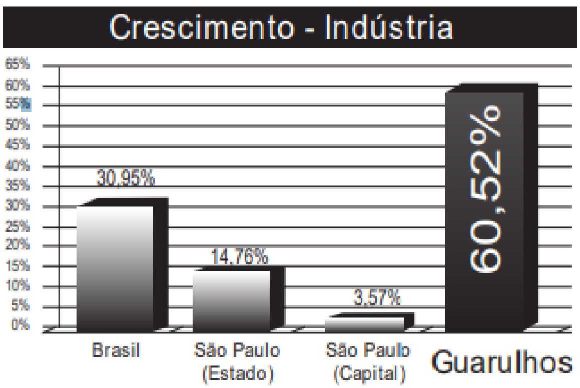
d) junho e setembro.

e) junho e agosto.

Resolução

Neste problema esperamos que os discentes sejam capazes de identificar no gráfico os valores de máximo e mínimo apresentados. Assim concluirão que a alternativa correta é **e)** "Junho e Agosto".

Situação 11. (ENEM 2013) A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Fonte: IBGE, 2002-2008 (adaptado).

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro de crescimento no polo das indústrias?

a) 75,28

b) 64,09

c) 56,95

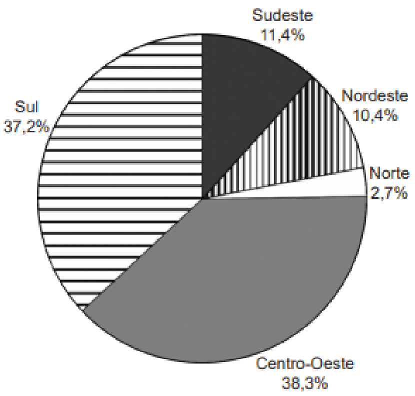
d) 45,76

e) 30,07

Resolução

Neste problema esperamos que os discentes sejam capazes de observar que o maior centro de crescimento no polo de indústrias é Guarulhos e o menor segundo os dados analisados é São Paulo (Capital). Assim concluirão que a alternativa correta é **c)** “56,95”.

Situação 12. (ENEM 2017) Estimativas do IBGE para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, apontavam uma participação por região conforme indicado no gráfico.



As estimativas indicavam que as duas regiões maiores produtoras produziriam, juntas, um total de 119,9 milhões de toneladas dessas culturas, em 2012.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 3 jul. 2012.

De acordo com esses dados, qual seria o valor mais próximo da produção, em milhão de toneladas, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país?

a) 10,3

b) 11,4

c) 13,6

d) 16,5

e) 18,1

Resolução

Neste problema esperamos que os discentes sejam capazes de observar que as duas maiores regiões somadas representam $38{,}3\% + 37{,}2\% = 75{,}5\%$ e juntas produziram 119,9 milhões de toneladas dessa cultura. Assim utilizando o conceito de proporcionalidade e a informação de que a região sudeste produziu 11,4% dessa mesma cultura, esperamos que concluam que $x = 119{,}9\,.\frac{0{,}114}{0{,}755} = 18{,}1\ milhões\ de\ toneladas$. Ou seja, a alternativa correta é **e)** “18,1”.

Situação 12. (ENEM 2017)

TEXTO I

Mama África

Mama África (a minha mãe)
é mãe solteira
e tem que fazer
mamadeira todo dia
além de trabalhar
como empacotadeira
nas Casas Bahia
Mama África tem tanto o que fazer

além de cuidar neném
além de fazer denguim
filhinho tem que entender

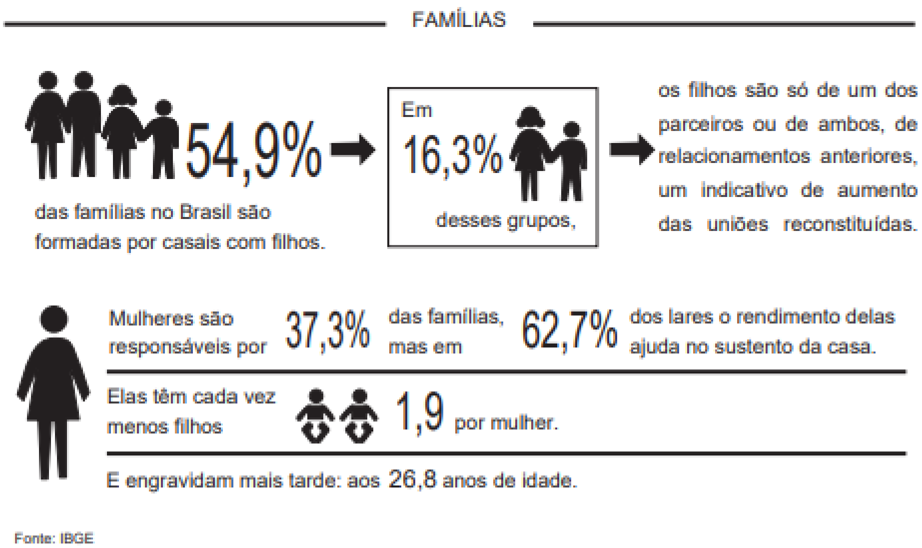
Mama África vai e vem
mas não se afasta de você
quando Mama sai de casa
seus filhos se olodunzam

rola o maior *jazz*
Mama tem calos nos pés
Mama precisa de paz
Mama não quer brincar mais

filhinho dá um tempo
é tanto contratempo
no ritmo de vida de Mama

CHICO CÉSAR. Mama África. São Paulo: MZA Music, 1995.

TEXTO II



A nova família brasileira. Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 17 dez. 2012 (adaptado).

A pesquisa, realizada pelo IBGE, evidencia características das famílias brasileiras, também tematizadas pela canção *Mama África*. Ambos os textos destacam o(a):

a) Preocupação das mulheres com o mercado de trabalho.

b) Responsabilidade das mulheres no sustento das famílias.

c) Comprometimento das mulheres na reconstituição do casamento.

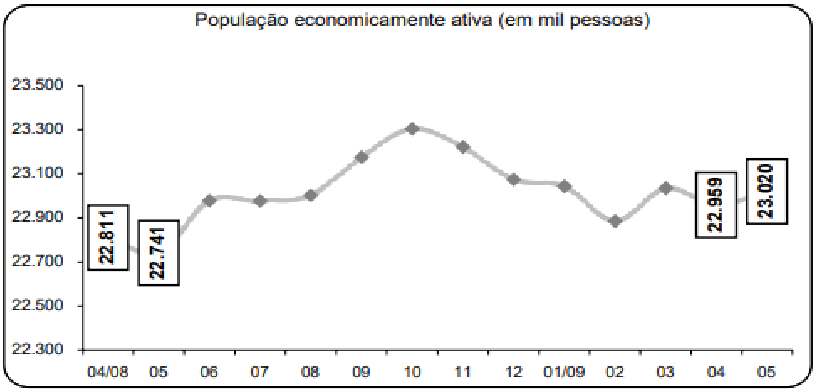
d) Dedicação das mulheres no cuidado com os filhos.

e) Importância das mulheres nas tarefas diárias.

Resolução

Neste problema esperamos que os discentes sejam capazes de relacionar o texto e os gráficos pela correlação das informações, ou seja, consigam compreender que em ambos é tratado a responsabilidade da mulher no sustento da família. Assim a alternativa correta é **b)** Responsabilidade das mulheres no sustento das famílias.

Situação 14. (ENEM 2009) O gráfico a seguir mostra a evolução, de abril de 2008 a maio de 2009, da população economicamente ativa para seis Regiões Metropolitanas pesquisadas.



FONTE: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Mensal de Emprego.

Disponível em: www.ibge.gov.br.

Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09, seja de 4% então o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 será igual a:

a) 23.940

b) 32.228

c) 920.800

d) 23.940.800

e) 32.228.000

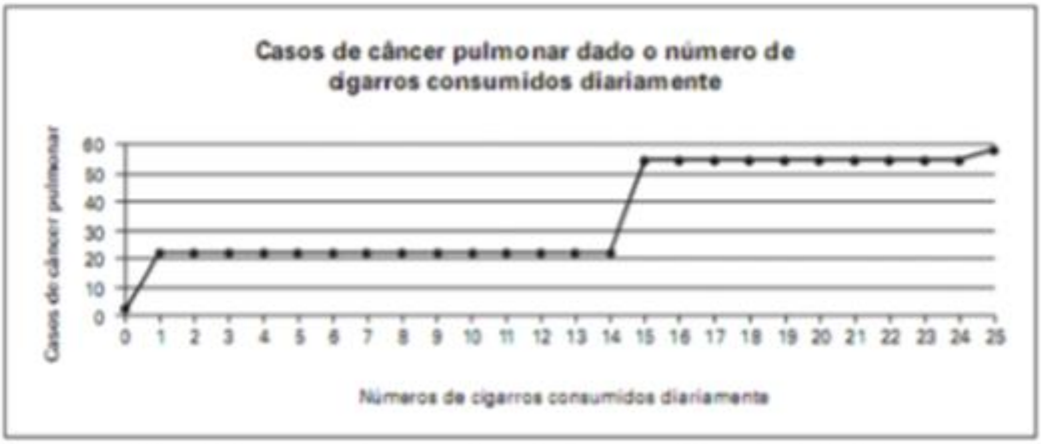
Resolução

Neste problema esperamos que os discentes sejam capazes de observar que em 05/09 o número de pessoas economicamente ativas (em mil pessoas) era de

23.020.000, logo se ocorreu um aumento de 4% para o mês seguinte, então em 06/09 teríamos $23.020.000 + (0{,}04.23.020.000) = 23.020.000 + 920.800 = 23.940.800$. Assim a alternativa correta é **d)** “23.940.800”.

Por fim iremos propor os seguintes problemas extraclasse:

1) (ENEM 2009) A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Dentre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir.



De acordo como gráfico é correto afirmar que:

a) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.

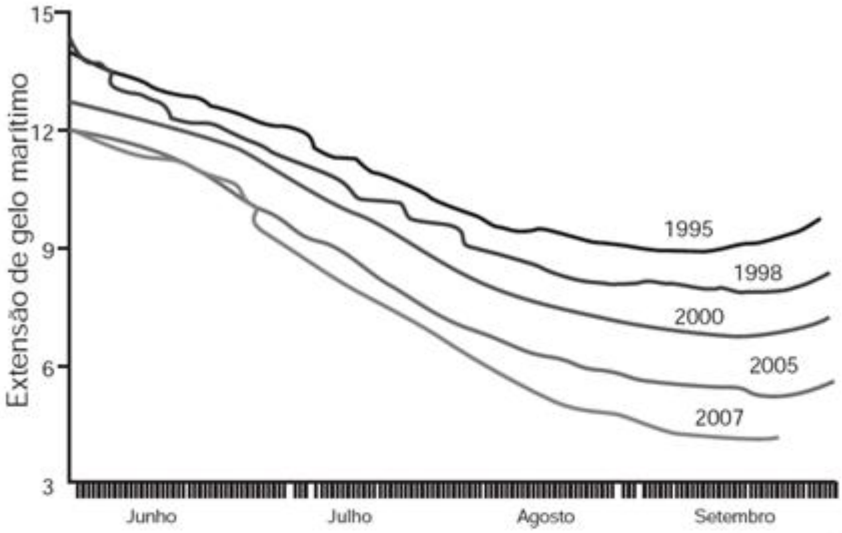
b) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.

c) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.

d) uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.

2) (ENEM 2012) O gráfico mostra a variação da extensão média de gelo marítimo, em milhões de quilômetros quadrados, comparando dados dos anos 1995, 1998, 2000, 2005 e 2007.

Os dados correspondem aos meses de junho a setembro. O Ártico começa a recobrar o gelo quando termina o verão, em meados de setembro. O gelo do mar atua como o sistema de resfriamento da Terra, refletindo quase toda a luz solar de volta ao espaço. Águas de oceanos escuros, por sua vez, absorvem a luz solar e reforçam o aquecimento do Ártico, ocasionando derretimento crescente do gelo.

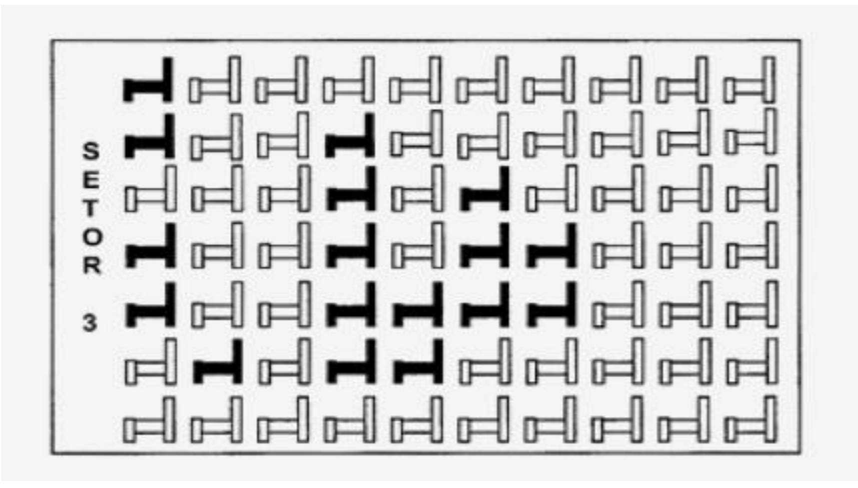


Disponível em: http://sustentabilidade.allianz.com.br. Acesso em: fev. 2012 (adaptado).

Com base no gráfico e nas informações do texto, é possível inferir que houve maior aquecimento global em:

a) 1995.
b) 1998.
c) 2000.
d) 2005.
e) 2007.

3) (ENEM 2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

a) $\frac{17}{70}$

b) $\frac{17}{53}$

c) $\frac{53}{70}$

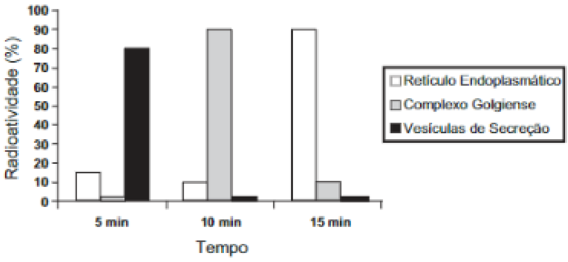
d) $\frac{53}{17}$

e) $\frac{70}{17}$

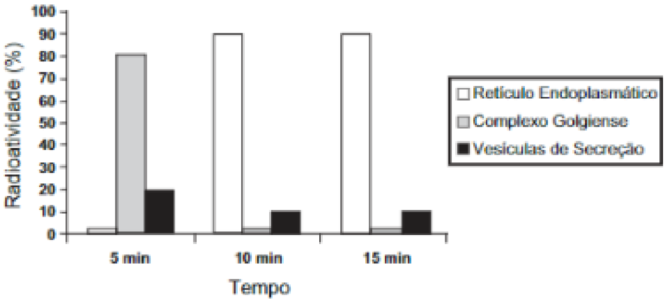
4) (ENEM 2015) Muitos estudos de síntese e endereçamento de proteínas utilizam aminoácidos marcados radioativamente para acompanhar as proteínas, desde fases iniciais de sua produção até seu destino final. Esses ensaios foram muito empregados para estudo e caracterização de células secretoras.

Após esses ensaios de radioatividade, qual o gráfico que representa a evolução temporal da produção de proteínas e sua localização em uma célula secretora?

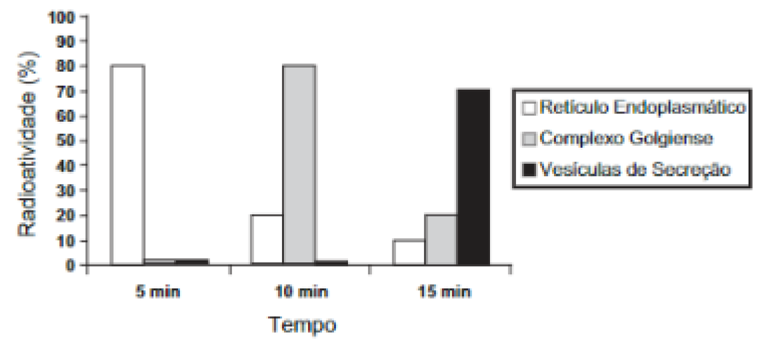
a)



b)

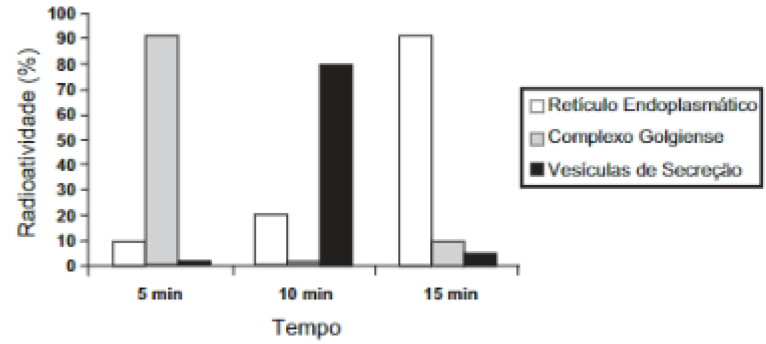


c)



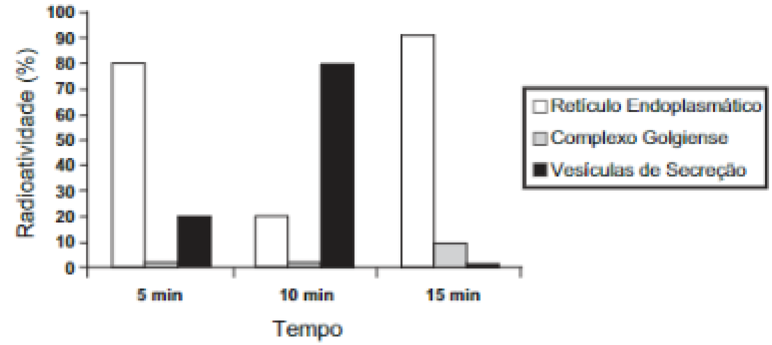
Radioatividade (%)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
5 min
10 min
15 min
Tempo
Retículo Endoplasmático
Complexo Golgiense
Vesículas de Secreção

d)



Radioatividade (%)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
5 min
10 min
15 min
Tempo
Retículo Endoplasmático
Complexo Golgiense
Vesículas de Secreção

e)



Radioatividade (%)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
5 min
10 min
15 min
Tempo
Retículo Endoplasmático
Complexo Golgiense
Vesículas de Secreção

Referências

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 3. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Vol. 3. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Projeto Araribá: matemática: ensino fundamental/obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editora Executiva Juliane Matsubara Barroso.1d. São Paulo: Moderna, 2006.

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 13 maio 2019.

Banco de questões OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br/banco.htm. Acesso em: 13 maio 2019.

2.3.1.1 Relatório - 10.08.2019

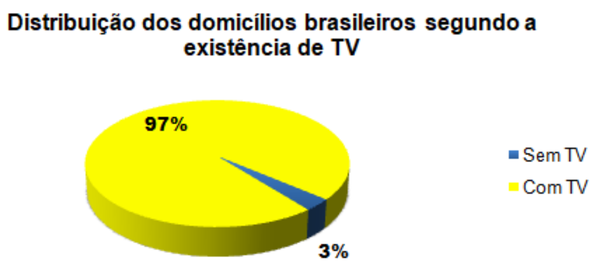
No sábado, dia 10 de Agosto de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o primeiro encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar o tratamento da informação e análise de dados.

Por se tratar do primeiro encontro com a turma, propomos aos discentes que se apresentassem expondo seus interesses em cursar o Promat e suas futuras perspectivas acadêmicas. Além disso, também nos apresentamos aos discentes e contamos um pouco de nossos interesses. Ressalta-se que, nesse momento, percebemos como a turma em geral tem interesses bem distintos percorrendo diversas áreas do conhecimento.

Com o intuito de introduzir aos discentes alguns conceitos básicos da estatística e uma situação relativamente de seu conhecimento, propomos a seguinte situação-problema:

Situação 1. A tecnologia da TV digital garante acentuada melhoria na qualidade da imagem e do som, permite a transmissão simultânea de programas diferentes em um único sinal e a participação ativa do telespectador. Além disso, possibilita sintonizar as emissoras em aparelhos celulares e em automóveis. Essas qualidades, principalmente a interatividade, estimulam a mudança de comportamento do telespectador, até então quase totalmente passivo.

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE e da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios – PNAD, em 2011, $96,9\%$ dos domicílios brasileiros tinham acesso à televisão, conforme o seguinte gráfico:



A partir da qual indagamos aos discentes sobre “Qual é o universo\conjunto\população estudado (a)? E qual é a amostra analisada?” e os mesmos responderam que a população seria os domicílios brasileiros, mas alguns tiveram dificuldade em identificar a amostra, então ressaltamos que nesse estudo a amostra analisada é representada pelos domicílios que participaram da pesquisa.

Em sequência, expomos a definição formal de população e amostra associando a outros exemplos figurativos com o uso da teoria de conjuntos, por exemplo, a “população das frutas” e a “amostra sendo as frutas vermelhas”.

Então, voltando a situação 1, indagamos aos discentes as características avaliadas ao se adquirir uma televisão e os mesmos citaram o preço, tamanho, qualidade de imagem, modelo entre outros aspectos. A partir disso, expomos que as características podem ser vistas como variáveis e estas são divididas em dois grupos as qualitativas e quantitativas. Ainda denotamos que as qualitativas são divididas em ordinal e nominal, e as quantitativas em discreta e continua relacionando cada um dos casos a exemplos do cotidiano.

Feito isso, propomos aos discentes um exercício, que resolvemos em conjunto, ressaltando os conceitos apresentados e destacando alguns aspectos relevantes a se analisar nas alternativas de uma questão.

Por conseguinte propomos a segunda situação-problema no intuito de introduzir os conceitos de frequência relativa e absoluta, conforme segue:

Situação 2. Em uma pesquisa, realizada no estado do Paraná, sobre os preços (em reais) de um modelo de *tablet*, em 20 lojas do ramo, foram coletados os valores a seguir:

1.000	1.500	1.000	1.600	1.000	1.600	1.600	1.500	1.500	1.000
1.000	1.000	1.500	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600

Para tal, indagamos aos discentes sobre como poderíamos organizar as informações apresentadas, e alguns, notaram que poderíamos separar as informações que são iguais e representar o número de repetições conforme esperávamos. Então denotamos que nessa forma de agrupamento o número de vezes que algo se repete é dado como a frequência absoluta e que se representarmos em porcentagem teremos a frequência relativa. Assim obtivemos o seguinte quadro:

Preço (R$)	Frequência absoluta	Frequência relativa
1.000	6	$\frac{6}{20} = 0{,}30 ou 30\%$
1.500	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20 ou 20\%$
1.600	10	$\frac{10}{20} = 0{,}50 ou 50\%$

Total	20	$\frac{20}{20} = 1ou100\%$

Após isso, propomos uma terceira situação-problema para que inicialmente os discentes fizessem a análise dos dados e respondessem alguns questionamentos e para que em sequência apresentássemos a organização dos dados pela tabela de frequências dividida em classes, conforme segue:

Situação 3. Em uma pesquisa foram coletados os tempos (em minutos) que 30 pessoas gastam no banho, conforme tabela abaixo:

5	15	14	5	10	12	10	6	3	2	8	8	8	5	10
12	13	15	12	5	7	14	5	6	4	3	5	9	12	14

a) Determinar a porcentagem de pessoas que gastam 5 minutos ou mais no banho.

b) Considerando que a cada minuto de banho gastam-se aproximadamente 9 litros de água e que as pessoas entrevistadas tomam apenas um banho por dia, quantos litros de água essas pessoas gastam no banho em um dia?

c) Se todas as pessoas entrevistadas passassem a tomar banhos de 5 minutos, quantos litros de água seriam economizados por dia?

d) Quantas pessoas, aproximadamente, poderiam ser abastecidas com a água economizada, sabendo que uma pessoa precisa de 110 litros de água por dia?

Nesse problema destacamos a importância da atenção na leitura das questões, dado que muitas vezes acabamos resolvendo apenas parte do problema. Além disso, percebemos que alguns discentes possuem dificuldade nas operações elementares e não se forçam a deixar de lado o uso de calculadoras.

Após resolvermos as questões na lousa, apresentamos os conceitos de amplitude total, amplitude do intervalo e número de classes para estabelecer o seguinte quadro com os dados da situação-problema:

Tempo (min)	f_i	F_i	f_r	F_r
$2 \vdash 5$	4	4	13,3%	13,3%
$5 \vdash 8$	9	13	30,0%	43,3%
$8 \vdash 11$	7	20	23,3%	66,6%
$11 \vdash 14$	5	25	16,7%	83,3%
$14 \vdash 17$	5	30	16,7%	100%

Em seguida, iniciamos o estudo de gráficos. Para tal, propomos aos discentes três situações-problema que exigiam diferentes métodos de resolução, a primeira o uso de interpretação e cálculo simples, a segunda apenas interpretação e a terceira a junção de interpretação de três representações de dados junto a alguns cálculos. Nestas situações os discentes apresentaram maior dificuldade em cálculos básicos do que na interpretação dos dados.

Após o intervalo, realizamos a apresentação formal dos tipos de gráficos mais comuns cobrados em provas como o Enem e vestibulares, como o gráfico de barras (vertical e horizontal), gráfico de setores, gráfico misto e pictograma. Então propomos mais algumas situações problemas diversas no intuito de aguçar os sentidos dos discentes na análise das informações e também para reforçar cálculos básicos de proporção.

Nestas últimas situações, os discentes apresentaram poucas dúvidas, mas levantaram alguns questionamentos sobre a divisão com números decimais, denotamos que podemos “remover a vírgula” mantendo a proporcionalidade, ou seja, multiplicando tanto o dividendo quanto o divisor por um mesmo número, que no caso seria múltiplo de 10. Além disso, denotamos que quando as alternativas não apresentam valores “próximos” não é de certa forma, necessário se atentar aos decimais, ou seja, podem-se fazer aproximações.

2.4 Módulo 2 – Trigonometria

2.4.1 Plano de aula - 17.08.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves
Lucas Campos de Araújo
Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de semelhança de triângulos, triângulo retângulo, seno, cosseno e tangente, a capacidade de resolver problemas que envolvam esses conceitos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com o triângulo retângulo, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Verificar a semelhança de triângulos;
- Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Compreender o teorema de Pitágoras;
- Comparar as relações trigonométricas;
- Resolver problemas que envolvam razões e relações trigonométricas;
- Resolver problemas que envolvam o teorema de Pitágoras.

Conteúdo: Triângulo retângulo e razões trigonométricas.

Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1 (60 minutos)

Nesta etapa, no intuito de retomar o conceito de semelhança de triângulos relembraremos os alunos os conceitos de ângulos (reto, agudo e obtuso), e triângulos (retângulo, acutângulo, obtusângulo, equilátero, isósceles e escaleno), conforme abaixo.

Definição

Um triângulo é dito **acutângulo** se tem os três ângulos internos agudos, ou seja, menores que 90º.

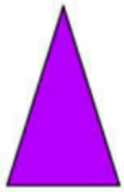


Figura 1: Triângulo acutângulo

Fonte: acervo dos autores

Definição

Um triângulo é dito **retângulo** se tem um ângulo interno reto, ou seja, um ângulo interno igual a 90º.

Figura 2: Triângulo retângulo

Fonte: acervo dos autores

Definição

Um triângulo é dito **obtusângulo** se tem um ângulo interno obtuso, ou seja, um ângulo interno maior que 90º e menor que 180º.

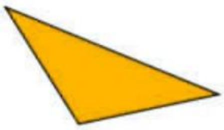


Figura 3: Triângulo obtusângulo

Fonte: acervo dos autores

Em sequência iremos propor aos discentes para formarem grupos de três (ou mais, se necessário) alunos.

Então entregaremos a cada grupo um jogo formado com três triângulos retângulos semelhantes de tamanhos diferentes, sendo que um dos triângulos tem desenhado um ângulo reto. Esses triângulos se encontram no anexo I. Em seguida, faremos os seguintes questionamentos aos alunos:

- *O que os triângulos têm em comum?*

  Queremos que digam que os três são triângulos retângulos e, portanto, possuem um ângulo reto.

- *Estes triângulos são semelhantes? Seus ângulos são iguais?*

  Ao medirmos os ângulos com o transferidor percebe-se que três dos triângulos possuem ângulos de 30º, 60º e 90º, o que os torna semelhantes. Os outros dois triângulos possuem dois ângulos de 45º e 90º e, portanto, também são semelhantes.

- *Ao medirmos os lados dos triângulos com uma régua e dividirmos seus lados equivalentes, esta medida é diferente dependendo do tamanho do triângulo?*

  Não, nos triângulos semelhantes esta medida deve ser igual.

- *O que podemos concluir com isto?*

  As medidas obtidas equivalem à medida do seno, do cosseno e da tangente dos triângulos, que são equivalentes para triângulos semelhantes, porém se alterarmos o valor dos ângulos esta medida será diferente da encontrada no momento.

Em sequência, formalizaremos o conceito de semelhança abordado:

Definição

Dois triângulos são semelhantes se, somente se,

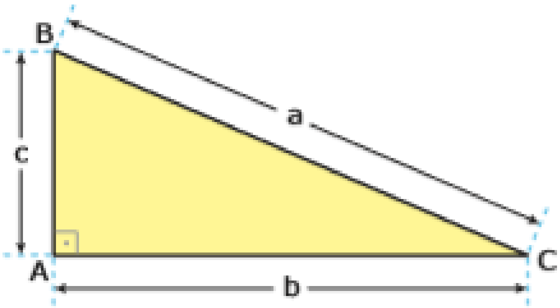
i. Os ângulos são congruentes;
ii. Os lados opostos a ângulos congruentes são congruentes.

Ainda, indagaremos aos discentes a respeito de outra relação válida para o triângulo retângulo, esperando que se lembrem do Teorema de Pitágoras. Em seguida, apresentaremos esse teorema e a relação de Tales para o desenvolvimento dos demais conceitos.

Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

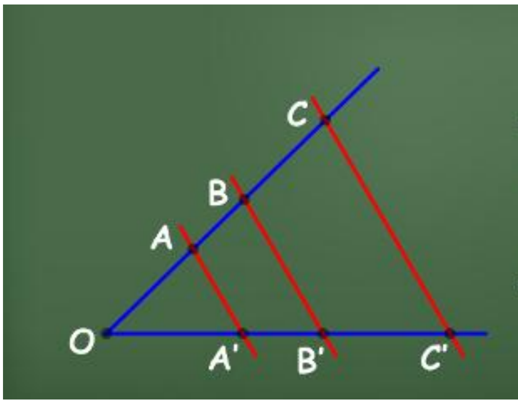
Na figura, **b** e **c** são as medidas dos catetos; e **a**, a medida da hipotenusa. Daí, temos:



$$c^2 + b^2 = a^2$$

Teorema de Tales

Retas paralelas cortadas por transversais formam segmentos correspondentes proporcionais.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

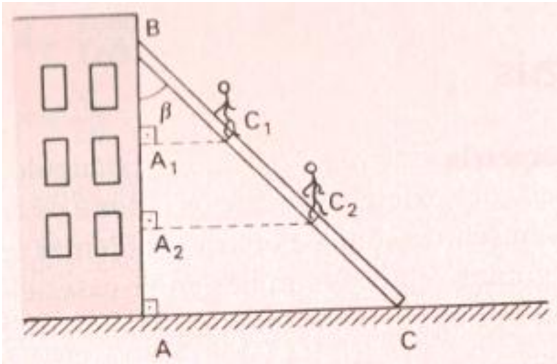
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CC'}}$$

ETAPA 2 (60 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar as relações trigonométricas no triângulo retângulo utilizando-se do conceito de semelhança e da relação de Tales, conforme abaixo:

1. Seno

Uma escada de $15\,m$ de comprimento está encostada a uma parede num ponto B e ao solo num ponto C. Em A temos um ângulo reto.



Distâncias

$BC_1 = 5\ m$

$BC_2 = 10\ m$

$BC = 15\ m$

$BA_1 = 4\ m$

$BA_2 = 8\ m$

$BA = 12\ m$

$A_1C_1 = 3\ m$

$A_2C_2 = 6\ m$

$AC = 9\ m$

Iremos expor que se uma pessoa estiver descendo a escada a partir de **B**, então:

- Ao atingir o ponto C_1 terá percorrido $5\ m$, terá descido verticalmente $4\ m$ e estará afastada da parede $3\ m$;
- Ao atingir o ponto C_2 terá percorrido $10\ m$, terá descido verticalmente $8\ m$ e estará afastada da parede $6\ m$;
- Ao atingir o ponto C terá percorrido $15\ m$, terá descido verticalmente $12\ m$ e estará afastada da parede $9\ m$.

Então iremos indagar aos discentes a respeito da característica comum entre os triângulos expressos na ilustração, esperando que percebam que são semelhantes. Assim poderemos expor na lousa que, pela relação de Tales, as razões $\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{3}{5}$, $\frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{6}{10}$ e $\frac{AC}{BC} = \frac{9}{15}$ são todas iguais, sendo o valor comum $0{,}6$.

Em sequência, indagaremos aos discentes se ao alterarmos a inclinação da escada as razões permanecem iguais, esperando que respondam de modo afirmativo, pois os triângulos são semelhantes. Mas ressaltaremos que apesar de as razões serem iguais terão valores diferentes. Ou seja, o valor comum entre as razões depende do ângulo que a escada forma com a parede.

Assim poderemos concluir que o ângulo de medida β determina o valor das razões do tipo cateto oposto a β sobre a hipotenusa nos triângulos retângulos BA_1C_1, BA_2C_2 e BAC da figura. Denotaremos que essa razão é chamada de $seno\ de\ \beta$ e representaremos por $sen(\beta)$.

Temos então, no caso da figura:

$$sen(\beta) = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{AC}{BC} = 0{,}6$$

Concluiremos que, em geral, para um ângulo agudo β de um triângulo retângulo:

$$sen(\beta) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa}$$

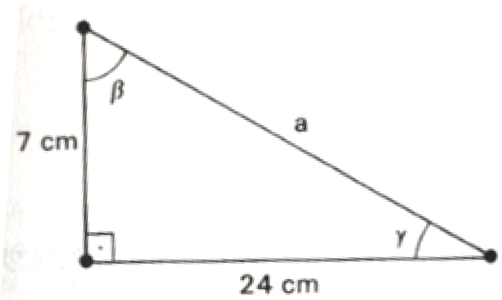
Então iremos propor o seguinte exercício de fixação:

Exercício

1. Calcule os senos dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem $7cm$ e $24cm$.

Resolução

Esperamos que os discentes consigam rascunhar a figura e utilizando-se do Teorema de Pitágoras e da relação trigonométrica calculem o valor do seno conforme abaixo.



Começamos calculando a hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 7^2 + 24^2$$

$$a^2 = 625$$

$$a = 25\ cm.$$

De acordo com a definição de seno:

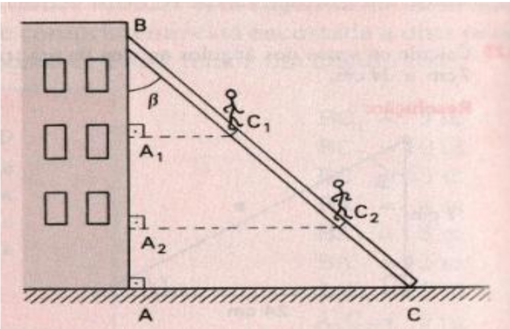
$$sen(\beta) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa} = \frac{24}{25} = 0{,}96$$

$$sen(\gamma) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \gamma}{hipotenusa} = \frac{7}{25} = 0{,}28$$

2. Cosseno

Voltando à situação da escada observaremos agora as razões do tipo cateto adjacente ao ângulo β sobre a hipotenusa nos triângulos BA_1C_1, BA_2C_2 e BAC.

Verificaremos, pela relação de Tales, que $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA}{BC} = 0{,}8$.



Distâncias

$BA_1 = 4\ m$

$BA_2 = 8\ m$

$BA = 12\ m$

$BC_1 = 5\ m$

$BC_2 = 10\ m$

$BC = 15\ m$

Denotaremos que este valor comum das razões é chamado de $cosseno\ de\ \beta$ e se representa por $\cos(\beta)$.

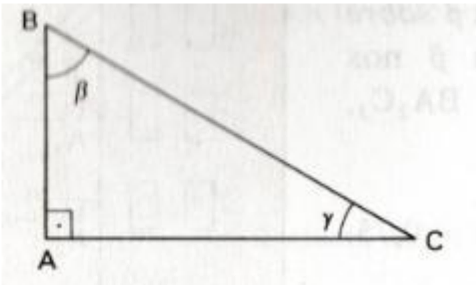
Analogamente a situação anterior, concluiremos que num triângulo retângulo:

$$\cos(\beta) = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa}$$

Então iremos expor o seguinte exercício de fixação.

Exercício

2. No triângulo retângulo abaixo, são dados $\cos(\gamma) = 0{,}75$ e $BC = 10\ cm$. Encontre as medidas dos lados do triângulo.



Resolução

Esperamos que os discentes, utilizando-se da relação trigonométrica do cosseno, calculem a medida de um dos catetos e pelo Teorema de Pitágoras encontrem a medida do último lado conforme abaixo.

$$\cos(\gamma) = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \gamma}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{10} = 0{,}75\ \rightarrow AC = 7{,}5\ cm$$

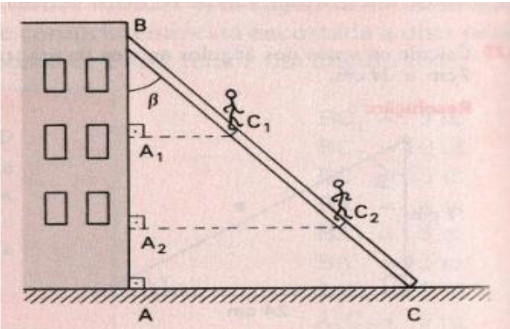
Pelo Teorema de Pitágoras:

$$(AB)^2 = (BC)^2 - (AC)^2 = 10^2 - 7{,}5^2 = 100 - 56{,}25 = 43{,}75$$

Portanto, $AB = \sqrt{43{,}75} \cong 6{,}6\ cm$.

3. Tangente

Voltando ainda à situação da escada, calculado as razões do tipo cateto oposto a β sobre cateto adjacente a β nos triângulos BA_1C_1, BA_2C_2 e BAC obtemos pela relação de Tales:



Distâncias

$BA_1 = 4\ m$

$BA_2 = 8\ m$

$BA = 12\ m$

$A_1C_1 = 3\ m$

$A_2C_2 = 6\ m$

$AC = 9\ m$

$$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{AC}{BA} = 0{,}75.$$

Denotaremos que este valor comum das razões é chamado de $tangente\ de\ \beta$ e se representa por $\text{tg}\ (\beta)$.

Analogamente a situação anterior, concluiremos que num triângulo retângulo:

$$\text{tg}(\beta) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \frac{sen(\beta)}{\cos(\beta)}$$

Então iremos expor o seguinte exercício de fixação.

Exercício

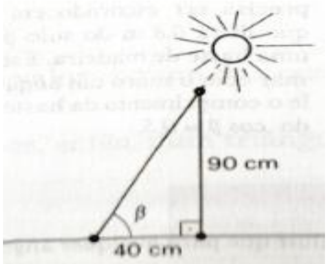
3. Num certo instante do dia, um cabo de vassoura de $90\ cm$ colocado verticalmente tem uma sombra de $40\ cm$.

a) Calcule a tangente do ângulo que um raio de sol forma com a horizontal nesse instante.

b) Qual é a altura de um edifício que nesse instante tem uma sombra de $16\ m$?

Resolução

Esperamos que os discentes utilizem-se do conceito de tangente apresentado e consigam resolver o exercício conforme abaixo.



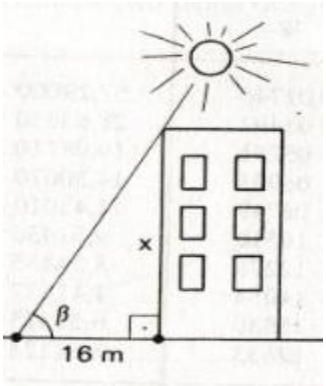
$$tg(\beta) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \frac{90}{40} = 2{,}25$$

Como os triângulos são semelhantes temos:

$$tg(\beta) = \frac{x}{16}$$

$$2{,}25 = \frac{x}{16}$$

$$x = 16.2{,}25 = 36\ m$$



Após essas situações-problema envolvendo as principais relações trigonométricas, iremos expor um quadro resumo dessas relações, conforme abaixo:

Relações Trigonométricas
$sen(\beta) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa}$
$\cos(\beta) = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa}$
$tg(\beta) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \frac{sen(\beta)}{\cos(\beta)}$

Denotaremos ainda que existem outras relações trigonométricas, as quais podem ser obtidas utilizando-se de ideias análogas às trabalhadas, conforme o quadro abaixo:

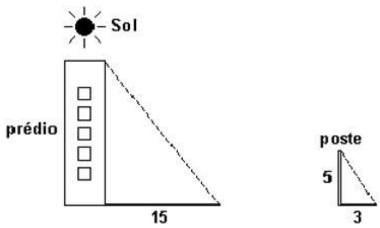
Relações trigonométricas
$\sec(\beta) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \frac{1}{\cos(\beta)}$
$\text{cossec}(\beta) = \frac{hipotenusa}{cateto\ oposto\ a\ \beta} = \frac{1}{sen(\beta)}$
$cotg(\beta) = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{cateto\ oposto\ a\ \beta} = \frac{\cos(\beta)}{sen(\beta)}$

ETAPA 3 (60 minutos)

Nesta etapa pretendemos propor alguns problemas que, geralmente, são abordados no Enem e vestibulares.

Exercícios

1. A sombra de um prédio, em um terreno plano, em uma determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m. A altura do prédio, em metros, é:



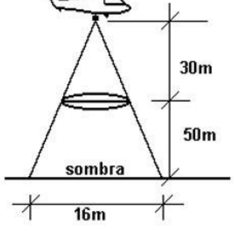
Resolução

Esperamos que os discentes percebam que é possível resolver o problema calculado a tangente do ângulo que o raio de sol forma com a horizontal, conforme abaixo.

$$tg(\beta) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \frac{5}{3} \cong 1{,}66$$

$$tg(\beta) = \frac{x}{15} \cong 1{,}66 \rightarrow x \cong 25\ m$$

2. Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura. Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco mede, em m, aproximadamente:



Resolução

Esperamos que os discentes se utilizem dos conceitos de semelhança de triângulos e o Teorema de Tales para solucionar o problema, conforme abaixo.

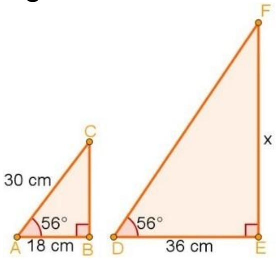
Seja x a medida do diâmetro do disco, então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{30}{x} = \frac{30+50}{16}$$

$$x = \frac{30.16}{80} = 6\,m$$

Como o raio é metade do diâmetro segue que $r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3\,m$.

3. Determine a medida x dos triângulos abaixo.



Resolução

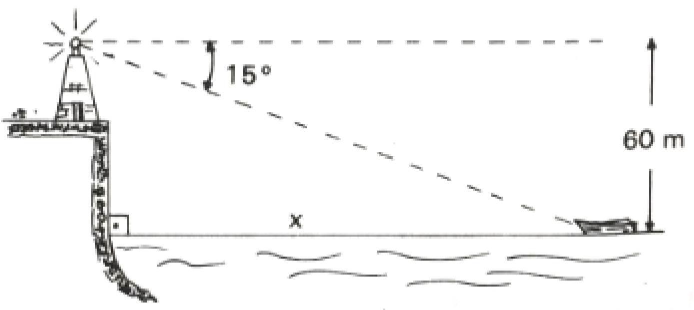
Esperamos que os discentes se utilizem dos conceitos trabalhados para resolver o problema conforme abaixo.

$$30^2 = 18^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 900 - 324 \rightarrow c = \sqrt{576} = 24$$

$$tg(56°) = \frac{cateto\ oposto\ a\ 56°}{cateto\ adjacente\ a\ 56°} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

$$tg(56°) = \frac{cateto\ oposto\ a\ 56°}{cateto\ adjacente\ a\ 56°} = \frac{x}{36} = \frac{4}{3} \rightarrow x = \frac{36.4}{3} = 48$$

4. Do alto de um farol, a $60\,m$ do nível do mar, avista-se um barco segundo um ângulo de depressão de $15°$ (figura). Qual o valor da distância x indicada na figura? Dado $\cos(75°) = 0{,}26$.



Resolução

Esperamos que os discentes relembrem do conceito de cosseno de um ângulo para resolver os problemas conforme abaixo.

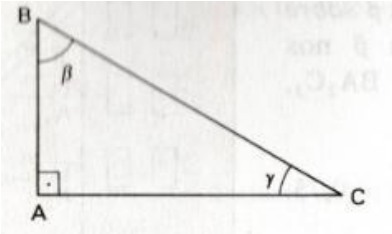
Como só temos a informação de $\cos(75°)$ e a altura devemos tomar o triângulo retângulo de baixo. Assim segue que:

$$\cos(75°) = \frac{cateto\ adjacente\ a\ 75°}{hipotenusa} = \frac{60}{a} = 0{,}26 \rightarrow a = \frac{60}{0{,}26} \cong 230{,}76$$

$$230^2 = 60^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{230^2 - 60^2} \cong 222\,m$$

Após a resolução dos exercícios pretendemos apresentar aos discentes uma relação a respeito dos conceitos abordados. Para tal, retomaremos com os alunos ao triângulo retângulo, conforme abaixo.

Dado um triângulo retângulo BAC, como na figura, temos:



$$sen(\beta) = \frac{b}{a} \quad sen(\gamma) = \frac{c}{a}$$

$$\cos(\beta) = \frac{c}{a} \quad \cos(\gamma) = \frac{b}{a}$$

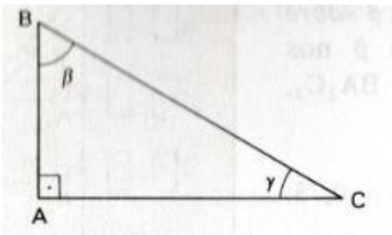
Indagaremos aos discentes a respeito da soma dos ângulos agudos $\beta + \gamma$, no intuito de que se lembrem de que como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$ e como no triângulo retângulo já temos um ângulo reto, ou seja, 90º então $\beta + \gamma = 90°$ e por consequência $\gamma = 90° - \beta$. Denotaremos ainda que dois ângulos assim, ou seja, dois ângulos que têm a soma das medidas igual a 90º são chamados *complementares.*

Em sequência, voltando ao triângulo retângulo, iremos expor que $\cos(\beta) = sen(\gamma)$ e que $\cos(\gamma) = sen(\beta)$. Logo $\cos(\beta) = sen(90° - \beta)$ ou equivalentemente $sen(\beta) = \cos\,(90° - \beta)$.

Então iremos propor o seguinte exercício:

Exercício

1. Dados os senos dos ângulos de um triângulo retângulo $sen(\beta) = 0{,}8$ e $sen(\gamma) = 0{,}6$, calcule os $cossenos$ e as $tangentes$ de β e de γ.



Resolução

Esperamos que os discentes relembrem que $sen(\beta) = \cos\,(\gamma)$ se β e γ são ângulos agudos de um triângulo retângulo. Assim teremos o seguinte resultado:

$$sen(\beta) = 0{,}8 = \cos\,(\gamma) \text{ e } sen(\gamma) = 0{,}6 = \cos\,(\beta)$$

Assim teremos que:

$$tg(\beta) = \frac{sen(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}$$

$$tg(\gamma) = \frac{sen(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$$

ETAPA 3 (60 minutos)

Nesta etapa, pretendemos apresentar aos discentes a lei dos senos e a lei dos cossenos. Para tal precisaremos, em alguns momentos, calcular senos e cossenos de ângulos obtusos – que não existem em um triângulo retângulo – então iremos expor algumas relações aos discentes, conforme abaixo:

	$30°$	$45°$	$60°$	$90º$
$\boldsymbol{Seno}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\boldsymbol{Cosseno}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é 180º;
- Senos de ângulos obtusos são exatamente iguais aos senos dos suplementos desses ângulos:

$$sen(x) = sen(180° - x)$$

- Cossenos de ângulos obtusos são opostos aos cossenos dos suplementos desses ângulos:

$$\cos(x) = -\cos\,(180° - x)$$

Iremos expor que essas relações serão trabalhadas novamente quando abordamos o círculo trigonométrico, mas por enquanto devemos aceitá-las como verdadeiras. Ainda apresentaremos exemplos, conforme abaixo.

Exemplos

1. $sen(120°)$

Resolução

O suplementar de $120°$ é $60°$, pois $120° + 60° = 180°$. Portanto $sen(120°) = sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos\,(120°)$

Resolução

O suplementar de $120°$ é $60°$, pois $120° + 60° = 180°$. Portanto $cos(120°) = -cos(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lei dos Senos

Vamos analisar a seguinte situação problema:

Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica numa fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância.

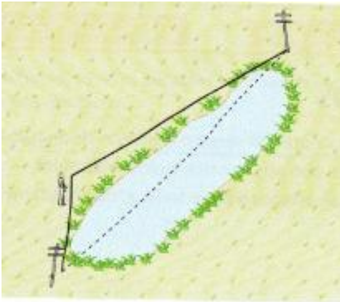


Figura 4: Ilustração da situação-problema

Fonte: Formato Comunicação Ltda.

Neste momento indagaremos aos discentes a respeito dos possíveis métodos para se realizar essa medição, então iremos apresentar a seguinte conclusão para a situação.

Um dos engenheiros posicionou-se em um local onde era possível visualizar os dois postes e medir a distância entre eles. Com um aparelho apropriado, ele mediu o ângulo entre a linha de visão dele e os postes, obtendo $120°$. Um auxiliar mediu a distância entre o engenheiro e o poste mais afastado e obteve $100m$; outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo do engenheiro e a linha entre os postes, obtendo $45°$. Com essas informações, o engenheiro sorriu. Ele já conseguia calcular a distância entre os postes.

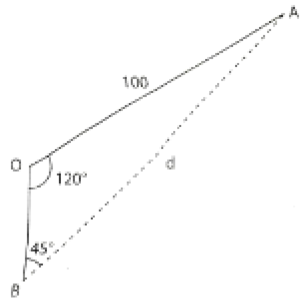
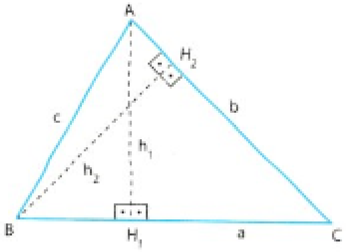


Figura 5: Ilustração matemática da situação-problema

Fonte: Formato Comunicação Ltda.

Iremos indicar que o triângulo AOB é obtusângulo e a resolução desse problema consiste em determinar a medida do lado $\overline{AB}$. Para esclarecer a resolução do engenheiro iremos obter a denominada lei dos senos, conforme abaixo.

Consideremos o ΔABC acutângulo e duas de suas alturas $\overline{AH_1}$ e $\overline{BH_2}$.



- No triângulo retângulo ACH_1, temos:

$$sen(\hat{C}) = \frac{h_1}{b} \rightarrow h_1 = b.sen(\hat{C})$$

- No triângulo retângulo ABH_1, temos:

$$sen(\hat{B}) = \frac{h_1}{c} \rightarrow h_1 = c.sen(\hat{B})$$

- Comparando as igualdades temos:

$$b.sen(\hat{C}) = c.sen(\hat{B})$$

$$\frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

- No triângulo retângulo BCH_2, temos:

$$sen(\hat{C}) = \frac{h_2}{a} \rightarrow h_2 = a.sen(\hat{C})$$

- No triângulo retângulo ABH_2, temos:

$$sen(\hat{A}) = \frac{h_2}{c} \rightarrow h_2 = c.sen(\hat{A})$$

- Comparando as igualdades temos:

$$a.sen(\hat{C}) = c.sen(\hat{A})$$

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

Disso segue a seguinte definição:

Definição

Em qualquer triângulo retângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja:

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

Com essa definição em mãos iremos expor a resolução da situação-problema exposta. Pela lei dos senos temos:

$$\frac{100}{sen(45°)} = \frac{d}{sen(120°)}$$

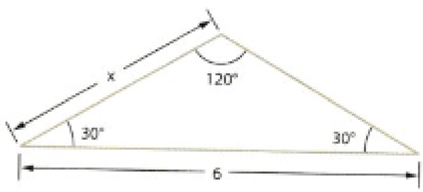
$$\frac{100}{sen(45°)} = \frac{d}{sen(180°-120º)} \Rightarrow \frac{100}{sen(45°)} = \frac{d}{sen(60°)}$$

$$\frac{100}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \sqrt{2}.d = \sqrt{3}.100 \rightarrow d = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{6} \approx 122{,}47m$$

Em sequência iremos propor o seguinte exercício:

Exercício

1. Em um triângulo isósceles, a base mede $6cm$ e o ângulo oposto à base mede $120°$. Calcule a medida dos lados congruentes do triângulo.



Resolução

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{6}{sen(120°)} = \frac{x}{sen(30°)} \rightarrow \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{3}.x = 6 \rightarrow x = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}cm$$

Lei dos cossenos

Voltando ao nosso engenheiro e seu problema em medir a distância entre os postes. Agora se o engenheiro tivesse pedido ao seu auxiliar que medisse a distância do local onde ele estava até o poste mais próximo, sem medir o ângulo de $45°$ como feito anteriormente. Assim, além do valor do ângulo obtuso de $120°$ que o engenheiro já havia medido e a distância de $100m$ até o poste mais afastado, o engenheiro teria obtido a nova distância, de $36{,}6m$, entre o poste mais próximo a ele.

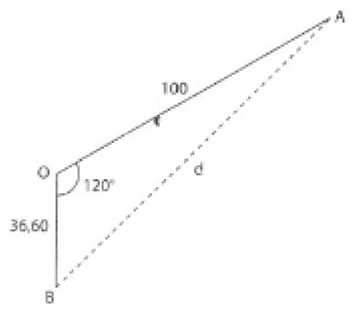


Figura 6: Ilustração matemática da situação-problema

Fonte: Formato Comunicação Ltda.

Neste momento indagaremos aos discentes a respeito da possibilidade de resolução do problema com a novação situação proposta.

Então iremos expor que problema consiste em encontrar a medida de um dos lados do triângulo conhecendo o valor da medida dos outros dois lados a medida do ângulo oposto ao lado cuja medida queremos encontrar. Para esclarecer a resolução iremos obter a denominada lei dos cossenos, conforme abaixo.

Consideremos o ΔABC acutângulo e a altura $\overline{BH}$, obtemos os triângulos retângulos ABH e CBH.

- No ΔABH, temos:

$$\begin{cases} \cos(\hat{A}) = \dfrac{\overline{AH}}{c} \rightarrow \overline{AH} = c.\cos(\hat{A}) \\ c^2 = h^2 + \overline{AH}^2 \rightarrow h^2 = c^2 - \overline{AH}^2 \\ h^2 = c^2 - c.\cos(\hat{A}) \end{cases}$$

- No ΔCBH, temos:

$$a^2 = h^2 + \overline{CH}^2 \rightarrow a^2 = h^2 + (b - \overline{AH})^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \left(b - c.\cos(\hat{A})\right)^2$$
$$h^2 = a^2 - b^2 + 2.b.c.\cos(\hat{A}) - c^2.\cos(\hat{A})$$

- Comparando as igualdades temos:

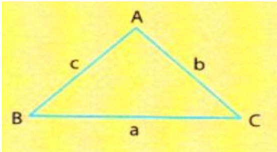
$$a^2 - b^2 + 2.b.c.\cos(\hat{A}) - c^2.\cos(\hat{A}) = c^2 - c.\cos(\hat{A}) \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$$

Daí segue a definição:

Definição

Em qualquer triângulo ABC, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam, ou seja:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos(\hat{B})$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\hat{C})$



Com essa definição em mãos iremos expor a resolução da situação-problema exposta. Pela lei dos cossenos temos:

$$d^2 = 100^2 + (36{,}6)^2 - 2.100.36{,}6.\cos(120°)$$
$$d^2 = 100^2 + (36{,}6)^2 - 2.100.36{,}6.(-\cos(180 - 120°))$$
$$d^2 = 100^2 + (36{,}6)^2 - 2.100.36{,}6.(-\cos(60°))$$
$$d^2 = 15000 \rightarrow d = \sqrt{15000} = 50\sqrt{6} \approx 122{,}47m$$

Iremos observar que esse valor é o mesmo encontrado pela lei dos senos, conforme já esperado.

Em sequência iremos propor o seguinte exercício:

Exercício

1. O ângulo agudo de um losango mede $20°$ e seus lados medem $5cm$. Sabendo que $\cos(20°) \approx 0{,}94$, calcule as medidas das diagonais menor e maior do losango.

Resolução

Pela lei dos cossenos temos:

- Diagonal menor:

$$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2.5.5.\cos(20°) = 25 + 25 - 50.0{,}94 = 50 - 47 = 3$$
$$x = \sqrt{3} \approx 1{,}7cm$$

- Diagonal maior:

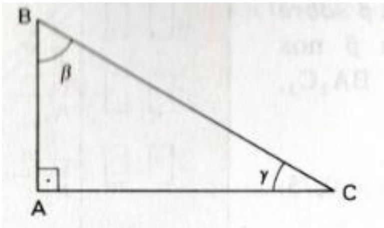
$$y^2 = 5^2 + 5^2 - 2.5.5.\cos(160°) = 25 + 25 - 50.(-\cos(180° - 160°))$$
$$y^2 = 50 - 50.(-0{,}94) = 50 + 47 = 97$$
$$y = \sqrt{97} \approx 9{,}8cm$$

Por fim iremos propor os seguintes problemas extraclasse:

1. Calcule os senos dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem $8cm$ e $6cm$.

2. Um triângulo equilátero tem 18cm de altura. Determine a medida aproximada de seus lados.

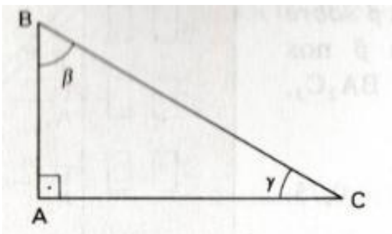
3. No triângulo retângulo abaixo, são dados $\cos(\gamma) = 0{,}6$ e $BC = 12\ cm$. Encontre as medidas dos lados do triângulo.



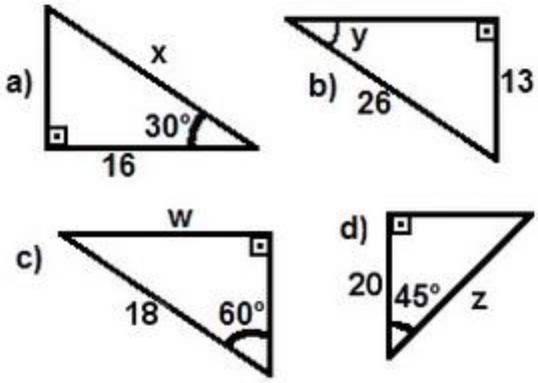
4. Uma escada de 8m de comprimento está encostada em uma parede. A distância entre o pé da escada e a parede é de 4m. Determine o ângulo formado entre a escada e a parede.

5. Um poste na posição vertical tem sua sombra projetada numa rua horizontal. A sombra tem 12m. Se a altura do poste é de $4\sqrt{3}$m, então qual é a inclinação dos raios solares em relação à rua horizontal?

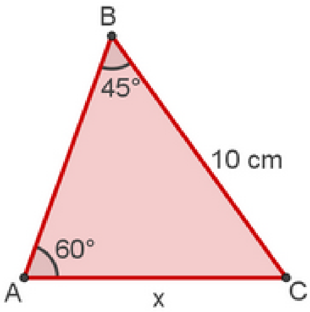
6. Dados os cossenos dos ângulos de um triângulo retângulo $cos(\beta) = 0{,}8$ e $cos(\gamma) = 0{,}6$, calcule os $senos$ e as $tangentes$ de β e de γ.



7. Determine os valores de **x**, **y**, **w** e **z** em cada caso:



8. No triângulo a seguir, determine a medida do lado AC, tendo em vista as medidas presentes nele. Use $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.



REFERÊNCIAS

CALSSAVARA, C. R. (Coord.). **PROMAT.** Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática–Primeira Fase e Segunda Fase. Projeto de Ensino. Cascavel: UNIOESTE/CCET/Colegiado de Matemática, 1º semestre de 2011. (Documento não publicado)

IEZZI, G. **Matemática:** 1ª série, 2° grau / Gelson Iezzi [et al.]. -11. Ed. ver. São Paulo: Atual, 1990.

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 20 maio 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 2. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 1. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

2.4.1.1 Relatório - 17.08.2019

No sábado, dia 17 de Agosto de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o segundo encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar semelhança de triângulos e relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Para contextualizarmos o assunto a ser abordado, inicialmente, realizamos uma atividade prática, em que foram distribuídos triângulos retângulos aos discentes e os mesmos deveriam aferir as suas medidas de comprimento e ângulos. No decorrer da atividade fizemos alguns questionamentos aos discentes como:

- O que os triângulos têm em comum?
- Estes triângulos são semelhantes? Seus ângulos são iguais?
- Ao medirmos os lados dos triângulos com uma régua e dividirmos seus lados equivalentes, esta medida é diferente dependendo do tamanho do triângulo?
- O que podemos concluir com isto?

A partir destes questionamentos conseguimos que os discentes observassem que os triângulos possuíam ângulos congruentes e medidas de comprimento proporcionais e com isto expôs a definição formal de semelhança de triângulos e também retomamos alguns conceitos básicos como classificação dos triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados. Além disso, revisamos o teorema de Pitágoras e Tales no intuito de prepará-los para as situações-problema que seriam propostas posteriormente.

Em sequência, propomos uma situação-problema, envolvendo um prédio e uma escada apoiada no mesmo, com o intuito de definir as relações de seno, cosseno e tangente. A partir desta situação denotamos utilizando o teorema de tales que as razões obtidas eram iguais e representavam o valor da relação em cada caso. Em conjunto as explanações propomos alguns problemas-exemplo que foram solucionados junto aos discentes para fixação do conceito apresentado.

Após o término das explicações e sanadas as dúvidas dos discentes expomos um quadro resumo das relações apresentadas e outras relações que podem ser obtidas a partir destas, conforme segue:

Relações Trigonométricas
$sen(\beta) = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa}$
$\cos(\beta) = \dfrac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa}$
$tg(\beta) = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \dfrac{sen(\beta)}{\cos(\beta)}$

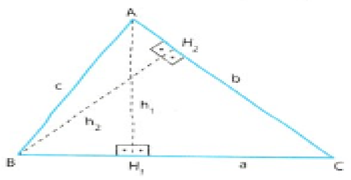
Relações trigonométricas
$\sec(\beta) = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \dfrac{1}{\cos(\beta)}$
$\text{cossec}(\beta) = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ oposto\ a\ \beta} = \dfrac{1}{sen(\beta)}$
$cotg(\beta) = \dfrac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{cateto\ oposto\ a\ \beta} = \dfrac{\cos(\beta)}{sen(\beta)}$

Por conseguinte, propomos aos discentes algumas situações-problema envolvendo os conceitos abordados. Na resolução dos exercícios propostos percebemos que as maiores dúvidas dos discentes foram com relação a interpretação do problema, dado que alguns não conseguiam distinguir quando utilizar a relação de Pitágoras ou a Tales. Além disso, alguns não identificavam quando haviam finalizado o problema, ou seja, não conseguiam fixar o objeto a ser encontrado para solucionar o problema.

Em sequência, retomamos o conceito de complementar de um ângulo e de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é equivalente a $180°$. E voltando ao triângulo retângulo, expomos que $\cos(\beta) = sen(\gamma)$ e que $\cos(\gamma) = sen(\beta)$. Ou seja, $\cos(\beta) = sen(90° - \beta)$ ou equivalentemente $sen(\beta) = \cos(90° - \beta)$ e propomos um exercício de fixação envolvendo este tópico.

Em seguida, no intuito de trabalhar com triângulos obtusos apresentamos aos discentes as expressões que permitem calcular as relações trigonométricas para ângulos obtusos as quais são $sen(x) = sen(180° - x)$ e $\cos(x) = -\cos(180° - x)$.

Por fim, propomos aos discentes uma situação-problema no intuito de abordar o conceito de lei dos senos e lei dos cossenos. Após apresentar a situação, questionamos os discentes sobre as possíveis resoluções e então denotamos que poderíamos utilizar a ideia de proporcionalidade entre a medida dos lados e os ângulos opostos a estes. Para tal, expomos na lousa uma breve demonstração para obtenção da relação que representa a chama lei dos senos, conforme segue: Consideramos o ΔABC acutângulo e duas de suas alturas $\overline{AH_1}$ e $\overline{BH_2}$.



- No triângulo retângulo ACH_1, temos:

$$sen(\hat{C}) = \frac{h_1}{b} \rightarrow h_1 = b.sen(\hat{C})$$

- No triângulo retângulo ABH_1, temos:

$$sen(\hat{B}) = \frac{h_1}{c} \rightarrow h_1 = c.sen(\hat{B})$$

- Comparando as igualdades obtemos:

$$b.sen(\hat{C}) = c.sen(\hat{B})$$
$$\frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

- No triângulo retângulo BCH_2, temos:

$$sen(\hat{C}) = \frac{h_2}{a} \rightarrow h_2 = a.sen(\hat{C})$$

- No triângulo retângulo ABH_2, temos:

$$sen(\hat{A}) = \frac{h_2}{c} \rightarrow h_2 = c.sen(\widehat{A})$$

- Comparando as igualdade obtemos:

$$a.sen(\hat{C}) = c.sen(\hat{A})$$
$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

Infelizmente, por falta de tempo, não conseguimos demonstrar de mesmo modo a relação que representa a denominada lei dos cossenos, mas expomos a expressão e a explicamos brevemente. Então foram propostos exercícios de fixação envolvendo estes conceitos.

2.4.2 Plano de aula - 24.08.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves

Lucas Campos de Araújo

Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de arcos e ângulos na circunferência trigonométrica, unidades de medida de arcos, congruência de arcos, arcos trigonométricos e a capacidade de resolver problemas que envolvam esses conceitos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com a circunferência trigonométrica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer um arco de circunferência;
- Relacionar a medida do arco com o ângulo que o determina;
- Identificar arcos côngruos;
- Diferenciar as unidades de medida de arcos ou ângulos;
- Comparar arcos de circunferência;
- Resolver problemas que envolvam arcos de circunferência.

Conteúdo: Circunferência Trigonométrica.

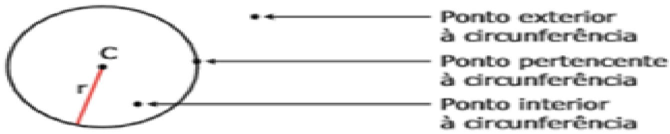
Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

ETAPA 1 (30 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar o conceito de arcos de circunferência e ângulos. Para tal, inicialmente, diferenciaremos o conceito de círculo e circunferência utilizando-se das definições abaixo.

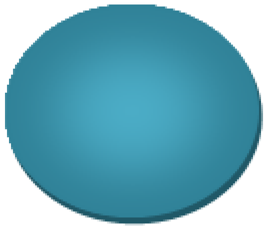
Definição

Sendo $\boldsymbol{C}$ um ponto de um plano α e r uma medida positiva, chama-se circunferência de centro $\boldsymbol{C}$ e raio $\boldsymbol{r}$ o conjunto dos pontos do plano α que distam de $\boldsymbol{C}$ a medida $\boldsymbol{r}$.



Definição

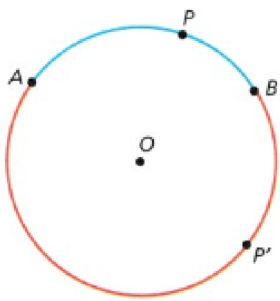
Denomina-se de círculo a figura formada pela circunferência com a reunião de seus pontos interiores.



Em sequência introduziremos a noção de arco de circunferência, considerando dois pontos quaisquer, A e B, em uma circunferência.

Iremos expor que esses dois pontos dividem a circunferência em duas partes. E, cada uma dessas partes, incluindo os pontos A e B, denomina-se **arco da circunferência**, conforme abaixo.

- $\widehat{APB}$: arco de extremidades A e B, contendo P;
- $\widehat{AP'B}$: arco de extremidades A e B, contendo P';

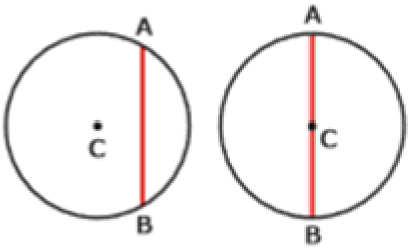


Ainda, como complementação, denotaremos o conceito de corda de circunferência, conforme abaixo.

Definição

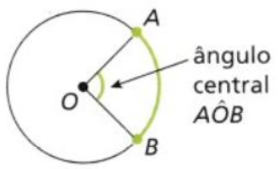
Dada uma circunferência de centro C e dois de seus pontos, A e B, temos:

- O segmento de reta $\overline{\boldsymbol{AB}}$ é chamado de corda;
- Uma corda que passa pelo centro $\boldsymbol{C}$ da circunferência é chamada de diâmetro.



Então denotaremos que um arco de circunferência apresenta duas formas de medida: a angular e a linear. Para tal retomaremos a noção de ângulo central de uma circunferência, conforme abaixo.

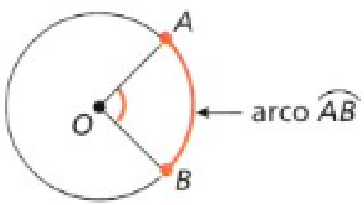
- Em uma circunferência o ângulo central é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.



Definição

A **medida angular** do arco é igual à medida do ângulo central correspondente.

Para exemplificar a situação tomaremos o arco $\widehat{AB}$ como na figura abaixo, destacando que o ângulo $A\hat{O}B$é o ângulo central correspondente a esse arco. A medida do ângulo $A\hat{O}B$é igual à **medida angular** do arco $\widehat{AB}$.



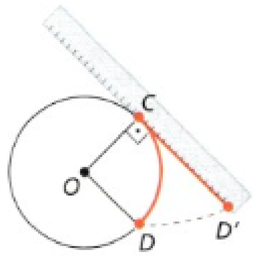
Vamos representar a medida do ângulo e do arco da seguinte forma:

- $med(A\hat{O}B)$: medida do ângulo $A\hat{O}B$;
- $med(\widehat{AB})$: medida angular do arco $\widehat{AB}$.

Definição

A **medida linear** de um arco é a medida de seu comprimento.

Para exemplificar, consideraremos o arco $\widehat{CD}$ destacado na figura abaixo, e explicaremos que se pudéssemos "esticar" esse arco, seria possível medir seu comprimento com uma régua, ou seja, o comprimento de sua projeção.



Destacaremos ainda, que quando nos referimos à medida do arco, estamos nos referindo à sua medida angular que pode ser medida em grau ou radiano. E quando nos referimos ao seu comprimento, consideramos sua medida linear e, nesse caso, usamos unidades lineares de medida, como metro, o centímetro, o milímetro etc.

ETAPA 2 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar as unidades de medida angular grau e radiano. Para tal, descreveremos ambas separadamente e depois faremos sua relação.

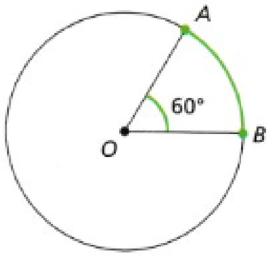
O grau

Iremos reforçar que é uma unidade de medida de arco, em que:

- $1°$ (um grau) representa a medida angular de cada arco de uma circunferência que foi dividida em 360 arcos de comprimentos iguais. Logo somando todos esses arcos teríamos uma circunferência de $360°$ (trezentos e sessenta graus).

Ainda retomaremos a definição de medida angular para afirma que:

- $med(\widehat{AB}) = 60° = med(A\hat{O}B)$



Faremos também uma analogia com os ponteiros de um relógio, expondo assim que o grau tem submúltiplos. Por exemplo:

- $1'$ (1 minuto) $= \frac{1}{60} do\ grau$;
- $1''$ (1 segundo) $= \frac{1}{60} do\ minuto$;

Para esta analogia descreveremos que uma hora, ou seja, uma volta completa do ponteiro maior do relógio equivale a 60 minutos, mas como uma circunferência possui um ângulo central de $360°$ utilizando a regra de proporcionalidade temos:

$$\frac{1\ min}{60\ min} = \frac{x°}{360°}$$
$$x = 6°$$

Ou seja, cada minuto representa $6°$ e utilizando o mesmo raciocínio temos que cada hora, como o relógio é divido em 12 partes ou ainda como o espaçamento entre as doze partes é igual e equivalente a 5 minutos, temos que cada hora equivale a $30°$.

Denotaremos ainda que podemos relacionar o comprimento do arco com sua medida em grau. Para tal, retomaremos que o comprimento de uma circunferência pode ser calculado pela expressão $C = 2\pi r$, em que r representa o raio da circunferência, e considerando um arco de circunferência qualquer, de comprimento ℓ, temos pela regra de proporcionalidade:

$$\frac{2.\pi.r}{\ell} = \frac{360}{\alpha}$$
$$\ell = \frac{2.\pi.r.\alpha}{360}$$

Para tonar mais compreensível o resultado obtido iremos expor o seguinte exemplo.

Exemplo

1. Calcule o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB} = 45°$ de uma circunferência de $8cm$ de raio. Utilizando a regra de proporcionalidade temos:

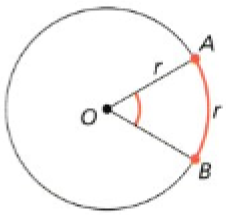
Resolução

$$\frac{2.\pi.8}{\ell} = \frac{360}{45} \Rightarrow \ell = \frac{2.\pi.8.45}{360} = \frac{2.\pi.360}{360} = 2\pi \approx 6{,}28$$

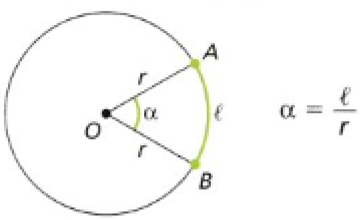
O Radiano

Iremos reforçar que é uma unidade de medida de arco, em que:

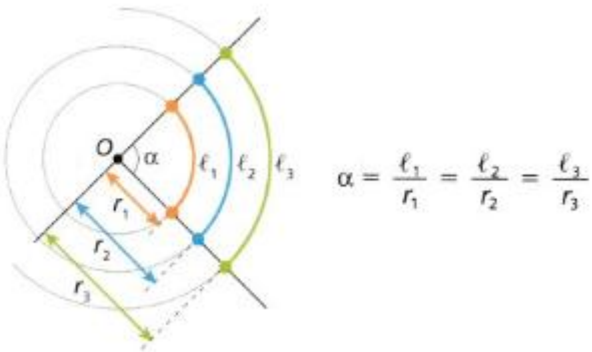
- Considerando uma circunferência de centro O e raio r e um arco $\widehat{AB}$ de comprimento r sobre essa circunferência, a medida do arco $\widehat{AB}$ é igual a 1 radiano, ou seja, $med(\widehat{AB}) = 1\,rad$. A medida do ângulo central correspondente $(A\hat{O}B)$ também é $1\,rad$, isto é, $med(A\hat{O}B) = 1\,rad$.



Explicaremos então que dado um ângulo central de medida α, correspondente a um arco $\widehat{AB}$ qualquer sobre uma circunferência de raio r, para determinar a medida α, em radiano, é necessário verificar quantos arcos de comprimento r "cabem" no arco $\widehat{AB}$.



Ainda ressaltaremos que para arcos determinados por um mesmo ângulo central, a razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência que o contém é constante e representa a medida α do ângulo, em radiano, que é igual à medida do arco correspondente.



Para tonar mais compreensível o resultado apresentado iremos expor o seguinte exemplo.

Exemplo

1. Seja um arco $\widehat{AB}$ de $8cm$ de comprimento sobre uma circunferência de $4cm$ de raio. Calcular a medida, em radiano, do ângulo central correspondente ao arco $\widehat{AB}$.

Resolução

Utilizando a relação temos $\alpha = \frac{8}{4} = 2\,rad$.

Ainda nesse exemplo denotaremos que podemos expressar a medida de uma circunferência 360° em radianos utilizando a regra de proporcionalidade, conforme abaixo.

$$\frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{c}$$

$$c = \frac{2\pi r}{r} \Rightarrow c = 2\pi$$

Assim concluiremos que a medida de uma circunferência em radianos é 2π.

Relação entre grau e radiano

Iremos retomar que uma circunferência mede $360°$ ou $2\pi\,rad$, assim um ângulo raso, que determinar uma semicircunferência, corresponde a um arco que mede $180°$ ou $\pi\,rad$.

Assim estabeleceremos que para se calcular uma das medidas em relação a outra podemos nos valer da regra de proporcionalidade, conforme abaixo:

- Caso em que se conhece a medida em grau:

$$\frac{180°}{medida\ conhecida} = \frac{\pi}{x}$$

- Caso em que se conhece a medida em radiano:

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi}{medida\ conhecida}$$

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Para esclarecer a relação exibida iremos expor os seguintes exemplos.

Exemplo

1. Calcule a medida de um arco, em grau, dado que mede $\frac{\pi}{6}\ rad$.

Resolução

Pela regra de proporcionalidade temos,

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow\ x = \frac{180.\frac{\pi}{6}}{\pi} \Rightarrow x = 30°$$

2. Calcule a medida de um arco, em radiano, dado que mede $200°$.

Resolução

Pela regra de proporcionalidade temos,

$$\frac{180°}{200°} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow\ x = \frac{200.\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{10\pi}{9}$$

3. Calcule a medida, em grau e radiano, de um ângulo correspondente a um arco de aproximadamente $12{,}56\ cm$ de comprimento.

Resolução

Para solucionar esse exercício utilizaremos a regra de proporcionalidade e a relação de comprimento de arco $\ell = 2\pi r$.

- Em grau:

$$\frac{12{,}56}{2.\pi.12} = \frac{x}{360}$$

$$x \approx \frac{360.12{,}56}{2.3{,}14.12} \Rightarrow x \approx 60°$$

- Em radiano:

$$x \approx \frac{12{,}56}{12} \Rightarrow x \approx 1{,}047$$

Ou ainda, como $12{,}56 \approx 4\pi$ temos:

$$x \approx \frac{12{,}56}{12} \Rightarrow x \approx \frac{4\pi}{12} \Rightarrow x \approx \frac{\pi}{3}$$

ETAPA 3 (30 minutos)

Nesta etapa iremos propor os seguintes exercícios envolvendo os conceitos abordados até o momento.

Exercícios

1. Determine a medida, em graus, do menor ângulo central formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando $9h\ 30min$.

Resolução

Esperamos que os discentes percebam que em qualquer relógio o ponteiro das horas percorre $30°$ em exatamente $1h$, como no caso foram $30min$ então pela regra de proporcionalidade temos:

$$\frac{30°}{x} = \frac{1h}{\frac{1}{2}h} \Rightarrow x = 15°$$

E como a distância do ponteiro dos minutos que está no número 6 até o número 9 é de $15\ min$ e cada minuto equivale a $6°$ pela regra de proporcionalidade temos:

$$\frac{15min}{1min} = \frac{x}{6°} \Rightarrow x = 90°$$

Agora somando os valores temos que $90° + 15° = 105°$.

2. Determine, em grau e radiano, a medida do arco que representa $\frac{2}{5}$ da circunferência.

Resolução

Esperamos que os discentes lembrem que a medida do ângulo central, correspondente ao arco, é igual a medida angular do arco. Como temos um arco de $\frac{2}{5}$ da circunferência e uma circunferência completa tem um ângulo central de $360°$, pela regra de proporcionalidade temos:

$$\frac{\frac{2}{5}}{1} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = 144°$$

E esperamos que lembrem da relação entre grau e radiano conforme abaixo:

$$\frac{180°}{144°} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{5}$$

3. Um pêndulo oscila e forma, entre suas posições extremas, um ângulo de $70°$. Sabendo que esse pêndulo tem $25cm$ de comprimento, calcule o comprimento do arco que ele descreve. Qual seria o comprimento do arco se o pêndulo tivesse $20cm$ de comprimento?

Resolução

Esperamos que os discentes lembrem da relação $\ell = \frac{2.\pi.r.\alpha}{360}$, assim terão os seguintes resultados:

$$\ell_{25} = \frac{2.\pi.25.70}{360} \approx 30{,}5cm$$

$$\ell_{20} = \frac{2.\pi.20.70}{360} \approx 24{,}4cm$$

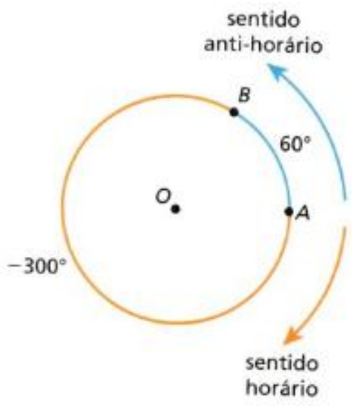
ETAPA 4 (30 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar a circunferência trigonométrica, para tal estabeleceremos algumas noções preliminares, conforme abaixo.

Destacaremos inicialmente que podemos percorrer uma circunferência em dois sentidos: no sentido horário e no sentido anti-horário. Assim adotando o sentido anti-horário para as medidas **positivas**, fica determinado que o sentido oposto horário, fornece medidas **negativas**.

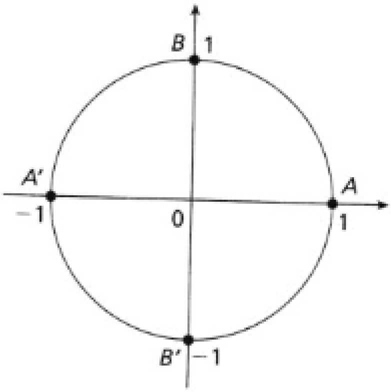
Exemplificaremos em uma circunferência de centro O e dois pontos dela A e B, sendo o ponto A o ponto de partida, conforme abaixo.

- Sentido anti-horário: $med(\widehat{AB}) = 60°$
- Sentido horário: $med(\widehat{AB}) = -300°$



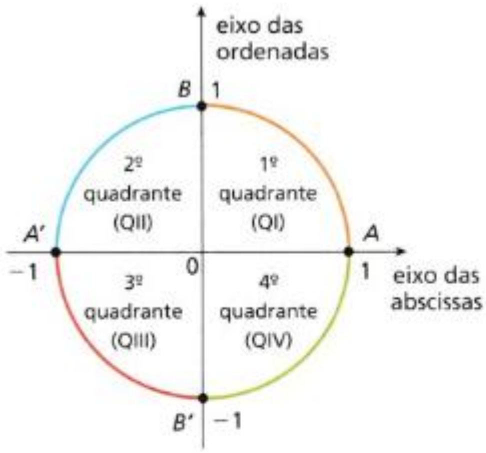
Em sequência, Iremos expor que o **círculo trigonométrico** é uma circunferência **centrada na origem** de um plano cartesiano e de **raio de 1 unidade**.

Indagaremos aos discentes a respeito do valor do ângulo central, esperando que relembrem que a medida deste ângulo é de 360º. E que o ponto A(1,0) é a **origem de todos os arcos**, isto é, o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto P qualquer para determinar o arco $\widehat{AP}$ (P é a extremidade do arco). Adotando o sentido anti-horário como positivo, associaremos a cada ponto P da circunferência, a medida de $\widehat{AP}$ tal que $0\,rad \leq med(\widehat{AP}) \leq 2\pi\,rad$, ou $0° \leq med(\widehat{AP}) \leq 360°$.



- $med(\widehat{AB}) = 90°$ ou $\frac{\pi}{2}\,rad$;
- $med(\widehat{AA'}) = 180°$ ou $\pi\,rad$;
- $med(\widehat{AB'}) = 270°$ ou $\frac{3\pi}{2}\,rad$;
- $med(\widehat{AA}) = 360°$ ou $2\pi\,rad$.

Definiremos ainda, que a circunferência trigonométrica é divida em **quatro quadrantes** $(QI, QII, QIII, QIV)$, pelo eixo das abscissas (eixo $\overleftrightarrow{A'A}$) e o eixo das ordenas (eixo $\overleftrightarrow{B'B}$), conforme a figura abaixo.

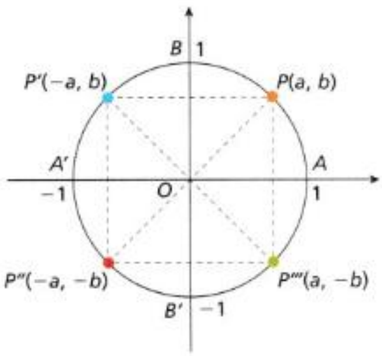


Ainda denotaremos que, dado um arco $\widehat{AP}$, temos:

Quadrante	Medida em grau	Medida em radiano
$P \in QI$	$0° \leq med(\widehat{AP}) \leq 90°$	$0\, rad \leq med(\widehat{AP}) \leq \frac{\pi}{2} rad$
$P \in QII$	$90° \leq med(\widehat{AP}) \leq 180°$	$\frac{\pi}{2}\, rad \leq med(\widehat{AP}) \leq \pi\, rad$
$P \in QIII$	$180° \leq med(\widehat{AP}) \leq 270°$	$\pi\, rad \leq med(\widehat{AP}) \leq \frac{3\pi}{2} rad$
$P \in QIV$	$270° \leq med(\widehat{AP}) \leq 360°$	$\frac{3\pi}{2}\, rad \leq med(\widehat{AP}) \leq 2\pi\, rad$

Posteriormente apresentaremos três tipos de simetrias na circunferência trigonométrica: em relação ao eixo das ordenadas, em relação à origem O e em relação ao eixo das abscissas, conforme abaixo.

Dado o arco $\widehat{AP}$, com medida $med(\widehat{AP}) = \alpha\, rad$, conforme a figura abaixo temos.



- P e P' são simétricos em relação ao eixo das ordenadas (têm abscissas opostas e ordenadas iguais); $med(\widehat{AP'}) = (\pi - \alpha)\, rad$;
- P e P'' são simétricos em relação à origem O (têm abscissas opostas e ordenadas opostas); $med(\widehat{AP''}) = (\pi + \alpha)\, rad$;
- P e P''' são simétricos em relação ao eixo das abscissas (têm abscissas iguais e ordenadas opostas); $med(\widehat{AP'''}) = (2\pi - \alpha)\, rad$.

Definição

Denomina-se de **arcos simétricos** aos arcos em que suas extremidades apresentam uma das simetrias apresentadas anteriormente.

Para esclarecer o conceito apresentado iremos expor um exemplo na lousa.

Exemplo

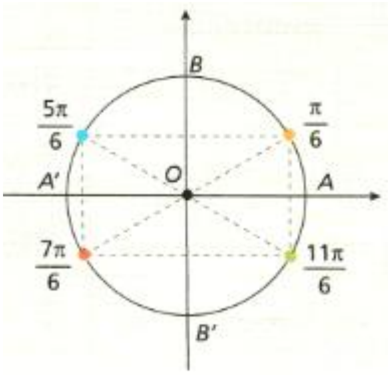
1. Determinar a medida dos arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}\ rad$ em relação ao eixo das ordenadas, ao eixo das abscissas e à origem O.

Resolução

Segundo as relações apresentadas anteriormente, temos que os arcos simétricos ao arco $\frac{\pi}{6}\ rad$ medem:

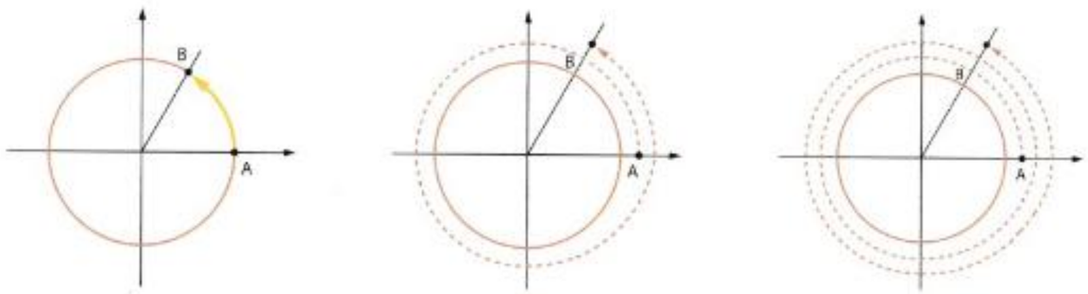
- Em relação ao eixo das ordenadas: $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) rad = \frac{5\pi}{6} rad$;
- Em relação ao eixo das abscissas: $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) rad = \frac{11\pi}{6}\ rad$;
- Em relação à origem O: $\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) rad = \frac{7\pi}{6}\ rad$.

Além das expressões iremos expor também na circunferência conforme abaixo.



Em sequência apresentaremos o conceito de **congruência entre arcos de circunferência**. Para tal, diremos que toda vez que o ponto da circunferência, final do arco iniciado em $(1{,}0)$, é o mesmo para dois arcos diferentes (por exemplo, 0 e 2π), chamamos esses arcos de côngruos ou congruentes.

Denotaremos ainda que todos os arcos côngruos diferem entre si de um múltiplo de 2π, que o comprimento de cada volta, conforme abaixo.



Ao número $\frac{\pi}{3}$ está associado o ponto **B**. Ao número $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ também está associado o ponto **B**. Ao número $\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$ está associado o mesmo ponto **B**.

E supondo que houvessem k voltas inteiras iremos expor que o número associado a extremidade do arco, na imagem o ponto B do arco AB, seria escrito assim:

$$\frac{\pi}{3} + k.2\pi \text{ ou } 60° + k.360°\text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

A essa expressão denotaremos de expressão geral de arcos côngruos a $\widehat{AB}$. E para um arco qualquer teremos a seguinte expressão:

$$\alpha + k.2\pi \text{ ou } \alpha + k.360°\text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

Para reforçar iremos retomar que:

Definição

Dois arcos são côngruos quando suas medidas diferem de um múltiplo de $2\pi\ rad$ ou $360°$.

Para esclarecer o conceito apresentado iremos expor dois exemplos na lousa.

Exemplo

1. Qual é o menor arco não negativo côngruo ao arco de $1320°$, ou seja, qual é a 1^{a} determinação do arco $1320°$?

Resolução

Pelo exposto temos que $\alpha + k.360° = 1320°$, mas como $\frac{1320}{360} = 3.360 + 240$ temos que $\alpha = 240°$ e $k = 3$. Portanto o menor arco não negativo é $240°$.

2. Qual é o menor arco não negativo côngruo ao arco de $-750°$, ou seja, qual é a primeira determinação do arco de $-750°$?

Resolução

Pelo exposto temos que $\alpha + k.360° = -750°$, mas como $\frac{-750}{360} = (-2).360 - 30 = (-2).360 + (330 - 360)$ temos que $\alpha = 330°$ e $k = 2$. Portanto o menor arco não negativo é $330°$.

ETAPA 5 (30 minutos)

Nesta etapa iremos propor os seguintes exercícios envolvendo os conceitos abordados até o momento.

Exercícios

1. Calcule a primeira determinação positiva do ângulo 1115º e o número de voltas completas em relação à circunferência trigonométrica. Depois, escreva a expressão geral dos arcos côngruos.

Resolução

Esperamos que os discentes lembrem-se do exemplo exposto, então concluam que $\alpha + k.360° = 1115°$, mas como $\frac{1115}{360} = 3.360 + 35$ então $\alpha = 35°$ e $k = 3$. Logo o número de voltas completas na circunferência foram três.

E colocando as informações na expressão geral de arcos côngruos temos $35° + k.360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

2. Determine o quadrante em que se encontra a extremidade de um arco de $960°$.

Resolução

Esperamos que os discentes utilizem a expressão geral de arcos para encontrar a primeira determinação positiva deste arco e que se lembrem de que a circunferência trigonométrica é dividida em 4 quadrantes $(0° - 90°; 90° - 180°; 180° - 270°; 270° - 360)$, conforme abaixo.

$$\alpha + k.360 = 960 \Rightarrow \frac{960}{360} = 2.360 + 240 \Rightarrow \alpha = 240°$$

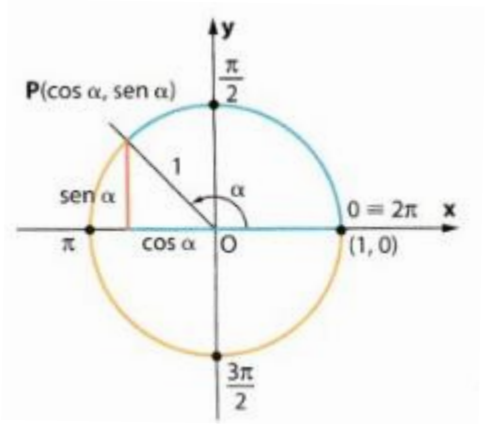
Como $\alpha = 240°$ temos que $240° \in [180°, 270°] = QIII$. Logo está no terceiro quadrante.

ETAPA 6 (50 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar o cálculo do seno, cosseno e tangente de um arco na circunferência trigonométrica.

Para tal, consideraremos $P(x, y)$ um ponto da circunferência trigonométrica, ponto final do arco de medida $\alpha\, rad$, definido a partir de número real α. Nessas condições, definiremos:

- $sen(\alpha) = ordenada\ de\ P$
- $\cos(\alpha) = abscissa\ de\ P$
- $Tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\ com\ \alpha \neq 0$



Ainda, denotaremos a seguinte relação fundamental $sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, conforme abaixo.

Como o triângulo na circunferência trigonométrica é retângulo, vale o Teorema de Pitágoras, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$, mas como o raio da circunferência é unitário e representa a hipotenusa do triângulo e seno e cosseno os catetos, segue que $sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1^2$.

Posteriormente faremos duas observações, conforme segue abaixo.

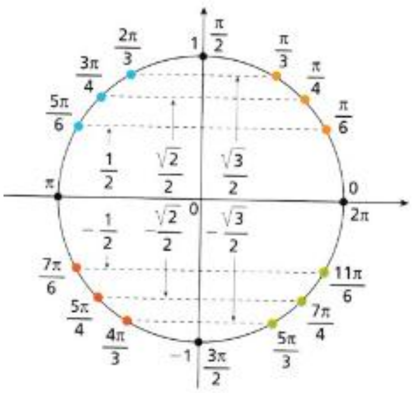
Observações

1ª. Ao associar um número real α a um arco de circunferência, estamos associando o número real ao ponto $P(x, y)$ cuja abscissa é o cosseno de α e cuja ordenada é o seno de α.

2ª. Apesar de a definição de seno e cosseno na circunferência trigonométrica necessitar do arco em radianos – por conta da associação com números reais-, não há problema em se referir aos valores dos ângulos em graus. Ou seja, podemos calcular os valores de seno e cosseno de arcos maiores de $90°$ e também para ângulos negativos.

Ainda, utilizando-se do conceito de simetria abordado anteriormente iremos expor algumas relações de redução ao primeiro quadrante explicitando o sinal de seno e cosseno em cada quadrante, conforme abaixo:

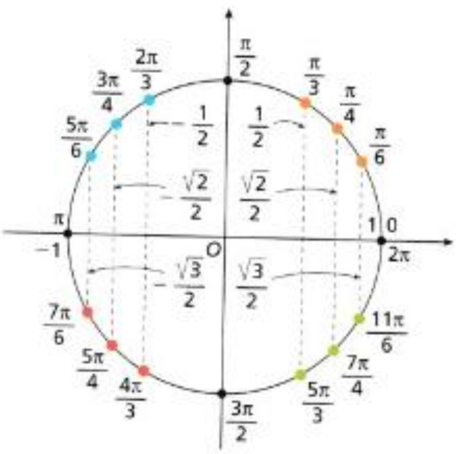
De acordo com a imagem abaixo iremos expor que o valor de seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes.



- Cresce de 0 a 1 em QI $\left(0-\frac{\pi}{2}\right)$;
- Decresce de 1 a 0 em QII $\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)$;
- Decresce de 0 a -1 em $QIII$ $\left(\pi-\frac{3\pi}{2}\right)$;
- Cresce de -1 a 0 em QIV $\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi\right)$.

Seno			
$\boldsymbol{\alpha\ radiano}$	$sen(\pi-\alpha)=sen(\alpha)$	$sen(\pi+\alpha)=-sen(\alpha)$	$sen(2\pi-\alpha)=-sen(\alpha)$
$\boldsymbol{\alpha\ grau}$	$sen(180°-\alpha)=sen(\alpha)$	$sen(180°+\alpha)=-sen(\alpha)$	$sen(360°-\alpha)=-sen(\alpha)$

De acordo com a imagem abaixo iremos expor que o valor de cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes.

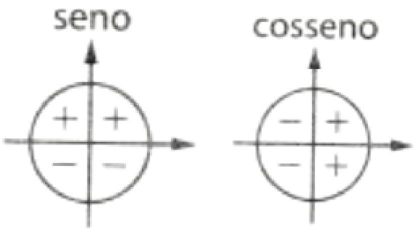


- Decresce de 1 a 0 em QI $\left(0-\frac{\pi}{2}\right)$;
- Decresce de 0 a -1 em QII $\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)$;
- Cresce de -1 a 0 em $QIII$ $\left(\pi-\frac{3\pi}{2}\right)$;
- Cresce de 0 a 1 em QIV $\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi\right)$.

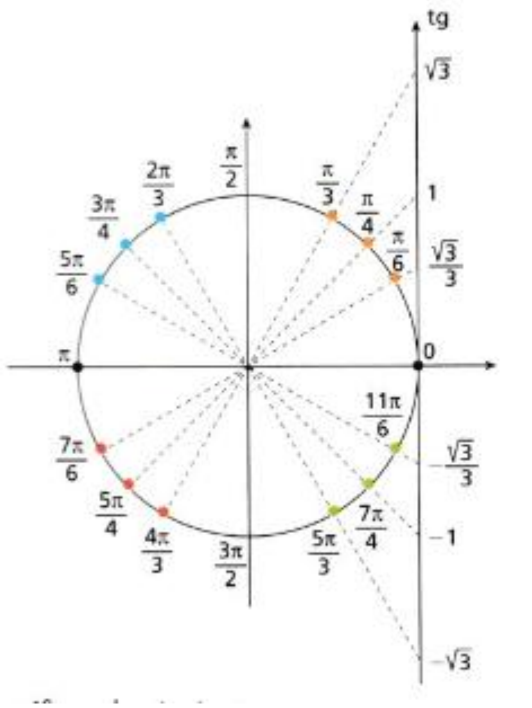
Cosseno			
$\boldsymbol{\alpha\ radiano}$	$cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha)$	$cos(\pi + \alpha) = -cos(\alpha)$	$cos(2\pi - \alpha) = cos(\alpha)$
$\boldsymbol{\alpha\ grau}$	$cos(180° - \alpha) = -cos(\alpha)$	$cos(180° + \alpha) = -cos(\alpha)$	$cos(360° - \alpha) = cos(\alpha)$

Posteriormente apresentaremos um quadro resumo com o sinal dos valores de seno e cosseno, conforme abaixo.

Quadro resumo dos sinais de seno e cosseno



De acordo com a imagem abaixo iremos expor que o valor da tangente é positivo no primeiro e terceiro quadrantes e negativo no segundo e quarto quadrantes.



- Cresce de 0 a $+\infty$ em QI $\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)$;
- Cresce de $-\infty$ a 0 em QII $\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)$;
- Cresce de 0 a $+\infty$ em $QIII$ $\left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right)$;
- Cresce de $-\infty$ a 0 em QIV $\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right)$.

Tangente			
α radiano	$\mathrm{Tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{Tg}(\alpha)$	$\mathrm{Tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{Tg}(\alpha)$	$\mathrm{Tg}(2\pi - \alpha) = -\mathrm{Tg}(\alpha)$
α grau	$\mathrm{Tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{Tg}(\alpha)$	$\mathrm{Tg}(180° + \alpha) = \mathrm{Tg}(\alpha)$	$\mathrm{Tg}(360° - \alpha) = -\mathrm{Tg}(\alpha)$

ETAPA 7 (30 minutos)

Nesta etapa iremos propor os seguintes exercícios envolvendo os conceitos abordados até o momento.

Exercícios

1. Dado $sen(55°) \approx 0{,}8$ calcule o valor aproximado de:

- **a.** $sen(125°)$
- **b.** $sen(235°)$
- **c.** $sen(305°)$

Resolução

Esperamos que os discentes utilizem as relações de redução ao primeiro quadrante expostas anteriormente e concluam que:

$$sen(125°) = sen(180° - 125°) = sen(55°) \approx 0{,}8$$

$$sen(235°) = sen(180 + 55) = -sen(55) \approx -0{,}8$$

$$sen(305°) = sen(360° - 55°) = -sen(55°) \approx -0{,}8$$

2. Identifique se a expressão abaixo tem resultado positivo ou negativo.

$$[sen(50°) + sen(125°)].[sen(215°).sen(285°)]$$

Resolução

Esperamos que os discentes se lembrem de que o valor do seno no primeiro quadrante é positivo, no segundo positivo, no terceiro negativo e no quarto negativo. Logo como $50°$ e $125°$ estão no primeiro e segundo quadrante e $215°$ e $285°$ no terceiro e quarto quadrante, assim são positivos e negativos respectivamente.

Como a soma de positivos é positiva e o produto de negativos é positivo e por fim o produto de positivos é positivo, temos que o resultado é positivo.

3. Se $\cos(25°) \approx 0{,}9$ registre o valor aproximado de:

- **a.** $\cos(155°)$
- **b.** $\cos\,(205°)$

c. $\cos(335°)$

Resolução

Esperamos que os discentes utilizem as relações de redução ao primeiro quadrante expostas anteriormente e concluam que:

$$cos(155°) = cos(180° - 155°) = -cos(25°) \approx -0{,}9$$

$$cos(205°) = cos(180 + 25) = -cos(25) \approx -0{,}9$$

$$cos(335°) = cos(360° - 25°) = cos(25°) \approx 0{,}9$$

4. Indique o sinal do valor da expressão abaixo:

$$[\cos(50°) + \cos(325°)].[\cos(215°) + \cos(145°)]$$

Resolução

Esperamos que os discentes se lembrem de que o valor do cosseno no primeiro quadrante é positivo, no segundo negativo, no terceiro negativo e no quarto positivo. Logo como $50°$ e $325°$ estão no primeiro e quarto quadrante e $215°$ e $145°$ no segundo e terceiro quadrante, assim são positivos e negativos respectivamente.

Como a soma de positivos é positiva e soma de negativos é negativa, por fim, o produto de positivo por negativo é negativo, temos que o resultado é negativo.

5. Indique o sinal do valor da expressão abaixo:

$$[tg(40°) + tg(220°)].[tg(315°) + tg(165º)]$$

Resolução

Esperamos que os discentes se lembrem de que o valor da tangente é positivo no primeiro e terceiro quadrantes e negativo no segundo e quarto quadrantes. Logo como $40°$ e $220°$ estão no primeiro e terceiro quadrantes e $165°$ e $315°$ no segundo e quarto quadrantes, assim são respectivamente positivos e negativos.

Como a soma de positivas é positiva e a soma de negativos é negativo, por fim, o produto de positivo por negativo é negativo, temos que o resultado é negativo.

Por fim iremos propor os seguintes problemas extraclasse:

1. Determine a medida, em graus, do menor ângulo central formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando $7h\ 47min$.

2. Determine, em grau e radiano, a medida do arco que representa $\frac{5}{8}$ da circunferência.

3. Em um relógio, a hora foi ajustada exatamente para 12 h. Calcule as horas e os minutos que estará marcando esse relógio após o ponteiro menor percorrer um ângulo de 44º.

4. A roda de uma motocicleta possui o raio medindo 50 centímetros. Determine a distância que a motocicleta percorre quando a roda dá 500 voltas. Utilize π = 3,14.

5. Calcule a primeira determinação positiva do ângulo 7560º e o número de voltas completas em relação à circunferência trigonométrica. Depois, escreva a expressão geral dos arcos côngruos.

6. Determine o quadrante em que se encontra a extremidade de um arco de $3560°$.

7. Dado $sen(\frac{\pi}{3}) \approx 0{,}86$ calcule o valor aproximado de:

d. $sen(\frac{2\pi}{3})$

e. $sen(\frac{4\pi}{3})$

f. $sen(\frac{5\pi}{3})$

8. Se $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}7$ registre o valor aproximado de:

d. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

e. $\cos\,(\frac{5\pi}{4})$

f. $\cos\,(\frac{7\pi}{4})$

9. Indique o sinal do valor da expressão abaixo:

$$[\text{sen}(53°) + \cos(322°)].[\text{tg}(218°) + \text{sen}(137°)]$$

10. Calcule o valor da expressão

$$\frac{\cos(\alpha) - sen(\alpha)}{sen(\alpha) - \cos(\alpha)} + sen(\alpha)$$

Sabendo que $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Referências

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Vol. 2. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

IEZZI, G. **Matemática:** 1ª série, 2° grau / Gelson Iezzi [et al.]. -11. Ed. ver. São Paulo: Atual, 1990.

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 20 maio 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 2. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 1. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

2.4.2.1 Relatório – 24.08.2019

No sábado, dia 24 de Agosto de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o terceiro encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar as relações trigonométricas na circunferência trigonométrica.

Para introduzirmos o assunto aos discentes levantamos os seguintes questionamentos “O que é geometricamente uma circunferência?”, “O que é geometricamente um círculo?” e “São representações do mesmo objeto?”. Neste momento, recebemos respostas variadas que em geral denotavam que o círculo é a figura geométrica formada pela reunião dos pontos equidistantes a um ponto central e todos os pontos do interior delimitado pelos anteriores e que a circunferência é a figura formada pela união dos pontos equidistantes a um ponto central. Então expomos aos discentes a definição geométrica formal de círculo e circunferência e denotamos que iríamos trabalhar com a circunferência trigonométrica.

Em sequência, tomamos uma circunferência e denotamos que ao tomar dois pontos desta e ligá-los pela curva da circunferência, delimitamo-la em duas partes denominadas de arcos. Então indagamos aos discentes se poderíamos ligar os dois pontos de outra forma e os mesmos responderam que seria possível ligá-los por uma reta. Utilizando-se dessa resposta denotamos que a reta que liga dois pontos de uma circunferência é denominada corda e que a corda que passa pelo centro da circunferência é chamada de diâmetro e tem a medida igual a duas vezes o raio da circunferência.

Por conseguinte, no intuito de introduzir aos discentes as medidas de arco, os indagamos a respeito do ângulo central da circunferência e os mesmos prontamente responderam que este mede 360°. Então expomos que a medida do arco de uma circunferência esta relacionada com a medida do ângulo central que o determina e que podemos medi-lo tomando sua medida angular ou sua medida linear. E denotamos que na medida angular pode-se utilizar como unidade de medida o Grau e o Radiano e para a medida linear utilizamos unidades lineares como metro, o centímetro, o milímetro etc.

Em sequência expomos que o Grau representa a medida angular de cada arco de uma circunferência que foi dividida em 360 arcos de comprimentos iguais. E expomos alguns exemplos utilizando o horário marcado em um relógio. Ainda denotamos que podemos relacionar o comprimento do arco com sua medida em grau. Para tal, retomamos que o comprimento de uma circunferência pode ser calculado pela expressão $C = 2\pi r$, em que r representa o raio da circunferência, e considerando um arco de circunferência qualquer, de comprimento ℓ, expomos pela regra de proporcionalidade:

$$\frac{2.\pi.r}{\ell} = \frac{360}{\alpha}$$

$$\ell = \frac{2.\pi.r.\alpha}{360}$$

Apresentamos também que o Radiano é uma unidade de medida angular que corresponde ao ângulo central subtendido por um arco de circunferência cujo comprimento seja igual ao raio desta mesma circunferência. E explicamos que dado um ângulo central de medida α, correspondente a um arco $\widehat{AB}$ qualquer sobre uma circunferência de raio r, para determinar a medida α, em radiano, é necessário verificar quantos arcos de comprimento r “cabem” no arco $\widehat{AB}$, ou seja, $\alpha = \frac{\ell}{r}$.

Posteriormente apresentamos a relação entre o Grau e o Radiano, conforme segue:

- Caso em que se conhece a medida em grau:

$$\frac{180°}{medida\ conhecida} = \frac{\pi}{x}$$

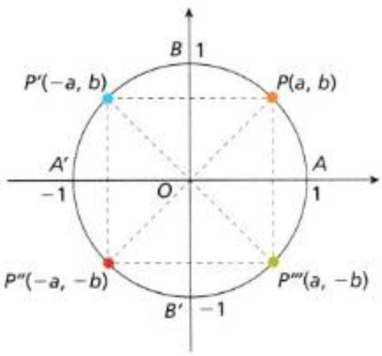
- Caso em que se conhece a medida em radiano:

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi}{medida\ conhecida}$$

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Então apresentamos alguns exemplos e propomos algumas situções-problema aos discentes que em geral apresentaram mais dúvidas para estabelecer a relação de proporcionalidade, as quais foram sanadas com a resolução na lousa.

Por conseguinte, introduzimos aos discentes a circunferência trigonométrica, denotamos suas principais características como raio, medidas em graus e radianos e os quadrantes. Além disso, apresentamos o conceito de simetria de arcos com a seguinte ilustração:



em que definimos:

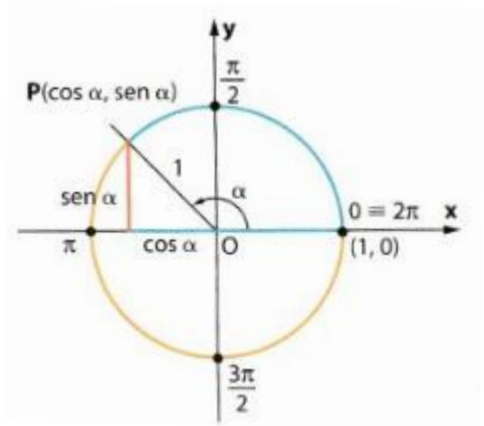
- P e P' são simétricos em relação ao eixo das ordenadas (têm abscissas opostas e ordenadas iguais); $med\left(\widehat{AP'}\right) = (\pi - \alpha)\ rad$;
- P e P'' são simétricos em relação à origem O (têm abscissas opostas e ordenadas opostas); $med\left(\widehat{AP''}\right) = (\pi + \alpha)\ rad$;
- P e P''' são simétricos em relação ao eixo das abscissas (têm abscissas iguais e ordenadas opostas); $med\left(\widehat{AP'''}\right) = (2\pi - \alpha)\ rad$.

Em sequência, apresentamos o conceito de congruência entre arcos denotando que arcos côngruos diferem entre si de um múltiplo de 2π e apresentamos o seguinte exemplo para estabelecer a expressão geral de arcos côngruos:

Então propomos algumas situações-problema nas quais os discentes, em geral, não apresentaram dúvidas pertinentes a relatar.

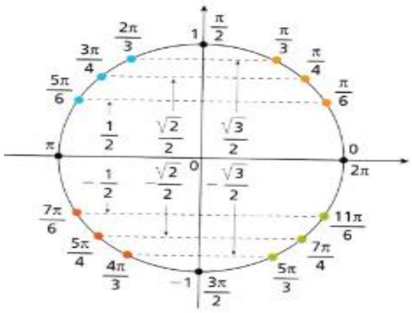
Por fim, introduzimos as relações trigonométricas na circunferência, para tal, consideramos $P(x, y)$ um ponto da circunferência trigonométrica, ponto final do arco de medida $\alpha\ rad$, definido a partir de número real α. Nessas condições, definimos:

- $sen(\alpha) = ordenada\ de\ P$
- $\cos(\alpha) = abscissa\ de\ P$
- $Tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\ com\ \alpha \neq 0$

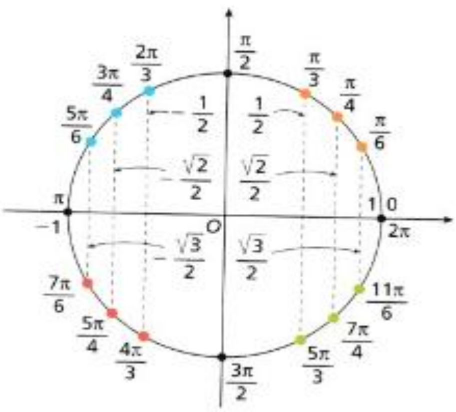


Ainda, denotamos a relação fundamental $sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ relembrando o Teorema de Pitágoras.

Assim passamos a trabalhar com o sinal das relações trigonométricas em cada quadrante e seu arco simétrico ao primeiro quadrante, conforme abaixo:

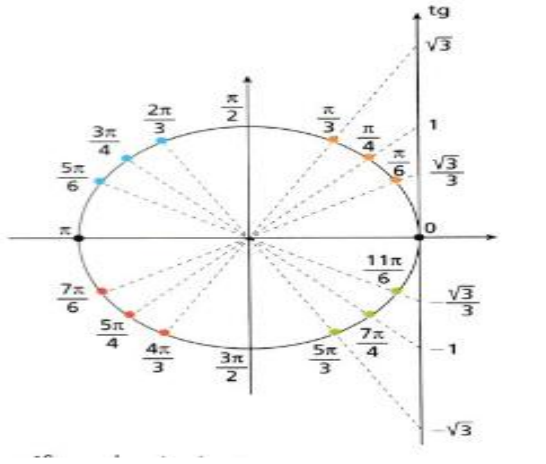
Seno	
	• Cresce de 0 a 1 em $QI\ \left(0 - \frac{\pi}{2}\right)$; • Decresce de 1 a 0 em $QII\ \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)$; • Decresce de 0 a -1 em $QIII\ \left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right)$; • Cresce de -1 a 0 em $QIV\ \left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right)$.

$\boldsymbol{\alpha\ radiano}$	$sen(\pi - \alpha) = sen(\alpha)$	$sen(\pi + \alpha) = -sen(\alpha)$	$sen(2\pi - \alpha) = -sen(\alpha)$
$\boldsymbol{\alpha\ grau}$	$sen(180° - \alpha) = sen(\alpha)$	$sen(180° + \alpha) = -sen(\alpha)$	$sen(360° - \alpha) = -sen(\alpha)$

Cosseno	
	• Decresce de 1 a 0 em $QI\ \left(0 - \frac{\pi}{2}\right)$; • Decresce de 0 a -1 em $QII\ \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)$; • Cresce de -1 a 0 em $QIII\ \left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right)$; • Cresce de 0 a 1 em $QIV\ \left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right)$.

α **radiano**	$cos(\pi-\alpha)=-cos(\alpha)$	$cos(\pi+\alpha)=-cos(\alpha)$	$cos(2\pi-\alpha)=cos(\alpha)$
α **grau**	$cos(180°-\alpha)=-cos(\alpha)$	$cos(180°+\alpha)=-cos(\alpha)$	$cos(360°-\alpha)=cos(\alpha)$

Tangente



- Cresce de 0 a +∞ em $QI\ \left(0-\frac{\pi}{2}\right)$;
- Cresce de −∞ a 0 em $QII\ \left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)$;
- Cresce de 0 a +∞ em $QIII\ \left(\pi-\frac{3\pi}{2}\right)$;
- Cresce de −∞ a 0 em $QIV\ \left(\frac{3\pi}{2}-2\pi\right)$.

α **radiano**	$Tg(\pi-\alpha)=-Tg(\alpha)$	$Tg(\pi+\alpha)=Tg(\alpha)$	$Tg(2\pi-\alpha)=-Tg(\alpha)$
α **grau**	$Tg(180°-\alpha)=-Tg(\alpha)$	$Tg(180°+\alpha)=Tg(\alpha)$	$Tg(360°-\alpha)=-Tg(\alpha)$

Para finalizar a aula propomos algumas situações-problema envolvendo os conceitos abordados anteriormente.

2.4.3 Plano de aula - 31.08.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves
Lucas Campos de Araújo
Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos das principais funções trigonométricas e a capacidade de resolver problemas que envolvam esses conceitos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com funções trigonométricas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma função periódica;
- Estender o conceito da circunferência trigonométrica em $\mathbb{R}$;
- Compreender as principais funções trigonométricas;
- Relacionar as funções trigonométricas com eventos periódicos;
- Analisar e construir o gráfico de funções trigonométricas;
- Distinguir os gráficos de funções g dadas por $f(x) + c$, $f(x + c)$, $f(c.x)$ e $c.f(x)$, tendo por base o gráfico de f;
- Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas.

Conteúdo: Funções Trigonométricas.

Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1 (30 minutos)

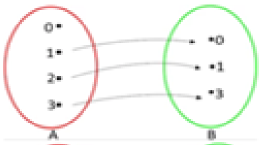
Nesta etapa pretendemos retomar o conceito de função e de periodicidade, conforme abaixo.

Definição

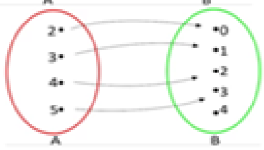
Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma função de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x de A existem em correspondência a um único elemento y de B. Representamos assim:

$$f: A \to B$$

Para tornar ainda mais clara a definição, iremos expor as seguintes situações e suas devidas explicações:



Note que existem elementos do conjunto A (Domínio) que não se relacionam com os elementos do conjunto B (Contra Domínio). Logo não é função.



Note que todos os elementos do conjunto A (Domínio) se relacionam com um e único elemento do conjunto B (Contra Domínio). Logo é função.

Em seguida, retomaremos os conceitos de domínio e imagem, conforme abaixo.

Definição

Dada uma função $f: A \to B$, temos que:

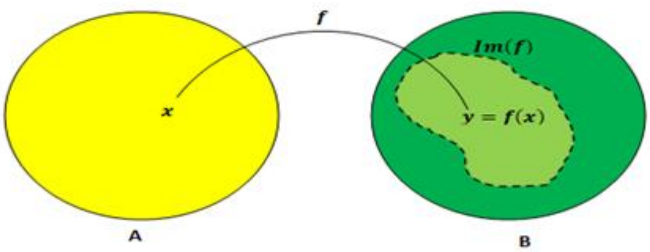
- O conjunto A é chamado **domínio** da função f que indicamos por D ou $D(f)$ (lemos "domínio de f");
- O conjunto B é chamado **contradomínio** da função f que indicamos por CD ou $CD(F)$ (lemos "contradomínio de f").

Definição

Dada uma função $f: A \to B,$ temos que:

- Para cada $x \in D(f)$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de **imagem** de x pela função f;
- O conjunto formado por todas as imagens de x é chamado de **conjunto imagem** da função que indicamos por Im ou $Im(f)$ (lemos "conjunto imagem de f").

Então reforçaremos que para se definir uma função f, é preciso conhecer o domínio $D(f)$, o contradomínio $CD(f)$ e a maneira pela qual cada x do domínio se corresponde com um único $y = f(x)$ do contradomínio, em geral por uma lei.



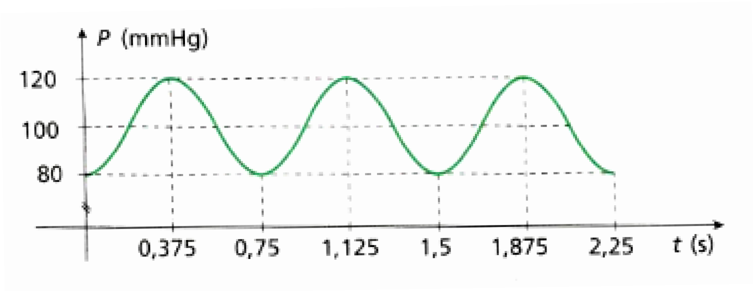
Em sequência, apresentaremos que existem funções denominadas periódicas, para tal utilizaremos o seguinte exemplo:

Situação exemplo

A variação da pressão sanguínea P (em $mmHg$, milímetro de mercúrio) de uma pessoa em função do tempo t (em s, segundo), é uma função cíclica, e cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.

A lei da função para certo indivíduo é definida por $P(t) = 100 - 20.\cos\left(\frac{8\pi}{3}.t\right)$, em que o arco é dado em radiano.

Apresentaremos o seguinte gráfico que expõem a periodicidade desse fenômeno.



Indagaremos aos discentes a respeito do intervalo de tempo de cada batimento cardíaco, no intuito de que percebam que o ciclo completo dura $0{,}75s$. Ainda indagaremos a respeito da quantidade de batimentos cardíacos, que essa situação apresenta, no decorrer de 1 minuto, esperando que percebam que se 1 ciclo dura $0{,}75s$ então $\frac{60}{0{,}75} = 80$ ciclos, ou ainda, $80\ bpm$.

Ainda denotaremos, a partir da lei de formação temos $p(0{,}75) = p(1{,}5) = p(2{,}25)$. E que a sequência $0{,}75$; $1{,}5$; $2{,}25$ é uma progressão aritmética de razão $0{,}75$.

Em sequência iremos apresentar a definição de função periódica, conforme abaixo.

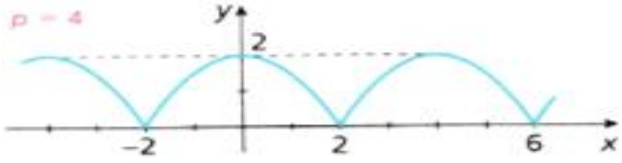
Definição

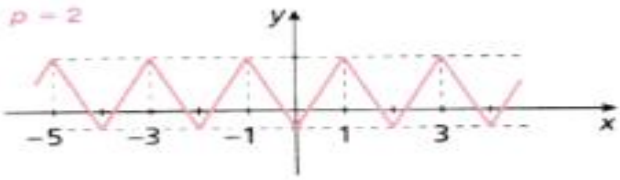
Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada função periódica quando existe um número real positivo p tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + p)$.

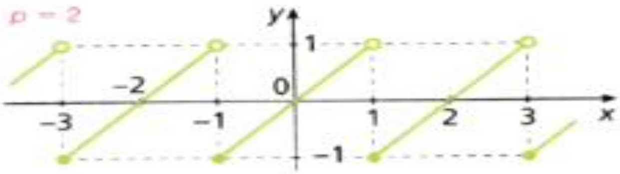
Denotaremos ainda que o menor valor positivo de p que satisfaz a igualdade acima é chamado **período fundamental**, ou simplesmente **período de f.**

Em sequência apresentaremos alguns exemplos de funções periódicas e seus respectivos períodos.

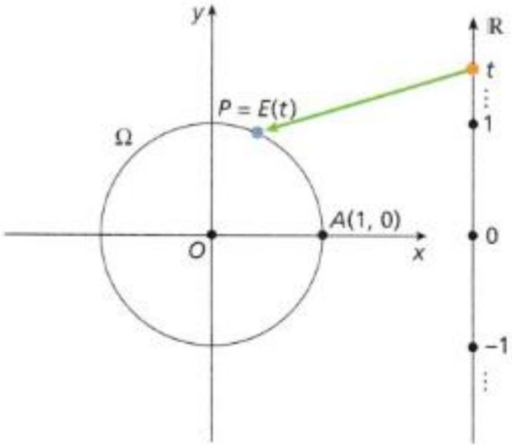
Exemplos







Posteriormente no intuito de introduzir as funções trigonométricas, iremos definir a função $E\colon \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$ que associa a cada número real t um único ponto P localizado na circunferência Ω de raio 1, conforme figura abaixo. Denotaremos ainda que essa função leva o nome de seu criador – o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783)-, sendo denominada **função de Euler**.



Ainda faremos os seguintes apontamentos:

- Se $t = 0$, então $P = A$, ou seja, os pontos P e A são **coincidentes**;
- Se $t > 0$, percorremos o ciclo no sentido anti-horário (positivo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$, de comprimento t;
- Se $t < 0$, percorremos o ciclo no sentido horário (negativo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$, de comprimento $|t|$.

Faremos também a seguinte analogia, para esclarecer os apontamentos, que na prática, a função de Euler consiste em “enrolar” a reta $\mathbb{R}$ sobre a circunferência Ω, de modo que o zero da reta coincida com o ponto $A(1,0)$ e que o sentido positivo da “reta enrolada” seja o sentido anti-horário.

E explicitaremos que essa função é periódica, de período 2π, ou seja: $E(t) = E(t + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

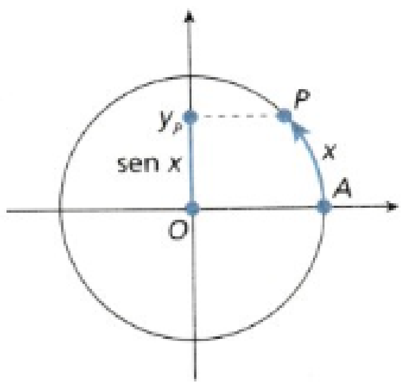
ETAPA 2 (60 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar os conceitos relacionados a função seno e função cosseno, conforme abaixo.

Função Seno

Iremos tomar um ponto P como a extremidade de um arco na circunferência trigonométrica correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

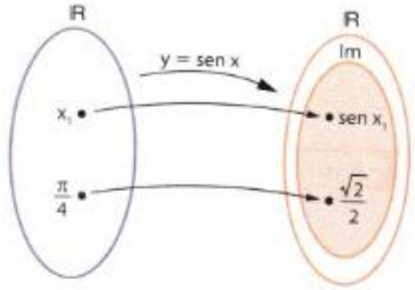
Consideraremos a projeção ortogonal de P no eixo vertical e definiremos que a ordenada y_p do ponto P é o seno do arco de medida x.



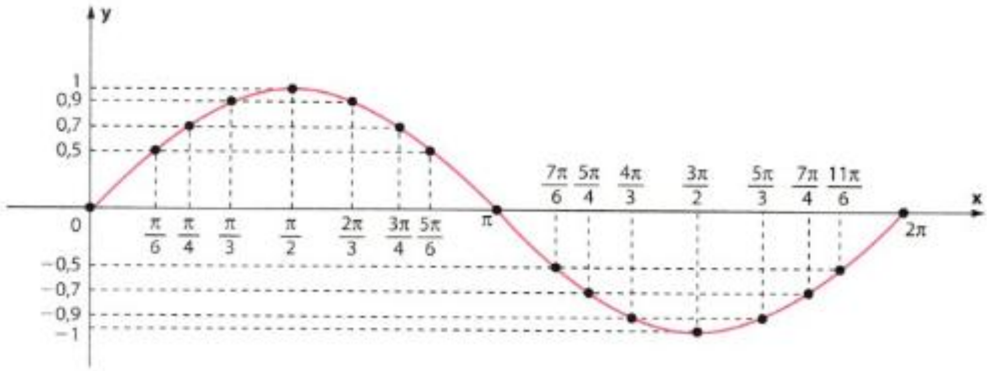
Posteriormente apresentaremos a definição formal:

Definição

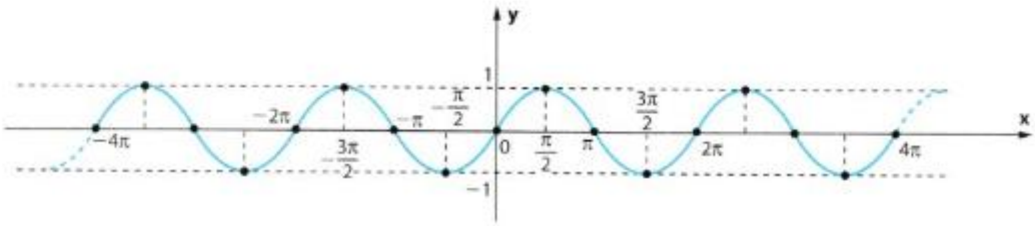
A função **seno** é a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $y_p = sen(x)$, ou seja, $f(x) = sen(x)$.



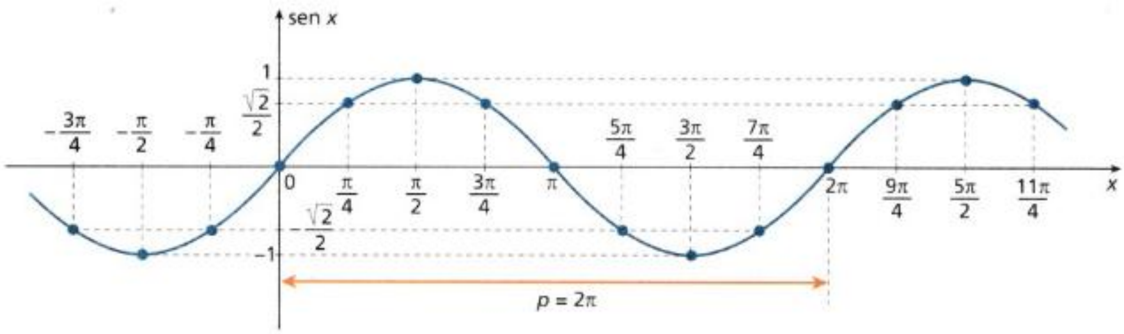
Vamos construir o gráfico da função de lei $f(x) = sen(x)$, utilizando o software Geogebra, com base nos dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideraremos $x \in [0,2\pi]$ (ou seja, localizado na 1ª volta).



E posteriormente para alguns valores de x maiores que 2π



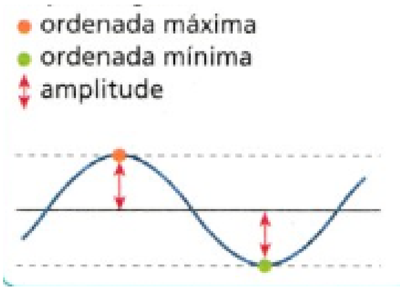
Iremos denotar que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o seno de x assume os valores da 1ª volta. Assim a função seno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$: $sen(x) = sen(x + 2\pi) = \cdots = sen(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$. Assim a curva obtida no intervalo $[0,2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.



Denotaremos que por definição o domínio e contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$. E em seu gráfico, chamado **senoide**, observaremos os seguintes aspectos:

- É periódica, de período 2π (cada ciclo se completa em um intervalo de 2π);
- É limitada, pois seus valores estão no intervalo $[-1,1]$, ou seja, seu conjunto imagem é $[-1,1]$;

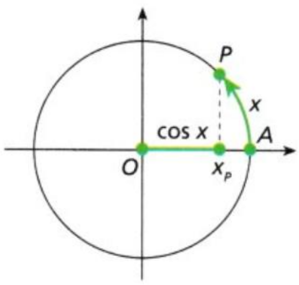
- É crescente nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, etc, e decrescente nos intervalos $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$, etc;
- É positiva para x nos intervalos $]0, \pi[$, $]2\pi, 3\pi[$, etc e negativa para x nos intervalos $]-\pi, 0[$, $]\pi, 2\pi[$, etc;
- Tem **amplitude** (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos pontos do gráfico) igual a 1.



Função Cosseno

Iremos tomar um ponto P como a extremidade de um arco na circunferência trigonométrica correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

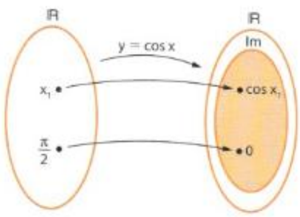
Consideraremos a projeção ortogonal de P no eixo horizontal e definiremos que a abscissa x_p do ponto P é o cosseno do arco de medida x.



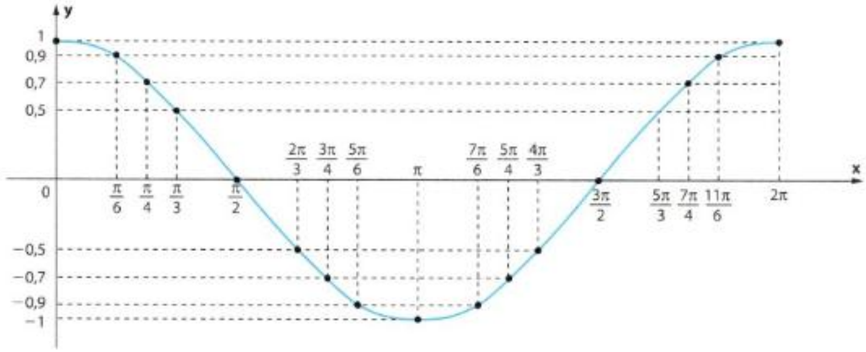
Posteriormente apresentaremos a definição formal:

Definição

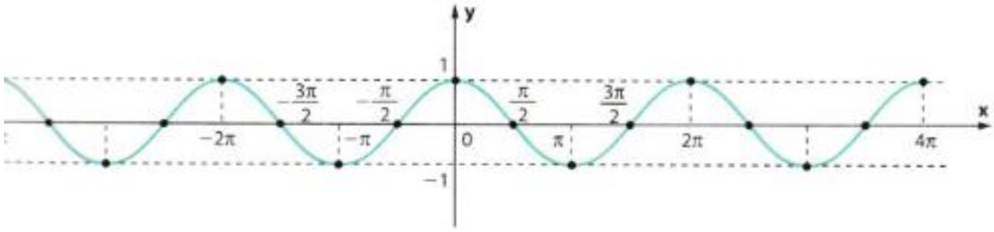
A função **cosseno** é a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $x_p = cos(x)$, ou seja, $f(x) = cos(x)$.



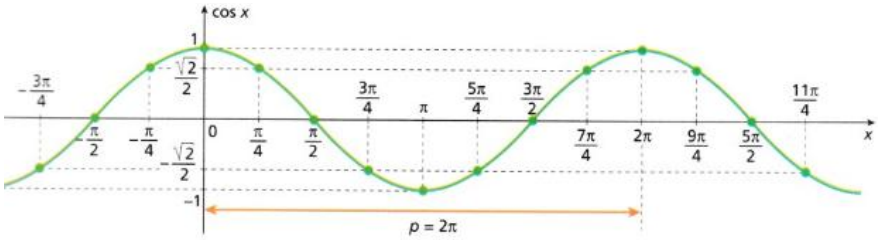
Vamos construir o gráfico da função de lei $f(x) = cos(x)$, utilizando o software Geogebra, com base nos dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideraremos $x \in [0,2\pi]$ (ou seja, localizado na 1ª volta).



E posteriormente para alguns valores de x maiores que 2π



Iremos denotar que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o cosseno de x assume os valores da 1ª volta. Assim a função cosseno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$: $cos(x) = cos(x + 2\pi) = \cdots = cos(x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim a curva obtida no intervalo $[0,2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.



Denotaremos que por definição o domínio e contradomínio da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$. E em seu gráfico, chamado **cossenoide**, observaremos os seguintes aspectos:

- É periódica, de período 2π (cada ciclo se completa em um intervalo de 2π);
- É limitada, pois seus valores estão no intervalo $[-1,1]$, ou seja, seu conjunto imagem é $[-1,1]$;
- É crescente nos intervalos $[-\pi, 0], [\pi, 2\pi]$, etc, e decrescente nos intervalos $[0, \pi], [2\pi, 3\pi]$, etc;

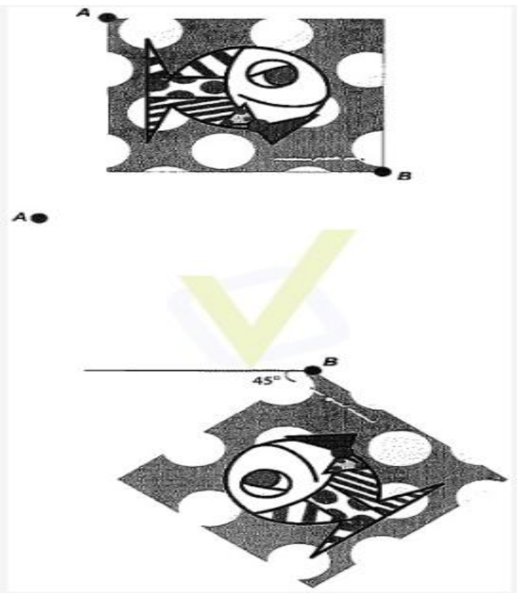
- É positiva para x nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$, etc e negativa para x nos intervalos $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],\left[\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right]$, etc;
- Tem **amplitude** (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos pontos do gráfico) igual a 1.

ETAPA 3 (60 minutos)

Nesta etapa pretendemos propor os seguintes exercícios envolvendo os conceitos abordados até o momento.

1. A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte



Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

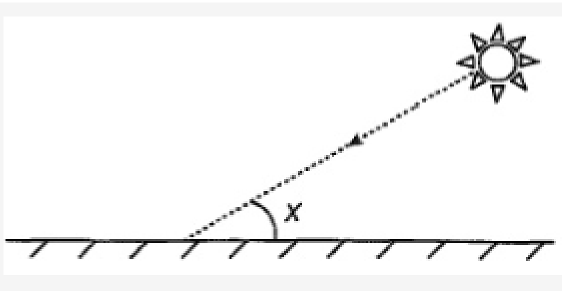
a) 90º no sentido horário.
b) 135º no sentido horário.

c) 180º no sentido anti-horário.
d) 270º no sentido anti-horário.
e) 315º no sentido horário.

Resolução

Esperamos que os discentes percebam que se a figura estivesse apenas virada de lado, teríamos que gira-la $90°$ no sentido horário, mas como a imagem tem uma inclinação extra de $45°$, ao todo teríamos que girá-la $45° + 90° = 135°$ no sentido horário.

2. Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo *x* com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $l(x) = k \bullet sen(x)$ sendo *k* uma constante, e supondo-se que *x* está entre 0º e 90°.



Quando *x* = 30°, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33%
b) 50%
c) 57%
d) 70%
e) 86%

Resolução

Esperamos que os discentes percebam que como $0° \leq x \leq 90°$ então o valor máximo da expressão $l(x) = k.sen(x)$ é quando $x = 90°$ dado que $l(90°) =$

$k.sen(90°) = k.1 = k$. Agora quando $x = 30°$ teríamos $l(30°) = k.sen(30°) = k.\frac{1}{2} = \frac{k}{2}$. Logo houve uma redução de 50% em relação ao valor máximo da intensidade luminosa.

3. Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função

$$T(h) = A + B\ sen\ (\frac{\pi}{12}(h - 12))$$

sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite (0 ≤ h ≤ 24) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) $A = 18\ e\ B = 8$
b) $A = 22\ e\ B = -4$
c) $A = 22\ e\ B = 4$
d) $A = 26\ e\ B = -8$
e) $A = 26\ e\ B = 8$

Resolução

Esperamos que os discentes relacionem a temperatura máxima desejada com o valor máximo da função seno, ou seja, $sen\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) = 1$ e a temperatura mínima com o valor mínimo da função seno, ou seja, $sen\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) = -1$. Assim teríamos que as seguintes relações:

$$A + B.1 = 26$$

$$A + B.(-1) = 18$$

Assim, segue que $2A = 44 \Rightarrow A = 22$. Como queremos que no período vespertino a temperatura do ar seja menor do que no período matutino, considerando o período vespertino como sendo das $12h$ às $18h$ teríamos que a expressão $0 \leq sen\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) \leq 1$ logo se $22 + B = 26 \Rightarrow B = 4$, mas teríamos uma temperatura maior no período matutino o que contraria o desejado. Portanto $B = -4$.

4. Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função

$$P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) Janeiro
b) Abril
c) Junho
d) Julho
e) Outubro

Resolução

Esperamos que os discentes se lembrem que o valor máximo e mínimo da função cosseno é 1 e -1 respectivamente, ainda que notem que a produção máxima ocorre quando o preço é o mais baixo. Com isso esperamos que notem que o valor mínimo da função $P(x)$ é quando cosseno é igual a -1, ou seja,

$$\cos\left(\frac{\pi.x-\pi}{6}\right)=-1=\cos(\pi)$$

$$\frac{\pi.x-\pi}{6}=\pi$$

$$\pi(x-1)=6\pi$$

$$x-1=6$$

$$x=7$$

Portanto o mês de maior produção é o mês de Julho.

5. Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + Bcos(kt)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

a) $P(t)=99+21\cos(3\pi\ \mathrm{t})$

b) $P(t)=78+42\cos(3\pi\ \mathrm{t})$

c) $P(t)=99+21\cos(2\pi\ \mathrm{t})$

d) $P(t)=99+21\cos(t)$

Resolução

Esperamos que os discentes se lembrem de que o valor máximo e mínimo da função cosseno é 1 e -1 respectivamente, assim relacionando com a tabela temos:

$$A + B.1 = 120$$

$$A + B.(-1) = 78$$

Assim, segue que $2A = 198 \Rightarrow A = 99$ e portanto $B = 21$. Ainda temos, a partir da tabela, $90\ bmp$, ou $\frac{2}{3}$ de batimentos por segundo. Como o enunciado diz que o tempo entre dois valores máximos é o tempo de 1 batimento temos que o período dessa função é equivalente a $\frac{2}{3}$. Mas por definição de período

$$k.\frac{2}{3} = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi$$

Portanto a lei de formação para esse caso específico é $P(t) = 99 + 21\cos{(3\pi}$ t).

6. A quantidade de certa espécie de crustáceos, medida em toneladas, presente num trecho de mangue, foi modelada pela equação

$$Q(t) = \frac{600}{6 + 4 \times sen(wt)}$$

onde t representa o número de meses transcorridos após o início de estudo e w é uma constante. O máximo e o mínimo de toneladas observadas durante este estudo são, respectivamente,

a) 600 e 100

b) 600 e 150

c) 300 e 100

d) 300 e 60

e) 100 e 60

Resolução

Esperamos que os discentes percebam que os valores de máximo e mínimo da função $Q(t)$ são dados pelos valores máximos e mínimos da função seno, ou seja, 1 e -1. Assim temos

$$Q_{mínimo}(t) = \frac{600}{6 + 4 \times 1} = \frac{600}{10} = 60$$

$$Q_{máximo}(t) = \frac{600}{6 + 4 \times (-1)} = \frac{600}{2} = 300$$

Portanto os valores máximo e mínimo são 300 e 60 toneladas respectivamente.

7. Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15 \times \cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representado por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

a) 12765km

b) 12000km

c) 11730km

d) 10965km

e) 5865km

Resolução

Esperamos que os discentes percebam que os valores de máximo e mínimo da função $r(t)$ são dados pelos valores máximos e mínimos da função seno, ou seja, 1 e -1. Assim temos

$$r_{mínimo}(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15 \times 1} = \frac{5865}{1{,}15} = 5100$$

$$r_{máximo}(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15 \times (-1)} = \frac{5865}{0{,}85} = 6900$$

Portanto a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, é $5100 + 6900 = 12.000\ km$.

ETAPA 4 (30 minutos)

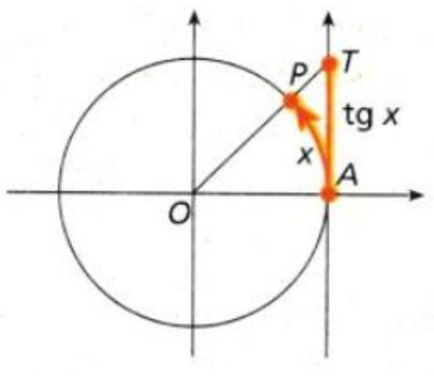
Nesta etapa pretendemos introduzir o conceito de função tangente. Para tal, apresentaremos a seguinte definição e apontamentos.

Função Tangente

Consideraremos um ponto P como a extremidade de um arco, na circunferência trigonométrica de centro O, correspondente ao número real x.

Tomaremos o ponto T como interseção entre a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e a reta tangente à circunferência pelo ponto $A(1{,}0)$.

Denotaremos que y_t, ordenada do ponto T, é a tangente do arco de medida x, conforme abaixo.



Posteriormente apresentaremos a definição formal:

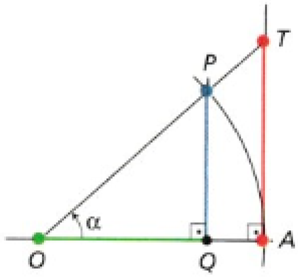
Definição

A função **tangente** é a função $f: \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x (com exceção dos valores côngruos a $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$) ao número real $y_t = tg(x)$, ou seja, $f(x) = tg(x)$.

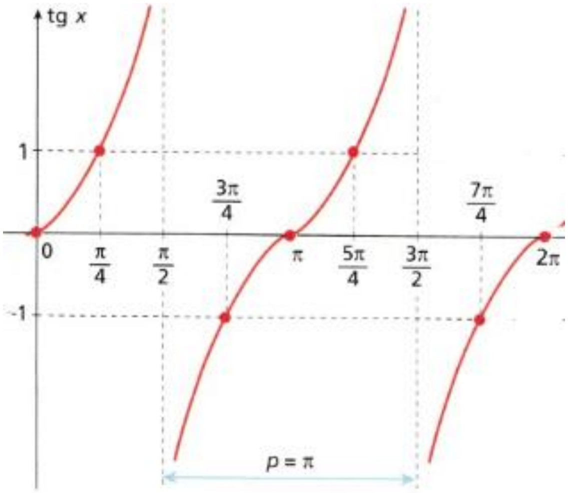
Ainda, observaremos, na figura abaixo, utilizando o conceito de semelhança de triângulos que:

- $OQ = \cos(\alpha)$, $QP = sen(\alpha)$, $OA = 1$ e $AT = tg(x)$;
- Os triângulos OQP e OAT são semelhantes, então

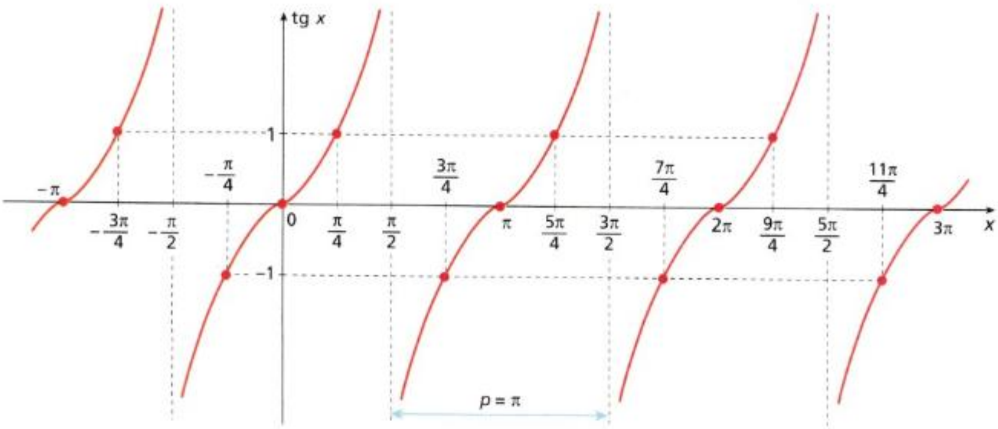
$$\frac{tg(x)}{1} = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



Vamos construir o gráfico da função de lei $f(x) = tg(x)$, utilizando o software Geogebra, com base nos dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideraremos $x \in [0,2\pi]$.



E posteriormente para alguns valores de x maiores que 2π



Observaremos que, para valores de x maiores que π ou menores que zero, a tangente de x assume os valores da 1ª meia volta. Assim, a função tangente é periódica, pois, para todo x de seu domínio, temos:

$$tg(x) = tg(x + \pi) = tg(x + 2\pi) = \cdots = tg(x + k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Assim a curva obtida no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ repete-se para $x > \frac{\pi}{2}$ e $x < -\frac{\pi}{2}$.

Denotaremos que por definição o domínio da função tangente é $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, e o contradomínio é $\mathbb{R}$. E em seu gráfico, chamado **tangentoide**, observaremos os seguintes aspectos:

- É periódica, de período π (cada ciclo se completa em um intervalo de π);
- Não é limitada, já que seu conjunto imagem é $Im =]-\propto, +\propto[$ ou $\mathbb{R}$;
- É crescente nos intervalos $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi[$, em que $k \in \mathbb{Z}$;
- É positiva para x nos intervalos $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, etc e negativa para x nos intervalos $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, etc;

Ainda, denotaremos que as retas verticais que passam pelos pontos de abscissa $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, são denominadas **assíntotas** da curva que representa a função dada por $f(x) = tg(x)$, e quando um ponto se move ao longo de uma parte extrema dessa curva, a distância desse ponto à assíntota se aproxima de zero.

ETAPA 5 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar as transformações gráficas ao se alterar a lei da formação das funções trigonométricas apresentadas, como ao somar uma constante no argumento, multiplicar o argumento por uma constante, adicionar uma constante ao valor da função trigonométrica e multiplicar o valor da função trigonométrica por uma constante. Para tal, faremos uso do software *Geogebra*, explicando cada caso separadamente conforme abaixo.

1º Caso: Funções trigonométricas do tipo $\boldsymbol{y = k + g(x)}$, em que $g(x)$ é uma função trigonométrica "simples" como $g(x) = sen(x)$ ou $g(x) = \cos(x)$.

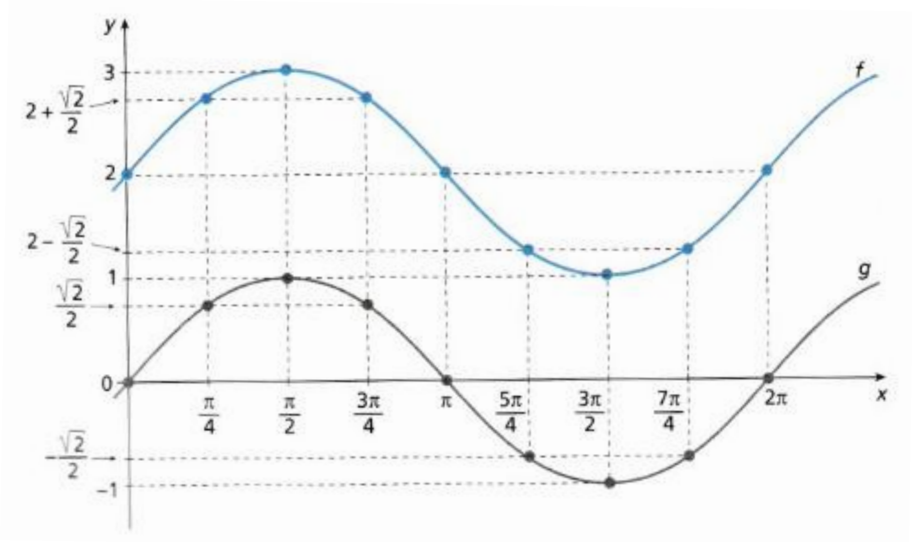
Vamos expor os seguintes exemplos, comparando a função dada com a "simples":

1. $f(x) = 2 + sen(x)$

Primeiro, montaremos uma tabela adotando para x os valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\pi/2$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$sen(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2 + sen(x)$	2	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Então, iremos expor os gráficos, no software, das funções $f(x) = 2 + sen(x)$ e $g(x) = sen(x)$, em um mesmo sistema de eixos para efeito comparativo:



Denotaremos que f apresenta mesmo domínio, período e amplitude que g, porém o gráfico de f foi transladado, ponto a ponto, duas unidades para cima. Ainda, que f continua limitada, mas o conjunto imagem é $Im = [1,3]$.

Posteriormente apresentaremos os seguintes apontamentos:

Apontamentos Caso 1

O gráfico de funções trigonométrica do tipo $y = k + sen(x)$ sofre uma translação de $|k|$ unidades em relação ao gráfico original da seguinte forma:

- Se $k > 0$, a translação é para cima;
- Se $k < 0$, a translação é para baixo.

O mesmo vale para as funções do tipo $y = k + \cos(x)$ e $y = k + tg(x)$.

2º Caso: Funções trigonométricas do tipo $\boldsymbol{y = g(k + x)}$, em que $g(x)$ é uma função trigonométrica "simples" como $g(x) = sen(x)$ ou $g(x) = \cos(x)$.

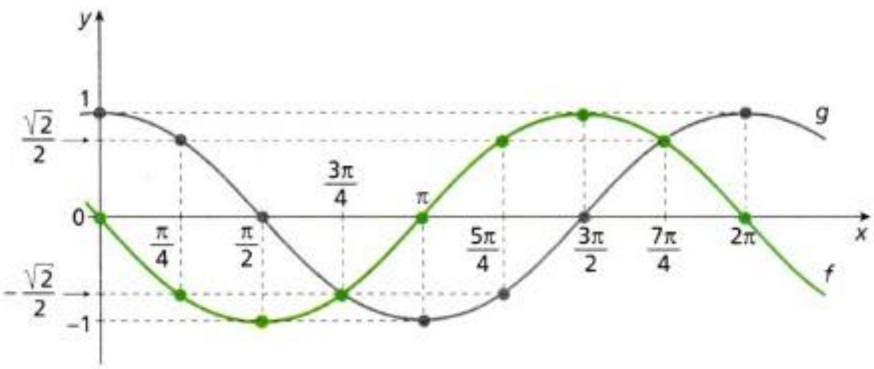
Vamos expor o seguinte exemplo, comparando a função dada com a "simples":

1. $f(x) = \cos\,(x + \frac{\pi}{2})$

Novamente, montaremos uma tabela adotando para x os valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$cos(x + \frac{\pi}{2})$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Então, iremos expor os gráficos, no software, das funções $f(x) = cos(x + \frac{\pi}{2})$ e $g(x) = cos(x)$, em um mesmo sistema de eixos para efeito comparativo:



Observaremos que a função f apresenta mesmo domínio, imagem, período e amplitude que g, mas o gráfico sofre translação de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.

Posteriormente apresentaremos os seguintes apontamentos:

Apontamentos Caso 2

O gráfico de funções trigonométrica do tipo $y = cos(x + k)$ sofre uma translação de $|k|$ unidades em relação ao gráfico original de tal modo que:

- Se $k > 0$, a translação é para esquerda;
- Se $k < 0$, a translação é para direita.

O mesmo vale para as funções do tipo $y = \text{sen}\,(x + k)$ e $y = tg(x + k)$.

3º Caso: Funções trigonométricas do tipo $\boldsymbol{y = a + g(b + x)}$, em que $g(x)$ é uma função trigonométrica “simples” como $g(x) = sen(x)$ ou $g(x) = \cos\,(x)$.

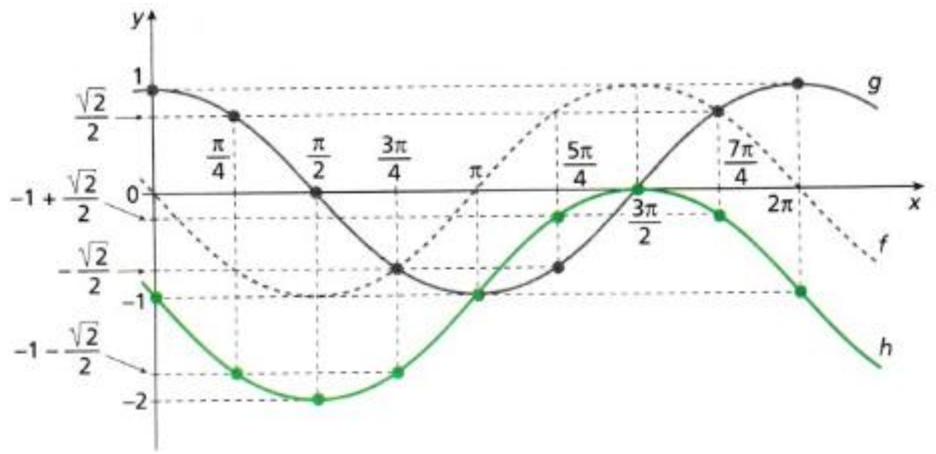
Vamos expor o seguinte exemplo, comparando a função dada com a “simples”:

1. $h(x) = -1 + \cos\,(x + \frac{\pi}{2})$

Novamente, montaremos uma tabela adotando para x os valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$cos(x + \frac{\pi}{2})$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$-1 + \cos\,(x + \frac{\pi}{2})$	-1	$-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	-2	$-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

Então, iremos expor os gráficos, no software, das funções $h(x) = -1 + cos(x + \frac{\pi}{2})$ e $g(x) = cos(x)$, em um mesmo sistema de eixos para efeito comparativo:



Observaremos que a função f apresenta mesmo domínio, período e amplitude que g, mas o gráfico sofre translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda e outra translação vertical para cima em $|-1|$ unidades sendo o conjunto imagem $Im = [-2{,}0]$.

4º Caso: Funções trigonométricas do tipo $\boldsymbol{y = a + g(b + x)}$, em que $g(x)$ é uma função trigonométrica "simples" como $g(x) = sen(x)$ ou $g(x) = \cos\,(x)$.

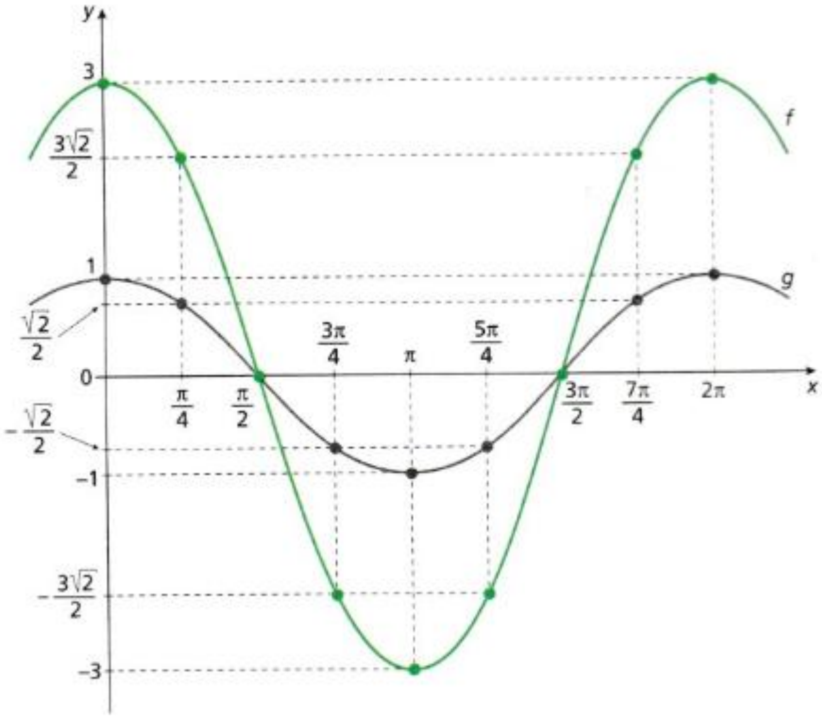
Vamos expor o seguinte exemplo, comparando a função dada com a "simples":

1. $f(x) = 3 \times \cos\,(x)$

Primeiro, montaremos uma tabela adotando para x os valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\pi/2$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$3 \times cos(x)$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3

Então, iremos expor os gráficos, no software, das funções $f(x) = 3 \times cos(x)$ e $g(x) = cos(x)$, em um mesmo sistema de eixos para efeito comparativo:



Denotaremos que a função f apresenta mesmo domínio e período que g, porém sua amplitude é 3, o triplo da amplitude de g. E o conjunto imagem de f é $Im = [-3,3]$, ou seja, f está limitada entre -3 e 3.

Posteriormente apresentaremos os seguintes apontamentos:

Apontamentos Caso 4

O gráfico de funções trigonométrica do tipo $y = k \times cos(x)$ tem amplitude igual a $|k|$ e o mesmo vale para funções do tipo $y = k \times sen(x)$.

5º Caso: Funções trigonométricas do tipo $\boldsymbol{y = g(k \times x)}$, em que $g(x)$ é uma função trigonométrica "simples" como $g(x) = sen(x)$ ou $g(x) = \cos(x)$.

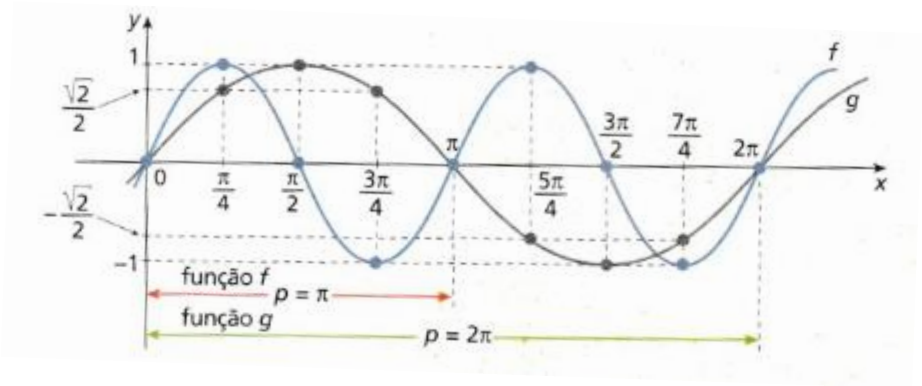
Vamos expor os seguintes exemplos, comparando a função dada com a "simples":

1. $f(x) = sen(2x)$

Primeiro, montaremos uma tabela adotando para x os valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\pi/2$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$sen(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$sen(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Então, iremos expor os gráficos, no software, das funções $f(x) = sen(2x)$ e $g(x) = sen(x)$, em um mesmo sistema de eixos para efeito comparativo:



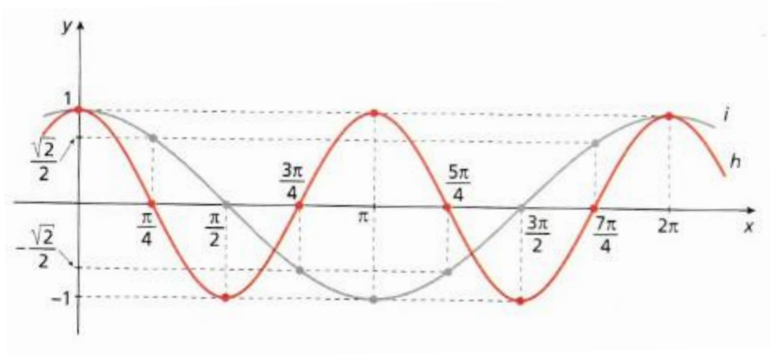
Observaremos que f apresenta o mesmo domínio, imagem e amplitude que g, porém tem período igual a π, ou seja, metade do período de g.

2. $f(x) = \cos(2x)$

Primeiro, montaremos uma tabela adotando para x os valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\pi/2$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$cos(2x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

Então, iremos expor os gráficos, no software, das funções $f(x) = cos(2x)$ e $g(x) = cos(x)$, em um mesmo sistema de eixos para efeito comparativo:



Observaremos que f apresenta o mesmo domínio, imagem e amplitude que g, porém tem período igual a π, ou seja, metade do período de g.

Posteriormente apresentaremos os seguintes apontamentos:

Apontamentos Caso 5

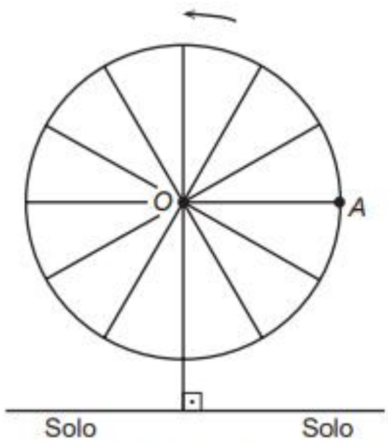
- As funções trigonométricas do tipo $y = sen(k \times x)$ ou $y = \cos{(k \times x)}$ têm período $\frac{2\pi}{|k|}$;
- As funções trigonométricas do tipo $y = tg(k \times x)$ têm período $\frac{\pi}{|k|}$.

ETAPA 6 (20 minutos)

Nesta etapa pretendemos propor os seguintes exercícios envolvendo os conceitos abordados até o momento.

Exercícios

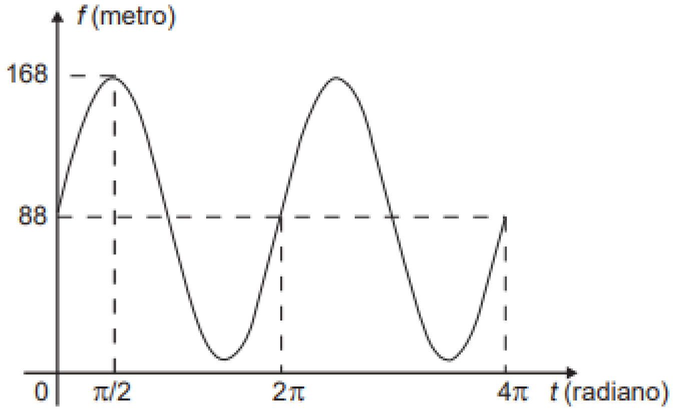
1. Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por:

a) $f(t) = 80.sen(t) + 88$

b) $f(t) = 80.\cos(t) + 88$

c) $f(t) = 88.\cos(t) + 168$

d) $f(t) = 168.sen(t) + 88.\cos(t)$

e) $f(t) = 88.sen(t) + 168.\cos(t)$

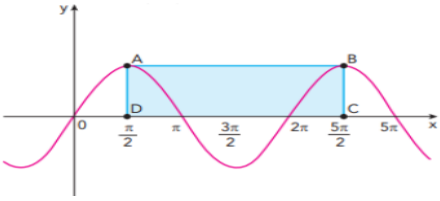
Resolução

Esperamos que os discentes observem que o gráfico da função f está deslocado 88 unidades para cima, ou seja, foi somado a constante 88 junto a função trigonométrica. Fazendo uma analogia, se subtraíssemos 88 unidades, teríamos que para $x = 0$ a imagem é 0 logo podemos concluir que é uma função do tipo senoide, ou seja, seno. Ainda como há uma alteração na amplitude que normalmente seria 1, mas no caso é de 80 temos que uma constante multiplicando a função seno.

Assim esperamos que os discentes concluam que a função $f = 80.sen(t) + 88$.

Por fim iremos propor os seguintes problemas extraclasse:

1. O gráfico a seguir representa a função periódica definida por $f(x) = 2.sen(x)$, $x \in \mathbb{R}$. No intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, A e B são pontos do gráfico nos quais $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ são valores máximos dessa função.



A área do retângulo ABCD é:

- **a)** 6π
- **b)** 5π
- **c)** 4π
- **d)** 3π

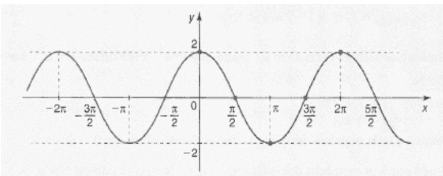
2. Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10} rad$. Essa medida é igual a:

- **a)** 48°
- **b)** 54°
- **c)** 66°
- **d)** 72°

3. Sendo $A = 12 + sen^2(x) + \cos^2(x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ é correto afirmar que:

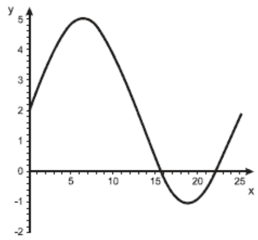
- **a)** $A = 11$
- **b)** $A = 12$
- **c)** $A = 13$
- **d)** $A = 2\pi$

4. A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:



- **a)** $2.\cos(x)$
- **b)** $2.sen\left(\frac{x}{2}\right)$
- **c)** $2.sen(x)$
- **d)** $2.sen(2x)$
- **e)** $2.\cos(2x)$

5. A figura a seguir representa um esboço do gráfico de uma função $y = A + B.sen\left(\frac{x}{4}\right)$ que é muito útil quando se estudam fenômenos periódicos, como, por exemplo, o movimento de uma mola vibrante. Então, o produto das constantes A e B é:



a) 6

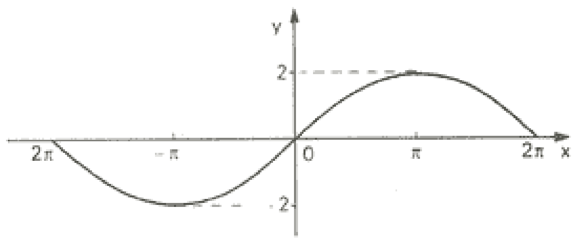
b) 10

c) 12

d) 18

e) 50

6. A figura a seguir representa o gráfico da função:



a) $f(x) = 2.sen\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $f(x) = 2.sen(2x)$

c) $f(x) = 1 + 2.sen(x)$

d) $f(x) = 2.\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

e) $f(x) = 2.\cos\,(2x)$

7. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida pela leia $f(x) = 2^{sen(x)} + 1$, então o produto do menor valor pelo maior valor que a função assume é:

a) 4,5

b) 3,0

c) 0

d) 2,4

e) 1,3

Referências

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Vol. 2. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

IEZZI, G. **Matemática:** 1ª série, 2° grau / Gelson Iezzi [et al.]. -11. Ed. ver. São Paulo: Atual, 1990.

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 20 maio 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 2. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 1. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

2.4.3.1 Relatório – 31.08.2019

No sábado, dia 31 de agosto de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o quarto encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste. Neste dia, propomos atividades com o intuito de apresentas os conceitos de funções trigonométricas.

Inicialmente, expomos um breve resumo das aulas anteriores acerca de relações trigonométricas no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica. Ainda, relembramos os discentes das principais relações estudadas, utilizando questionamentos diretos em coletivo, principalmente sobre seno, cosseno e tangente. Denotamos na lousa, os diferentes modos de escritas das mesmas e para finalizar, explicamos aos alunos acerca dos sinais das relações em cada quadrante. Destaca-se a participação dos discentes na construção deste resumo.

Em sequência, para introduzir o conceito de funções trigonométricas, fizemos os seguintes questionamentos: “O que é função?”, “O que é domínio e contradomínio?” e “O que é imagem”, com o propósito de que os alunos lembrassem a definição de função. Percebemos que alguns estavam confusos com estes termos, então, resolvemos abordar no quadro a seguinte situação-problema:

“Maria vai toda manhã comprar pães doce. Cada pão doce custa 0,50 centavos. Se Maria comprar 5 pães, qual o valor que ela gastará? E 10 pães? Numa situação em que fosse n pães?”.

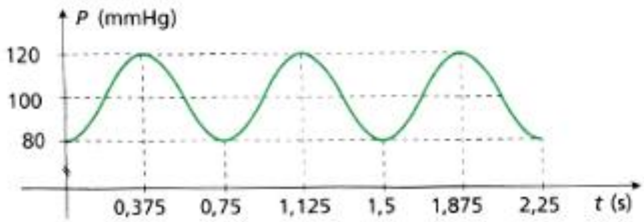
Exemplificamos esta situação, construindo uma tabela no quadro, relacionando a quantidade de pães com o valor a ser pago.

Quantidade de Pães	**Preço em R$**
1	0,50
2	1,00
⋮	⋮
n	$n \times 0{,}50$

Mostramos que essa relação é uma função, em que a quantidade de pães representa o domínio e o valor a ser pago representa a imagem dentro do contradomínio que é o conjunto dos números $\mathbb{R}$. Em seguida, apresentamos a seguinte situação-problema:

A variação da pressão sanguínea P (em $mmHg$, milímetro de mercúrio) de uma pessoa em função do tempo t (em s, segundo), é uma função cíclica, e cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco. A lei da função para certo indivíduo é definida por $P(t) = 100 - 20.cos\left(\frac{8\pi}{3}.t\right)$, em que o arco é dado em radiano.

Com o propósito de explicar o conceito de periodicidade expusemos o gráfico desta função:



Indagamos os alunos acerca do intervalo de cada batimento cardíaco e mostramos que este intervalo é 0,75 segundos. Propusemos aos alunos que encontrássemos a quantidade de batimentos por minuto e no quadro, mostramos por meio da regra da proporcionalidade que é 80 bpm. Explicamos que este intervalo é um ciclo e que conforme o gráfico mostra, o ciclo repete-se. Esta repetição foi associada com o conceito de congruência que fora estudado nas aulas interiores e denominada de período. Em seguida, expusemos alguns exemplos de gráficos com período indagamos os alunos acerca das propriedades de cada um.

Com o propósito de fixar este conceito e introduzir as funções trigonométricas, expusemos a função de Euler. Ao explicarmos inicialmente as propriedades desta função, os alunos apresentaram-se confusos e não souberam responder as indagações feitas, tal como: “Qual a imagem?” e “Qual o domínio e contradomínio”. A fim de sanar tais dúvidas, associamos esta função com o conceito de congruência e afirmamos que a característica da mesma é “enrolar a reta real”. Em seguida, retomamos desde o início as propriedades e mostramos que a função é periódica.

Na sequência, apresentamos a função seno, retomando a correspondência na circunferência trigonométrica. Explicamos por meio do gráfico, o domínio, contradomínio, imagem e período. Mostramos aos alunos, o máximo e mínimo da função, amplitude, os intervalos onde a função é crescente e decrescente, e indagamos ao final, acerca das características apresentadas com o propósito de fixação. Do mesmo modo, expusemos para os alunos a função cosseno.

Ao fim da exposição das propriedades de cada função, propomos alguns exercícios para os alunos com o propósito de explorar e reforçar os conceitos abordados. Os exercícios consistiam em observar a função dada e aplicar o ponto de máximo ou mínimo para obter a solução. Ao percorrer as carteiras para ajudar os alunos, percebemos a dificuldade de observarem os pontos de máximo e mínimo. Observavam, a expressão da função como um todo e não como uma função trigonométrica. Ainda, em um exercício, tiveram grande dificuldade de construir e resolver um sistema de equações lineares com duas incógnitas e duas expressões.

Ao percebemos esta dificuldade, incentivamos os alunos a resolverem sozinhos. Após um certo tempo, propomos a resolução na lousa. Corrigimos os exercícios com a ajuda dos alunos e explicando quando observar o ponto de máximo e mínimo.

Em seguida, com a ajuda do Software Geogebra, expusemos as transformações na função seno e cosseno. Para tal, levantamos os seguintes questionamentos: “O que acontece com o domínio da função seno se somarmos um valor ‘fora’ da função? E se multiplicarmos?”. Em seguida refizemos os mesmos questionamentos a respeito da função cosseno, se aconteceria da mesma forma que a função anterior, e com alguns exemplos semelhantes a função anterior, concluímos que as mesmas características se aplicam ao cosseno.

Por fim, expomos com o auxílio do *Geogebra* algumas das características da função tangente como intervalos de crescimento e decrescimento, período, entre outros e propomos a resolução do último exercício da lista o qual propunha a análise de um gráfico gerado pelas transformações de uma função trigonométrica, que no caso era o seno.

2.5 Módulo 3 – Geometria Analítica
2.5.1 Plano de aula - 14.09.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves
Lucas Campos de Araújo
Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, distância entre pontos, ponto médio e pontos colineares.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com sistema cartesiano ortogonal, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais;
- Localizar pontos no sistema cartesiano ortogonal;
- Calcular a distância entre pontos;
- Determinar o ponto médio de um segmento;
- Verificar a colinearidade entre três pontos quaisquer;
- Resolver problemas que envolvam distância no sistema cartesiano;
- Solucionar problemas que envolvam ponto médio e colinearidade.

Conteúdo: Geometria Analítica: sistema cartesiano ortogonal.

Recursos Didáticos: quadro, giz, folhas A4 e papel milimetrado.

Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1 (60 minutos)

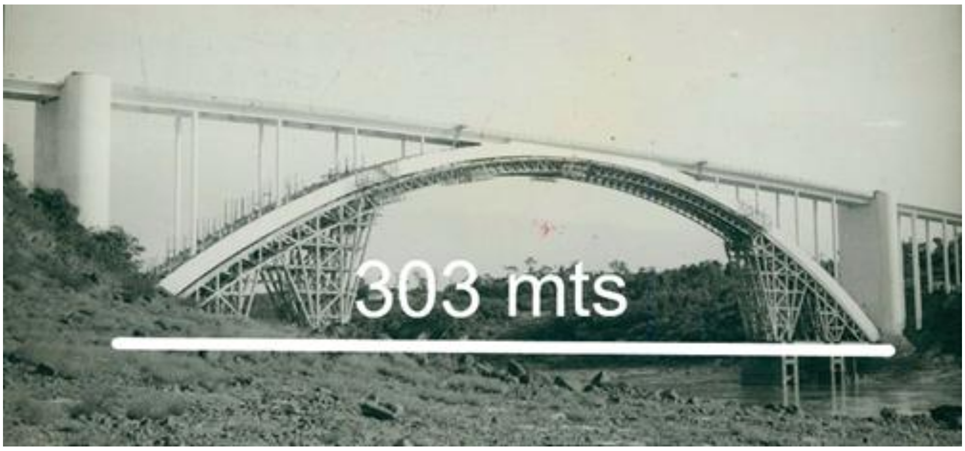
Num primeiro momento, organizaremos os alunos em grupos, em seguida, apresentaremos alguns fatos históricos acerca da Ponte da Amizade:

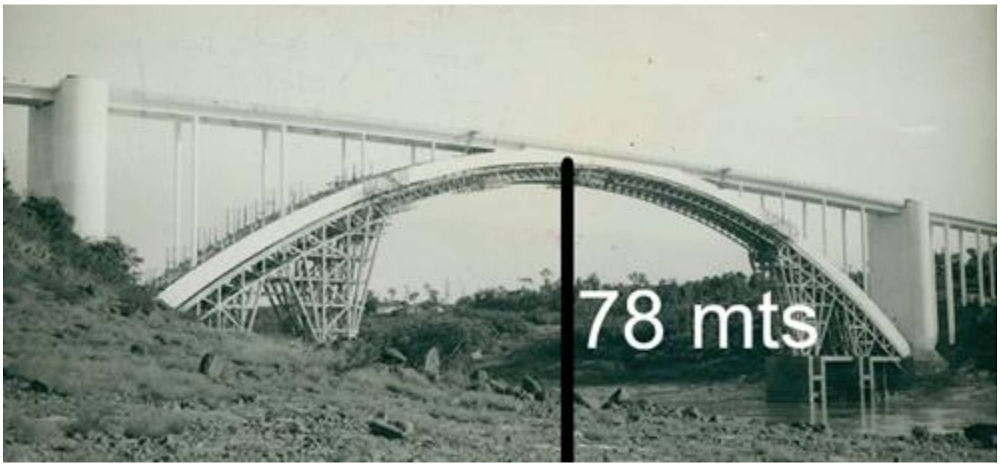
"A Ponte da Amizade, foi construída durante as décadas de 1950 e 1960. Liga a cidade de Foz do Iguaçu no Brasil e *Ciudad del Este* no Paraguai, passando sobre o rio Paraná. O local onde se encontra o canal entre Sete Quedas e Foz do Iguaçu era estreito, profundo e com águas revoltas. Suas variações de nível em condições normais chegavam (antes da construção da Barragem de Itaipu) até dez metros em 36 horas, resultando uma oscilação 30 cm por hora. Em função da rapidez de variações do rio Paraná foi definido que a ponte deveria ter vão livre de 18 metros acima do nível da água mesmo em grandes cheias.”

Figura 7: Ponte da Amizade

Fonte: http://www.pmfi.pr.gov.br/

Em sequência, apresentaremos as seguintes figuras contendo alguns aspectos técnicos sobre a ponte retirados do IBGE:





Feito isso, faremos aos alunos as seguintes perguntas utilizando a figura abaixo:

- “Considerado que há um carro parado exatamente no ponto A, indicado na figura abaixo, quais são as coordenadas deste carro?”
- “Qual é a altura em relação ao nível da água?”
- “Quantos metros faltam para chegar na metade do trajeto Brasil-Paraguai? E para concluir o trajeto?”

Após os questionamentos, distribuiremos a figura acima impressa em papel milimetrado para auxiliar nos cálculos. Enquanto os alunos trabalham, estaremos indo em suas carteiras para sanar as possíveis dúvidas.

Esperamos que os alunos observem que o ponto A equivale as coordenadas do vértice de uma função e que este vértice corresponde a coordenada $(276{,}2;\ 32)$, pois a metade do trajeto corresponde a $276{,}2$ metros e $151{,}5$ metros corresponde a metade do arco. Logo, o ponto A é: $276{,}2 - 151{,}5 = 124{,}7$ que corresponde à coordenada $(124{,}7;\ 32)$.

ETAPA 2 (40 minutos)

Nesta etapa, pretendemos apresentar o conceito de coordenada de um ponto no sistema cartesiano ortogonal. Para tal, iremos propor uma atividade prática, conforme abaixo:

- Iremos considerar o plano cartesiano como sendo a sala de aula, em que a origem do plano é a primeira carteira primeira fileira e cada fileira seguinte representa um incremento de uma unidade conforme imagem abaixo.

- Então escolheremos discentes aleatoriamente e pediremos quais são suas coordenadas no plano exemplificado.
- Posteriormente faremos o mesmo considerando os eixos negativos.

Em sequência iremos apresentar as seguintes definições e exemplos:

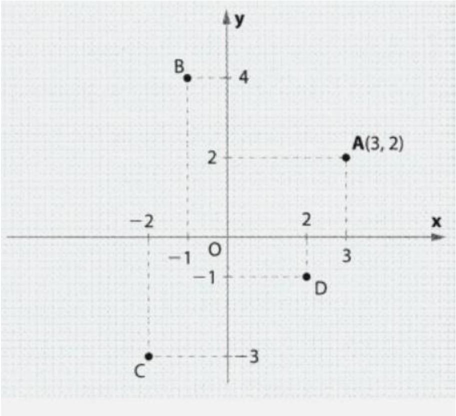
Definição:

Sejam $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ dois eixos perpendiculares entre si e com origem comum $\boldsymbol{O}$, diz-se que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ formam um sistema cartesiano ortogonal e o plano determinado por eles é chamado plano cartesiano.

Exemplos

Ao par ordenado de números reais:

- $(0,0)$ está associado o ponto $\boldsymbol{O}$;
- $(3,2)$ está associado o ponto $\boldsymbol{A}$;
- $(-1,4)$ está associado o ponto $\boldsymbol{B}$;
- $(-2,-3)$ está associado o ponto $\boldsymbol{C}$;
- $(2,-1)$ está associado o ponto $\boldsymbol{D}$.

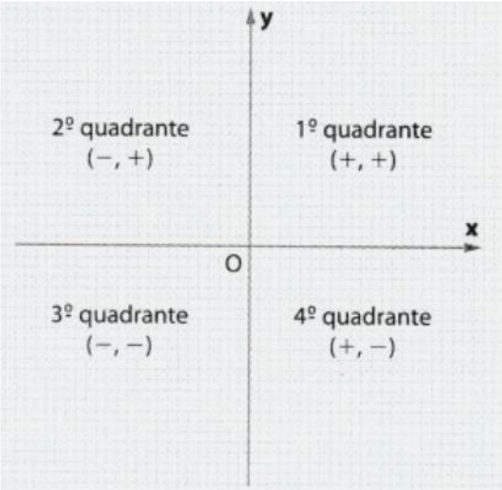


Considerando o ponto $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2})$, denotaremos que o número 3 é a coordenada $\boldsymbol{x}$ ou a **abscissa** do ponto $\boldsymbol{A}$, e o número 2 é a coordenada $\boldsymbol{y}$ ou a **ordenada** do ponto $\boldsymbol{A}$.

Junto aos exemplos faremos as seguintes observações:

Observações:

i. Os eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ chamam-se eixos coordenados e dividem o plano em quatro regiões chamadas quadrantes, cuja identificação é feita conforme a figura;



ii. Se o ponto $\boldsymbol{P}$ pertence ao eixo $\boldsymbol{x}$, suas coordenadas são $(a, 0)$, com $a \in \mathbb{R}$;

iii. Se o ponto $\boldsymbol{P}$ pertence ao eixo $\boldsymbol{y}$, suas coordenadas são $(0, b)$, com $b \in \mathbb{R}$.

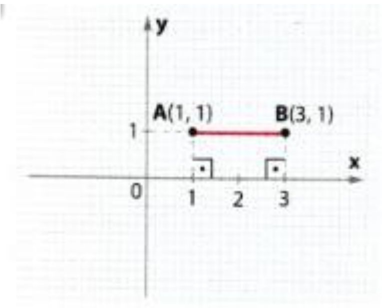
Em seguida, introduziremos o conceito de distância entre dois pontos. Para tal, retomaremos o plano cartesiano exemplificado na sala de aula e escolheremos dois discentes aleatoriamente, então faremos as seguintes indagações:

- Qual a distância entre os discentes?
- Como podemos calcular esta distância?

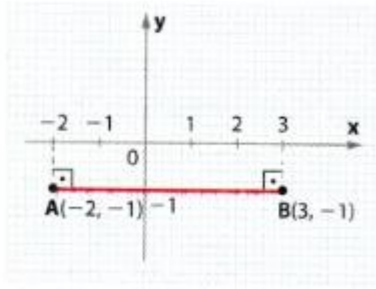
Em sequência ligaremos os dois discentes com um barbante e faremos os mesmos questionamentos, de modo que, os alunos relacionem que a distância entre os discentes ligados pelo barbante é equivalente ao comprimento do segmento de barbante determinado pelos mesmos, conforme a imagem.

Por conseguinte, retomaremos que dados dois pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, com $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$, podemos formar uma reta, os pontos que formam esta reta recebem coordenadas no plano cartesiano e por meio dessas coordenadas, podemos calcular a distância entre quaisquer pontos da reta, que é dada pela medida do segmento de reta por eles determinado.

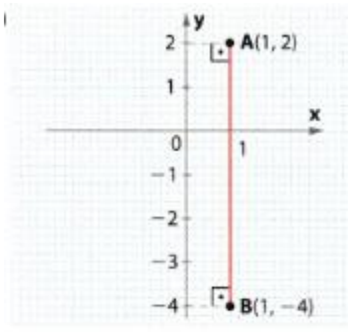
Então apresentaremos os seguintes exemplos, que serão resolvidos apenas com os conhecimentos prévios dos discentes a respeito de distância e o Teorema de Pitágoras:



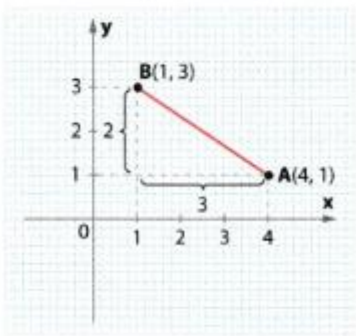
d(A, B) = 3 − 1 = 2



d(A, B) = 3 + 2 = 5



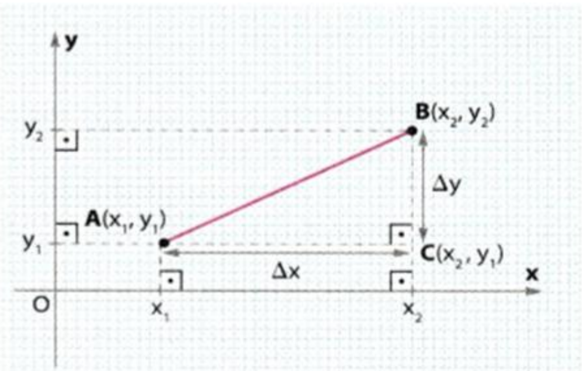
d(A, B) = 2 + 4 = 6

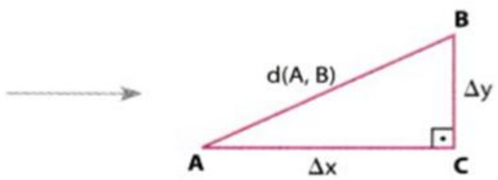


$[d(A, B)]^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{13}$

Então retomaremos que distância entre dois pontos **A** e **B,** com $\boldsymbol{A \neq B}$, é a medida do segmento que tem os dois pontos como extremidade. E denotaremos que como são dois pontos genéricos, isto é, sem valor, representamos as coordenadas desses pontos de maneira genérica, por exemplo, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ e $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$.

Logo, para a obtenção da distância, observamos que podemos determinar um triângulo retângulo tomando a reta que passa pelo ponto $\boldsymbol{B}$ e é ortogonal ao eixo $\boldsymbol{x}$ e a reta que passa pelo pelo ponto $\boldsymbol{A}$ e é ortogonal ao eixo $\boldsymbol{y}$, de modo que a interseção dessas retas é o ponto $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1})$, como mostra a figura seguir:





$a^2 = b^2 + c^2$

Denotaremos que segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ é a hipotenusa do triângulo $\boldsymbol{ABC}$ e a medida de $\boldsymbol{AB}$ corresponde à distância entre os pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ que queremos determinar. Para tal, utilizaremos o Teorema de Pitágoras:

$$[d(A, B)]^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Mostraremos que $\overline{\boldsymbol{AC}}$ corresponde a $x_2 - x_1$ e $\overline{\boldsymbol{BC}}$ corresponde a $y_2 - y\_1$. Portanto, a expressão para a distância entre dois pontos quaisquer é:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Observação: Denotaremos que duas distâncias entre dois pontos são iguais se, e somente se, seus quadrados também são, ou seja, a operação de extração da raiz é desnecessária para verificar a igualdade, o que economiza tempo na resolução.

Exemplo

Um ponto $\boldsymbol{P(a,2)}$ é equidistante dos pontos $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{3},\boldsymbol{1})$ e $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{2},\boldsymbol{4})$. Determine a abscissa do ponto $\boldsymbol{P}$**.**

Como $\boldsymbol{P}$ é equidistante de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, devemos ter:

Método de extração da raiz:

$$d(P,A) = d(P,B)$$

$$\sqrt{(3-a)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(2-a)^2 + (4-2)^2}$$

$$\sqrt{(3-a)^2 + 1} = \sqrt{(2-a)^2 + 4}$$

$$(3-a)^2 + 1 = (2-a)^2 + 4$$

$$9 - 6a + a^2 + 1 = 4 - 4a + a^2 + 4$$

$$a^2 - a^2 - 6a + 4a = 4 + 4 - 9 - 1$$

$$-2a = -2$$

$$a = 1$$

Método sem extração da raiz:

$$d(P,A) = d(P,B)$$

$$[(P,A)]^2 = [d(P,B)]^2$$

$$(3-a)^2 + 1 = (2-a)^2 + 4$$

$$9 - 6a + a^2 + 1 = 4 - 4a + a^2 + 4$$

$$a^2 - a^2 - 6a + 4a = 4 + 4 - 9 - 1$$

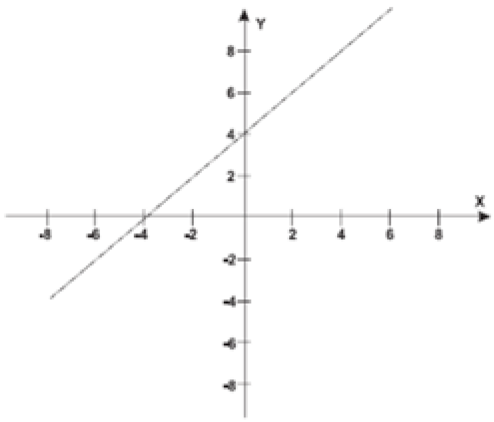
$$-2a = -2$$

$$a = 1$$

ETAPA 3 (50 minutos)

Nesta etapa pretendemos propor alguns exercícios envolvendo os conceitos abordados.

1. Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas, esse bairro se localiza no segundo quadrante e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta da equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que $5km$.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

a) $(-5, 0)$
b) $(-3, 1)$
c) $(-2, 1)$
d) $(0, 4)$
e) $(2, 6)$

Resolução

Como o hospital se localiza em $P = (-5,5)$ e deseja-se que a distância entre a estação e o hospital e linha reta seja menor que $5km$, esperamos que os discentes analisem os pontos do 2º quadrante que pertencem a reta dada, conforme segue:

$$\begin{cases} A \rightarrow x = -4 \leftrightarrow y = 0 \\ B \rightarrow x = -3 \leftrightarrow y = 1 \\ C \rightarrow x = -2 \leftrightarrow y = 2 \\ D \rightarrow x = -1 \leftrightarrow y = 3 \\ E \rightarrow x = 0 \leftrightarrow y = 4 \end{cases}$$

E ao calcularem a distância destes pontos em relação ao ponto P obtenham:

$$d(A,P) = \sqrt{\left(-5-(-4)\right)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{26} > 5$$

$$d(B,P) = \sqrt{\left(-5-(-3)\right)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} < 5$$

$$d(C,P) = \sqrt{\left(-5-(-2)\right)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{18} < 5$$

$$d(D,P) = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20} < 5$$

$$d(E,P) = \sqrt{(-5-0)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26} > 5$$

Logo os pontos possíveis, em relação ao analisador, para implantar a estação são $B = (-3,1)$, $C = (-2,2)$ e $D = (-1,3)$. Mas nas alternativas o único presente é o ponto B representado pela letra b).

Outra resolução possível é por meio da análise das alternativas dadas, temos que apenas os pontos representados pelas letras b), d) e e) pertencem a reta $y = x + 4$ e calculando a distância destes em relação ao ponto P temos que apenas a alternativa b) satisfaz a condição da distância máxima de $5km$ em linha reta entre a estação e o hospital.

2. Sabendo que $P(2m+1, -3m-4)$ pertence ao terceiro quadrante, determine os possíveis valores reais de $\boldsymbol{m}$.

Resolução

Esperamos que os discentes se recordem que no terceiro quadrante as coordenas de um ponto são do tipo $x, y < 0$, ou seja:

$$2m + 1 < 0 \qquad\qquad -3m - 4 < 0$$

$$2m < -1 \qquad\qquad -3m < 4$$

$$m < -\frac{1}{2} \qquad\qquad m > -\frac{4}{3}$$

$$m \in \left] -\frac{4}{3}, -\frac{1}{2} \right[$$

3. Determine quais são as coordenadas genéricas em função de **a**, dos pontos pertencentes à bissetriz dos quadrantes ímpares e pares.

a) Ímpar $P = (a, -a)$ e Par $P = (a, a)$

b) Ímpar $P = (a, a)$ e Par $P = (0, a)$

c) Ímpar $P = (a, a)$ e Par $P = (a, -a)$

d) Ímpar $P = (0, -a)$ e Par $P = (0, a)$

e) Ímpar $P = (-a, -a)$ e Par $P = (a, a)$

Resolução

Esperamos que os discentes lembrem que os quadrantes ímpares são o 1º e 3º e se o ponto $P(x, y)$ pertence a bissetriz dos quadrantes temos que suas coordenadas são iguais, ou seja, $x = y$ e em função de a teríamos $P = (a, a)$, com $a \in \mathbb{R}$. E que se lembrem que os quadrantes pares são o 2º e o 4º e se o ponto $P(x, y)$ pertence a bissetriz dos quadrantes temos que suas coordenadas são simétricas, ou seja, $x = -y$ e em função de a teríamos $P(a, -a)$. Logo a alternativa $c)$ é a correta.

ETAPA 4 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos introduzir o conceito de ponto médio de um segmento de reta e suas coordenadas no plano cartesiano ortogonal e a condição de alinhamento de três pontos.

Para tal, retomaremos o exemplo do barbante e faremos os seguintes questionamentos aos discentes:

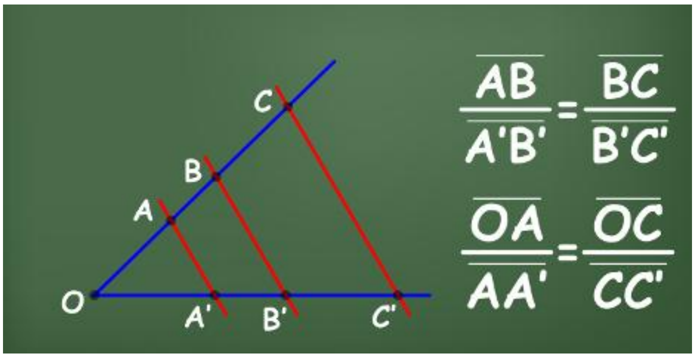
- Qual é o ponto médio do segmento de barbante determinado pelos alunos?
- Como podemos calcular este ponto de modo mais geral?

No intuito de que notem que o ponto médio do segmento de barbante determinado é justamente a metade do comprimento do barbante e que podemos calcular este valor tomando a média entre a soma dos valores das abscissas e ordenadas.

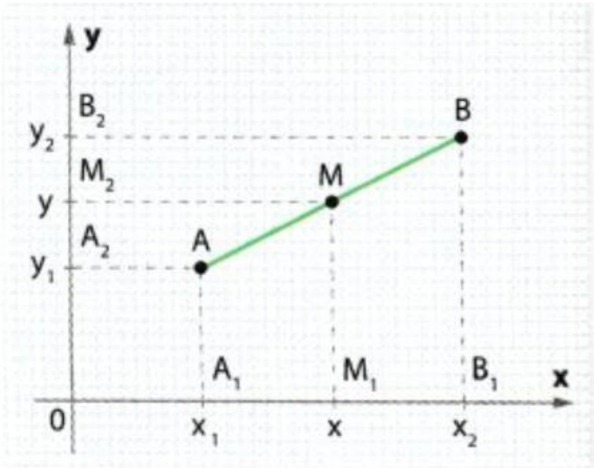
Em sequência, formalizaremos que dado um segmento de reta $\overline{AB}$ tal que $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ são pontos distintos, podemos determinar as coordenadas de um ponto $\boldsymbol{M}$, denominado ponto médio de $\overline{AB}$. Para tal, vamos relembrar o teorema de Tales, conforme segue:

Teorema de Tales

Retas paralelas cortadas por transversais formam segmentos correspondentes proporcionais.



Então, ilustraremos a situação proposta pelo seguinte gráfico:



E utilizando as informações gráficas com o teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{M_1B_1}} \rightarrow 1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \rightarrow x - x_1 = x_2 - x \rightarrow 2x = x_2 + x_1 \rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{A_2M_2}}{\overline{M_2B_2}} \rightarrow 1 = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \rightarrow y - y_1 = y_2 - y \rightarrow 2y = y_2 + y_1 \rightarrow y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Assim concluiremos que dado um segmento de extremidades $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ o seu ponto médio M tem abscissa $x = \frac{x_2+x_1}{2}$ e ordenada $y = \frac{y_2+y_1}{2}$.

Em sequência iremos expor os seguintes exemplos:

Exemplos

1. Vamos determinar $\boldsymbol{M}$, ponto médio de $\overline{AB}$, nos seguintes casos:

a) $A = (3, -2)$ e $B = (-1, -6)$

Considerando $M = (x, y)$ temos:

$$x = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

$$y = \frac{-2 + (-6)}{2} = -4$$

Logo, $M = (1, -4)$.

b) $A = (1, 2)$ e $B = (3,4)$

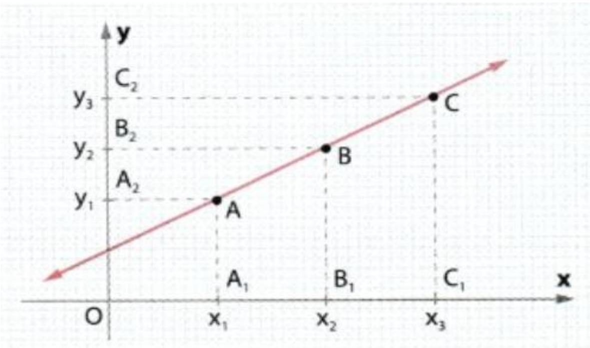
Considerando $M = (x, y)$ temos:

$$x = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$y = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Logo, $M = (2,3)$.

Por conseguinte, iremos apresentar a condição para alinhamento de três pontos. Para tal, consideraremos os pontos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ alinhados conforme a figura:



Assim, novamente pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$

Comparando as duas expressões anteriores, obtemos:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$$

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 0$$

$$x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_3 + x_2y_1 + x_1y_3 - x_1y_1 = 0$$

$$x_3y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 - x_1y_2 - x_2y_3 = 0$$

A última igualdade corresponde ao determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

A partir disso, concluiremos que se três pontos A, B e C são colineares, então:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Denotaremos, também, que podemos verificar se três pontos A, B e C são colineares observando o coeficiente angular das retas determinadas por AB e BC, pois se este coeficiente for igual então os pontos são colineares. Para tal, iremos expor que o coeficiente angular de uma reta pode ser calculado por $m = \frac{y_1 - y_0}{x - x_0}$.

Para ilustrar os conceitos apresentados proporemos o seguinte exemplo.

Exemplo

1. Vamos verificar se os pontos $A = (-3{,}5)$, $B = (1{,}1)$ e $C = (3, -1)$ são colineares.

Usando as coordenadas dos pontos dados, iremos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 15 - 1 - 3 - 5 - 3 = 15 - 15 = 0$$

Logo, como $D = 0$ temos que os pontos estão alinhados.

Observação: Denotaremos que é possível verificar o alinhamento geometricamente, mas é o processo analítico que garante a propriedade.

Ainda, iremos expor que dados três pontos quaisquer, não colineares, $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$. Como esses pontos não são colineares, ou seja, não estão numa mesma reta, eles determinam um triângulo. A área desse triângulo será dada por:

$$A = \frac{1}{2}|\det(D)| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{matrix}\right\|$$

Exemplo

1. Dado o triângulo de vértices $A = (4\,,0)$, $B = (0\,,0)$ e $C = (0\,,6)$, calcule sua área.

Iremos denotar que dado as informações do enunciado temos:

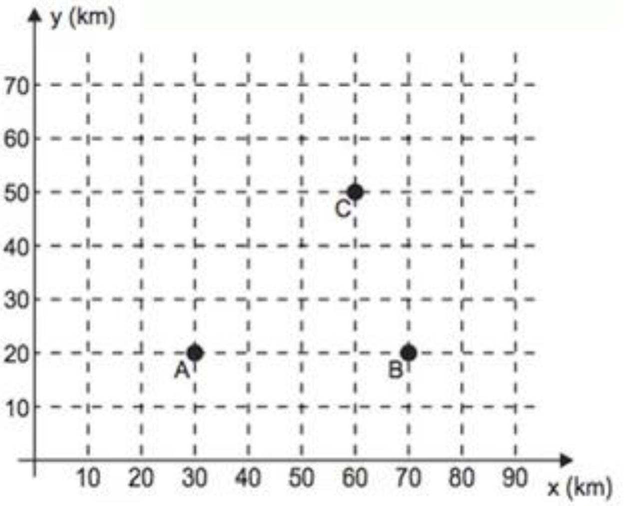
$$A = \frac{1}{2}|\det(D)| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|-24| = 12u.a.$$

ETAPA 5 (50 minutos)

Nesta etapa iremos propor aos discentes as seguintes situações-problema:

Exercícios:

1. Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65, 35)

b) (53, 30)

c) (45, 35)

d) (50, 20)

e) (50, 30)

Resolução

A torre deve ser construída em um ponto P equidistante simultaneamente aos pontos $A = (30,20)$, $B = (70,20)$ e $C = (60,50)$. Esperamos que os discentes notem que os pontos equidistantes simultaneamente a A e B pertencem a reta que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$ e por C (denominada mediatriz se pensarmos no triângulo ABC). Logo essa reta passa pela coordenada $x = \frac{30+70}{2} = 50$, abscissa do ponto médio de $\overline{AB}$ e os pontos pertencentes a ela são do tipo $P_i = (50, y_i)$.

E como o ponto C deve ser, também, ao ponto P temos que $d(PA) = d(PC)$ ou $d(P,B) = d(P,C)$, em ambos os casos temos o mesmo resultado:

$$d(P,A) = d(P,C)$$

$$\sqrt{(50-30)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(50-60)^2 + (y-50)^2}$$

$$400 + (y-20)^2 = 100 + (y-50)^2$$

$$400 + y^2 - 40y + 400 = 100 + y^2 - 100y + 2500$$

$$60y = 1800$$

$$y = \frac{1800}{60} = 30$$

Portanto a antena deve ser instalada no ponto $P(50,30)$ representado pela alternativa e).

2. Dado os pontos $A = (1,2)$, $B = (2,4)$ e $C = (4,1)$ determine a área da figura que delimitam.

Resolução

Esperamos que os discentes utilizem o conceito apresentado anteriormente que associa a área de um triângulo com o determinante de uma matriz com as coordenadas de seus vértices e concluam que:

$$A = \frac{1}{2}|\det(D)| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|-7| = \frac{7}{2} = 3{,}5u.a.$$

3. Considere o triângulo ABC, onde $A = (2,3)$, $B = (10,9)$ e $C = (10,3)$ representam as coordenadas dos seus vértices no plano cartesiano. Se M é o ponto médio do lado AB, então, a medida de MC vale:

a) $2\sqrt{3}$

b) 3

c) 5

d) $3\sqrt{2}$

e) 6

Resolução

Esperamos que os discentes se utilizem dos conceitos de distância entre pontos e ponto médio, apresentados anteriormente, e concluam que como $M = (x, y)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, temos:

$$x = \frac{2 + 10}{2} = 6$$

$$y = \frac{3 + 9}{2} = 6$$

Logo como sabemos que $M = (6,6)$ e $C = (10, 3)$, podemos calcular$\overline{MC}$ conforme segue:

$$d(MC) = \sqrt{(10 - 6)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5u.m.$$

4. Determine x de modo que os pontos $A = (3,5)$, $B = (1,3)$ e $C = (x, 1)$ sejam os vértices de um triângulo.

Resolução

Esperamos que os discentes lembrem que se três pontos estão alinhados, então $\det(D) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$9 + 5x + 1 - 3x - 3 - 5 \neq 0$$

$$2x \neq -2$$

$$x \neq -1$$

5. Considere num sistema de coordenadas cartesianas o polígono com vértices nos pontos $A = (-3, -3)$, $B = (3,1)$, $C = (-3,3)$ e $D = (-1, -1)$. O quadrilátero determinado pelos pontos médios dos segmentos AB, BC, CD e DA, nesta ordem, é um:

a) Losango

b) Retângulo

c) Trapézio

d) Quadrado

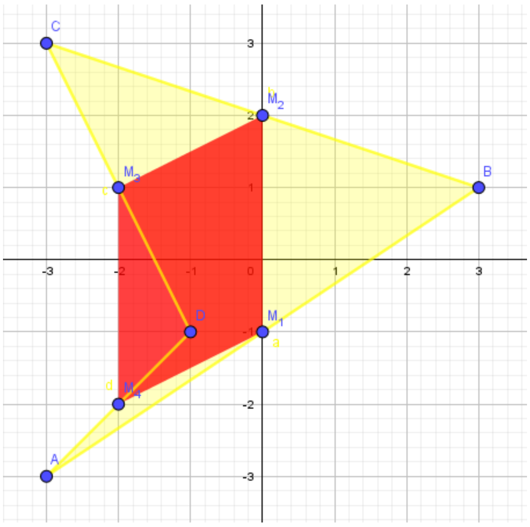
e) Paralelogramo

Resolução

Esperamos que os discentes se utilizem do conceito de ponto médio e concluam que:

- O ponto médio de $\overline{AB}$ é $M_1 = \left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = (0, -1)$;
- O ponto médio de $\overline{BC}$ é $M_2 = \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (0, 2)$;
- O ponto médio de $\overline{CD}$ é $M_3 = \left(\frac{-1+(-3)}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (-2, 1)$;
- O ponto médio de $\overline{DA}$ é $M_4 = \left(\frac{-3+(-1)}{2}, \frac{-3+(-1)}{2}\right) = (-2, -2)$.

Os pontos médio encontrados determinam no plano cartesiano a seguinte figura:



Logo temos um paralelogramo que corresponde a alternativa e). Denotaremos ainda que existem outros modos de resolver este problema.

REFERÊNCIAS

IBGE. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/bibliotecacatalogo.html?id=445494&view=detalhes>. Acesso em: 15 jul 2019.

Ponte da Amizade: um contexto de abordagem amtemática. Universidade Estadual de Londrina – UEL. 2010. Disponível em: http://www.uel.br/grupopesquisa/grupemat/docs/RE02_epmem2010.pdf. Acesso em 15 jul. 2019.

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 20 jul 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 3. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Vol. 3. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

2.5.1.1 Relatório – 14.09.2019

No sábado, dia 14 de setembro de 2019, realizamos o quinto encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste. Neste dia, iniciamos o segundo módulo de aulas que abrange o conteúdo de geometria analítica.

Inicialmente, expomos aos estudantes uma imagem da ponte da amizade que liga Brasil e Paraguai, e apontamos algumas características da mesma e alguns valores relacionados a suas medidas, altura, extensão, e comprimento do arco, e na sequência apresentamos um problema relacionado a ponte para introduzir o conceito de plano cartesiano, e durante o processo de resolução contamos com a participação dos estudantes.

Em seguida utilizamos a sala de aula para construirmos um plano cartesiano, em primeiro momento apenas com valores positivos para o eixo das ordenadas e das abscissas, então tomamos a parede do quadro como sendo o eixo das abscissas(x) e a parede da janela como o eixo das ordenadas(y), e cada carteira da fila da janela correspondiam a um ponto do eixo Y assim como a primeira carteira de cada fila correspondia a um ponto do eixo X, então escolhemos estudantes aleatoriamente para responder qual era sua coordenada no plano, questionamos aos estudantes qual era a sua distância em relação ao colega que estava à frente ou ao lado.

Na sequência refizemos o procedimento, agora tomando os valores negativos do plano, e repetimos os questionamentos em relação a distância, ao final desta etapa utilizamos o Geogebra para mostrar todos esses pontos no plano cartesiano. Voltamos ao primeiro exemplo e agora escolhemos dois alunos sentados na diagonal e com o auxilio de um barbante perguntamos aos alunos se era possível medir essa distância e como faríamos, alguns alunos levantaram a ideia de utilizar a fórmula da distância entre os pontos, questionados o porquê daria certo disseram que haviam decorado, então mostramos a eles como encontrar essa fórmula e que ela tem ligação ao Teorema de Pitágoras.

Posteriormente, utilizando novamente o Geogebra mostramos aos discentes os quadrantes do plano cartesiano e colocamos alguns pontos para que ficasse mais visível, em seguida utilizamos um exemplo para mostrar que se dados duas distâncias entre dois pontos serão iguais se, e somente se, os seus quadrados são congruentes.

Em seguida, entregamos aos discentes a folha de exercícios e pedimos para que eles resolvessem os três primeiros que na sequência iríamos corrigi-los, após o intervalo fizemos a correção do primeiro exercício, pois percebemos que eles estavam com mais dificuldade de resolvê-lo, e posteriormente corrigimos os dois restantes que havíamos solicitado.

Fazendo uso novamente do barbante e com o exemplo que havia utilizado anteriormente, fizemos o seguinte questionamento, se quiséssemos encontrar o ponto médio desse segmento como faríamos? De pronto os estudantes disseram que poderíamos dobrar o barbante ao meio assim teríamos o ponto médio, perguntamos então de uma forma mais genérica seria possível de fazer? E para resolver tal dúvida utilizamos do teorema de Tales para mostrarmos a proporcionalidade dos segmentos formados.

Utilizando da proporcionalidade, mostramos aos alunos a condição de alinhamento de três pontos, e mostramos como saber se os pontos são colineares utilizando determinante de matriz, expomos também como encontrar o coeficiente angular de uma reta qualquer, após este procedimento exemplificamos no quadro para melhor fixarem a relação. Expomos também que se três pontos não colineares estiverem no plano conseguimos transformá-lo em um triângulo e a partir disso calcular a área desta figurar utilizando de uma relação entre o determinante da matriz.

Finalizamos a aula deixando alguns minutos para que os estudantes terminassem de resolver os exercícios de sala, e como não daria tempo de corrigi-los nesta aula informamos que no início da próxima aula iremos fazer as correções e sanar as possíveis dúvidas.

2.5.2 Plano de aula - 21.09.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves
Lucas Campos de Araújo
Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, inclinação da reta, coeficiente angular da reta, formas da equação da reta, posições relativas entre retas, distância de um ponto a uma reta.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com sistema cartesiano ortogonal, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma reta no plano cartesiano;
- Obter o coeficiente angular de uma reta no plano cartesiano ortogonal;
- Manipular a equação da reta em formas diversas;
- Caracterizar as posições relativas entre retas;
- Calcular a distância entre um ponto e uma reta no plano cartesiano ortogonal;
- Resolver problemas que envolvam os conceitos sobre reta e ponto no plano cartesiano.

Conteúdo: Geometria Analítica: sistema cartesiano ortogonal.

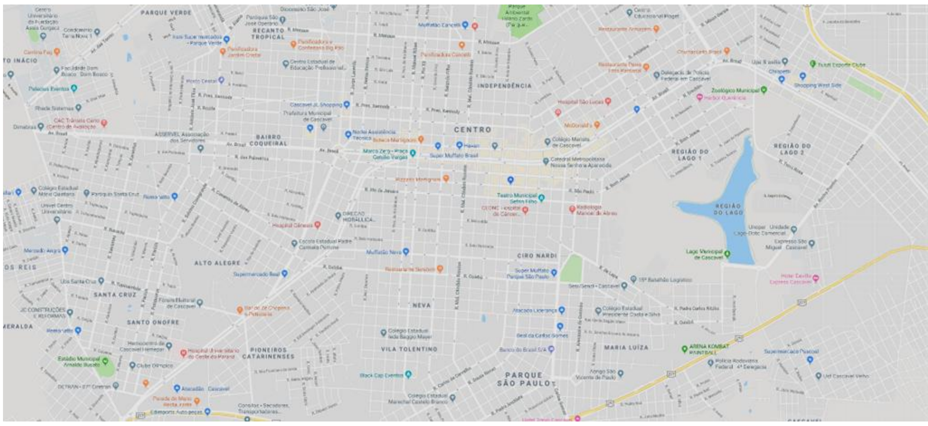
Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1 (40 minutos)

Nesta etapa, pretendemos apresentar o conceito de inclinação e coeficiente angular de uma reta.

Para tal, faremos uma contextualização utilizando um mapa da cidade de Cascavel-PR, conforme figura abaixo.

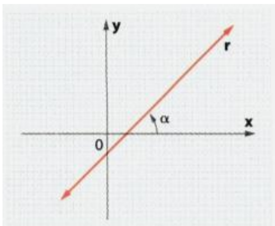


Proporemos aos discentes os seguintes questionamentos:

- O mapa apresenta ruas na vertical ou somente na horizontal? Existem ruas na diagonal? Todas as ruas são retas?

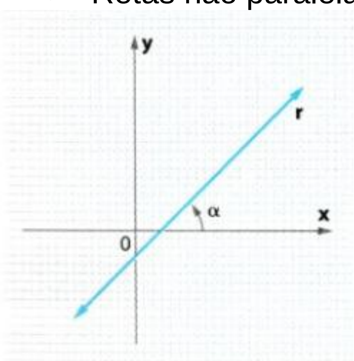
Esperamos que os discentes notem que algumas ruas se cruzam e outras não se interceptam. Ainda que, existem ruas na vertical, horizontal e diagonal no mapa projetado em duas dimensões.

Então, para introduzir o coeficiente angular de uma reta, iremos supor α como a medida do ângulo que a rua r forma com o eixo x. E denotaremos que a medida α do ângulo é considerada do eixo x para a reta r, no sentido anti-horário, e denomina-se inclinação da reta r.

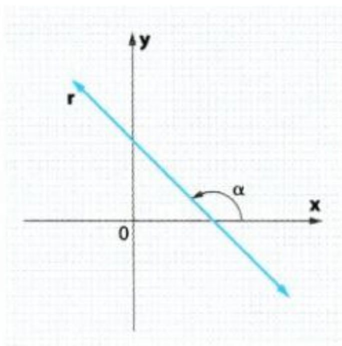


Assim poderemos denotar à medida da inclinação de r nos seguintes casos, utilizando o Geogebra conforme abaixo:

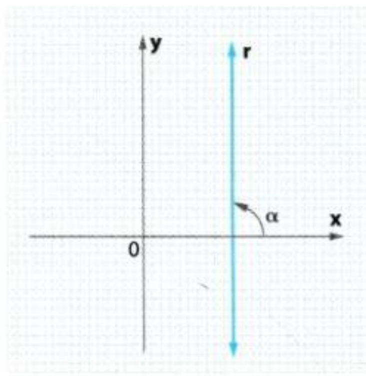
- Retas não paralelas ao eixo x



$0° < \alpha < 90°$

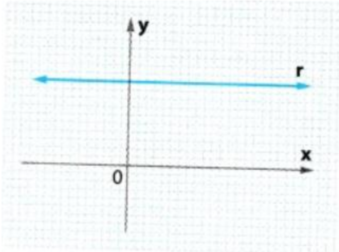


$90° < \alpha < 180°$



$\alpha = 90°$

- Retas paralelas ao eixo $\boldsymbol{x}$



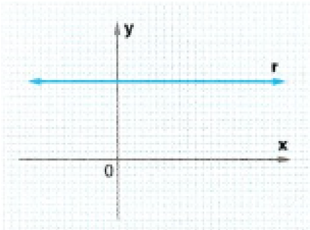
Então concluiremos que, para cada reta $\boldsymbol{r}$ no plano cartesiano ortogonal, o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ é único e tal que $0° \leq \alpha \leq 180°$.

Por conseguinte, definiremos que o **coeficiente angular** ou a **declividade** dessa reta $\boldsymbol{r}$ é o número real $\boldsymbol{m}$ que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação $\boldsymbol{\alpha}$, ou seja:

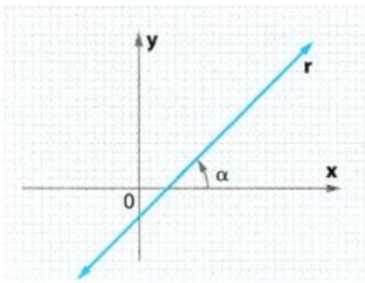
$$m = tg(\alpha)$$

Vamos denotar alguns casos, considerando $0° \leq \alpha \leq 180°$, conforme segue:

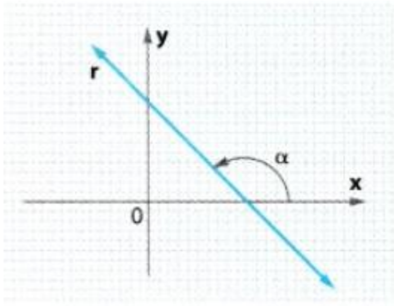
- Para $\alpha = 0°$, temos $m = tg(\alpha) = tg(0°) = 0$, ou seja, temos uma reta de valor constante;



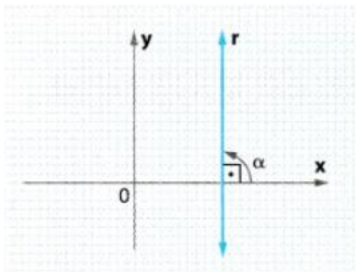
- Para $0° < \alpha < 90°$, temos $m = tg(\alpha) > 0$, ou seja, temos uma reta de valor crescente;



- Para $90° < \alpha < 180°$, temos $m = tg(\alpha) < 0$, ou seja, temos uma reta de valor decrescente;



- Para $\alpha = 90°$, temos que $m = tg(\alpha)$ assume um valor que tende ao infinito e, muitas vezes, é apresentado como indefinido, portanto assumimos que a reta $\boldsymbol{r}$ é vertical em relação ao eixo x e não tem declividade.

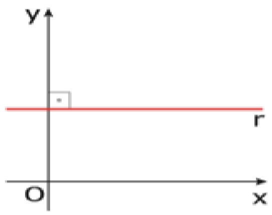


Em sequência, iremos apresentar os seguintes exemplos:

Exemplos:

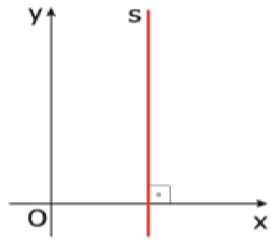
1. Determinar o coeficiente angular das retas nos seguintes casos:

a)



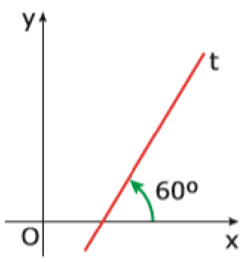
$\alpha_r = 0° \rightarrow m_r = tg(\quad _r) = tg(0°) = 0$

b)



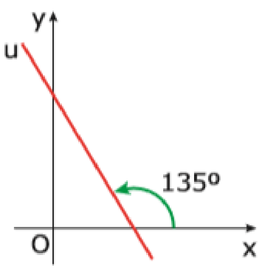
$\alpha_s = 90° \rightarrow m_s = tg(\alpha_s)$ é indefinido

c)



$\alpha_t = 60° \rightarrow m_t = tg(\alpha_t) = tg(60°) = \sqrt{3}$

d)



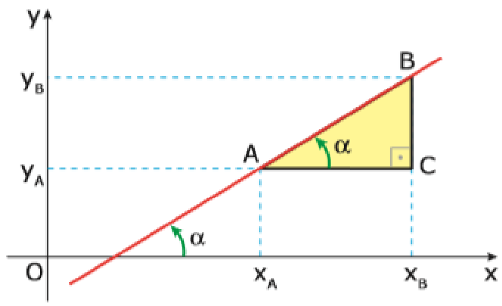
$\alpha_u = 135° \rightarrow m_u = tg(\alpha_u) = tg(135°) = -1$

Denotaremos também que é possível obter o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos.

Como para $\alpha = 0°$ (reta horizontal) a declividade é nula e para $\alpha = 90°$ (reta vertical) não há declividade, vamos analisar os casos de $0° < \alpha < 90°$ e $90° < \alpha < 180°$, conforme segue:

- **Caso $0° < \alpha < 90°$:**

Seja r a reta determinada por $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e seja $C = (x_2, y_1)$, conforme a figura:



No triângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

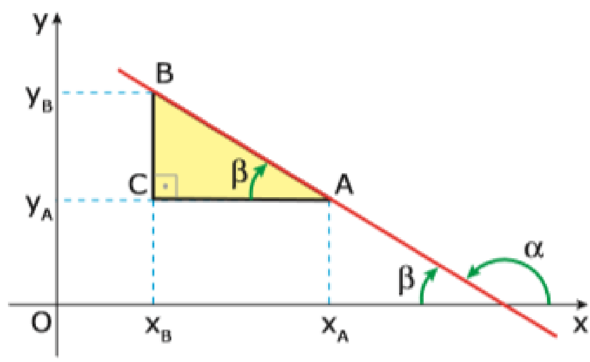
$$tg(\alpha) = \frac{d(C,B)}{d(A,C)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Então o coeficiente angular é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

- **Caso $90° < \alpha < 180°$:**

Seja r a reta determinada por $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e seja $C = (x_2, y_1)$, conforme a figura:



No triângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$tg(\beta) = \frac{d(C,B)}{d(C,A)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$$

Como $tg(\beta) = tg(180° - \alpha) = -tg(\alpha)$, temos:

$$-tg(\alpha) = tg(\beta)$$

$$-tg(\alpha) = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$$

$$tg(\alpha) = -\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Então o coeficiente angular é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

A partir desses resultados concluiremos que, se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ são dois pontos distintos quaisquer na reta $\boldsymbol{r}$, que não é paralela ao eixo y, a declividade ou o coeficiente angular de $\boldsymbol{r}$ é dado por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Em sequência apresentaremos os seguintes exemplos:

Exemplos:

1. Qual o coeficiente angular das retas que passam nos seguintes pontos:

a) $A = (2,1)$ e $B = (4,9)$

$$m_{AB} = \frac{9-1}{4-2} = \frac{8}{2} = 4$$

b) $A = (-1,2)$ e $B = (0,5)$

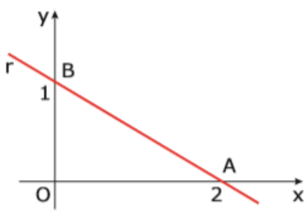
$$m_{AB} = \frac{5-(-1)}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$$

ETAPA 2 (30 minutos)

Nesta etapa, pretendemos propor algumas situações-problema envolvendo o conteúdo abordado.

Exercícios

1. Determine o coeficiente angular da reta $\boldsymbol{r}$ na figura.



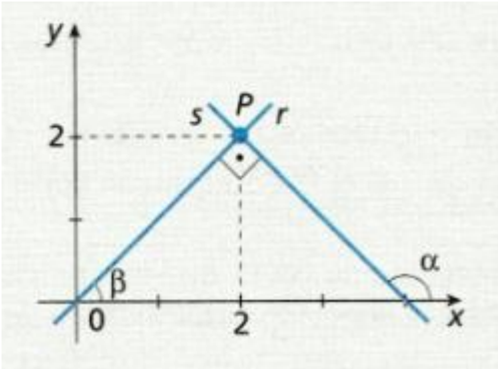
Resolução

Esperamos que os discentes identifiquem que os pontos tem as coordenadas $A = (2,0)$ e $B = (0,1)$.

Logo podem calcular o coeficiente angular, como segue:

$$m_r = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

2. Determine o valor de $m_r \times m_s$, sabendo que m_r e m_s correspondem, respectivamente, ao coeficiente angular das retas r e s apresentadas na figura.



Resolução

Esperamos que os discentes percebam que as coordenadas dos pontos dados são $P = (2,2)$ e $O = (0,0)$, assim podem calcular o coeficiente da reta r, como segue:

$$m_r = \frac{0-2}{0-2} = 1$$

Como não temos dois pontos conhecidos da reta s, esperamos que os discentes utilizem a informação do coeficiente encontrado, pois:

$$1 = m_r = tg(\beta) \rightarrow \beta = 45°$$

Pela propriedade do ângulo externo temos $\alpha = \beta + 90° = 135°$, assim:

$$m_s = tg(135°) = -1$$

Logo, $m_r \times m_s = 1 \times (-1) = -1$. Denotaremos que esse produto comprova que essas retas são perpendiculares e que pode ser utilizado como propriedade para retas perpendiculares, ou seja, que formam um ângulo de 90° entre si, de modo a não precisar do raciocínio anterior.

3. Seja r a reta determinada pelos pontos $A = (k, 4)$ e $B = (0,1)$, com coeficiente angular $m = 3$. Determine o valor de k.

Resolução

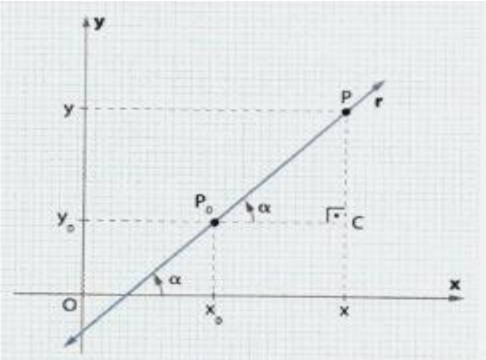
Esperamos que os discentes se utilizem do coeficiente angular dado para encontrar o valor de k, conforme segue:

$$m = 3 = \frac{1-4}{0-k} = \frac{-3}{-k} = \frac{3}{k} \rightarrow k = 1$$

ETAPA 3 (40 minutos)

Nesta etapa, pretendemos apresentar a equação da reta quando são conhecidos um ponto $P(x, y)$ e a declividade m da reta.

Para tal, tomaremos um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e a declividade m que determinam uma reta r. Ainda, consideraremos $P = (x, y)$ um ponto genérico dessa reta, temos que :



$$tg(\alpha) = \frac{d(C,P)}{d(P_0,C)}$$

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ainda, faremos as seguintes observações:

- A equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ independe de m ser positivo ou negativa e da localização do ponto P_0;
- Se a reta é paralela ao eixo x, temos que $m = 0$ e a equação da reta será dada por $y = y_0$;
- Se a reta é paralela ao eixo y, todos os pontos da reta têm a mesma abscissa e a equação será dada por $x = x_0$.

Então iremos expor o seguinte exemplo:

Exemplo

1. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (-1{,}4)$ e tem coeficiente angular 2.

Resolução

Usando a equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$ e as informações do enunciado, temos:

$$y - 4 = 2\big(x - (-1)\big) \rightarrow y = 2x + 2 + 4 \rightarrow 2x - y + 6 = 0$$

2. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (-1, -2)$ e $B = (5,2)$.

Resolução

Usando a expressão $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ e as informações do enunciado, temos:

$$m = \frac{2 - (-2)}{5 - (-1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Agora tomando a expressão $y - y_0 = m(x - x_0)$ e o ponto A dado, temos:

$$y - (-2) = \frac{2}{3}\big(x - (-1)\big) \to y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1) \to \frac{2}{3}x - y - \frac{4}{3} = 0 \to 2x - 3y - 4 = 0$$

ETAPA 4 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresenta as diferentes formar de expressão a equação da reta.

- **Forma reduzida da equação da reta**

Retomaremos a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ e tomaremos o ponto particular $(0, n)$, isto é, o ponto em que a reta intersecta o eixo y, assim obtemos:

$$y - n = m(x - 0)$$
$$y - n = mx$$
$$y = mx + n$$

em que o número real n, que é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo y, é chamado de **coeficiente linear**. Denotaremos que essa forma é especialmente importante, pois permite obter o coeficiente angular da reta a partir de uma equação. Ainda, que a equação reduzida das retas que passam pela origem do sistema cartesiano ortogonal tem como equação $y = mx$.

Exemplos

1. A expressão $y = 2x + 3$ representa a equação reduzida da reta que tem coeficiente angular $m = 2$ e linear $n = 3$.

2. A expressão $y = \frac{5}{7}x + 2$ representa a equação reduzida da reta que tem coeficiente angular $m = \frac{5}{7}$ e linear $n = 2$.

- **Equação geral da reta**

Denotaremos que toda reta do plano possui uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0$$

em que a, b e c são constantes com a e b não simultaneamente nulos.

Exemplos

1. A reta $y = -\frac{3}{4}x + 1$ pode ser escrita na forma geral por $3x + 4y - 4 = 0$.

2. A reta $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ pode ser dada na forma geral por $5x + 2y - 10 = 0$.

3. A reta $y = 5$ pode ser dada na forma geral por $0x + 1y - 5 = 0$.

4. A reta $x = 2$ pode ser dada na forma geral por $1x + 0y - 2 = 0$.

- **Forma segmentária da equação da reta**

Consideraremos uma reta r que não passa pela origem $(0,0)$, intercepta o eixo Ox no ponto $A = (a, 0)$ e intercepta o eixo y no ponto $B = (0, b)$.

O coeficiente angular dessa reta é:

$$m = \frac{0 - b}{a - 0} = -\frac{b}{a}$$

Usando a forma reduzida $y = mx + n$, em que $m = -\frac{b}{a}$ e $n = b$, temos:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab}, \qquad a, b \neq 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Denotaremos que essa é a forma segmentária da equação da reta que não passa pela origem e intercepta os eixos x e y nos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.

Exemplos

1. A forma segmentária da equação da reta que corta os eixos em $(5,0)$ e $(0, -2)$ é $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$.

2. Se $y = 2x - 5$ é a equação de uma reta na forma reduzida, podemos chegar à forma segmentária:

$$y = 2x - 5 \rightarrow 2x - y = 5 \rightarrow \frac{2x}{5} - \frac{y}{5} = 1 \rightarrow \frac{x}{5/2} + \frac{y}{-5} = 1$$

ETAPA 5 (50 minutos)

Nesta etapa pretendemos propor algumas situações-problema envolvendo o conteúdo já abordado.

Exercícios

1. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $P(2,3)$ e pelo ponto Q, simétrico de P em relação à origem.

Resolução

Esperamos que os discentes lembrem que o simétrico de um número a é o número $-a$, pois $a+(-a)=0$. Logo concluam que $Q=(-2,-3)$ e calculem o coeficiente angular da reta e expressem sua equação, conforme segue:

$$m=\frac{-3-3}{-2-2}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$

$$y-3=\frac{3}{2}(x-2)$$

$$2y-6=3x-6$$

$$3x-2y=0$$

2. Se a reta cuja equação geral é $5x-y-5=0$ passa pelo ponto $A=(k,k+3)$, calcule as coordenadas do ponto A.

Resolução

Esperamos que os discentes notem que se A pertence à reta então:

$$5k-(k+3)-5=0$$

$$5k-k-3-5=0$$

$$4k=8$$

$$k=2$$

Logo as coordenadas do ponto são $A=(2,2+3)=(2,5)$.

3. Se os pontos $A=(3,5)$ e $B=(-3,8)$ determinam uma reta, calcule o valor de a para que o ponto $C=(4,a)$ pertença a essa reta.

Resolução

Esperamos que os discentes notem que se o ponto C pertence a reta então é colinear à A e B, assim temos:

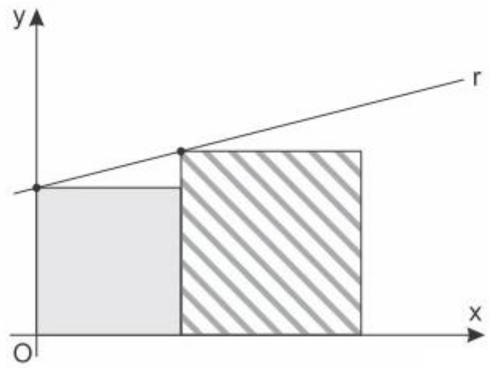
$$\begin{vmatrix} 4 & a & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$20-3a+24+15-32-3a=0$$

$$-6a=-27$$

$$a = \frac{9}{2}$$

4. Na figura abaixo estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é:



a) $x - 2y = -4$

b) $4x - 9y = 0$

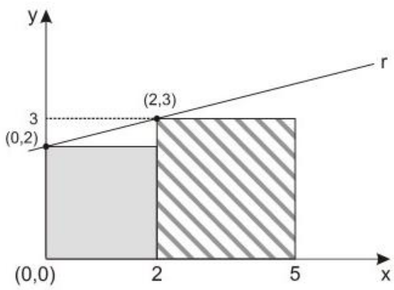
c) $2x + 3y = -1$

d) $x + y = 3$

e) $2x - y = 3$

Resolução

Esperamos que os discentes notem que o quadrado cinza tem lado medindo 2 e o quadrado hachurado tem lado medindo 3, conforme a figura:



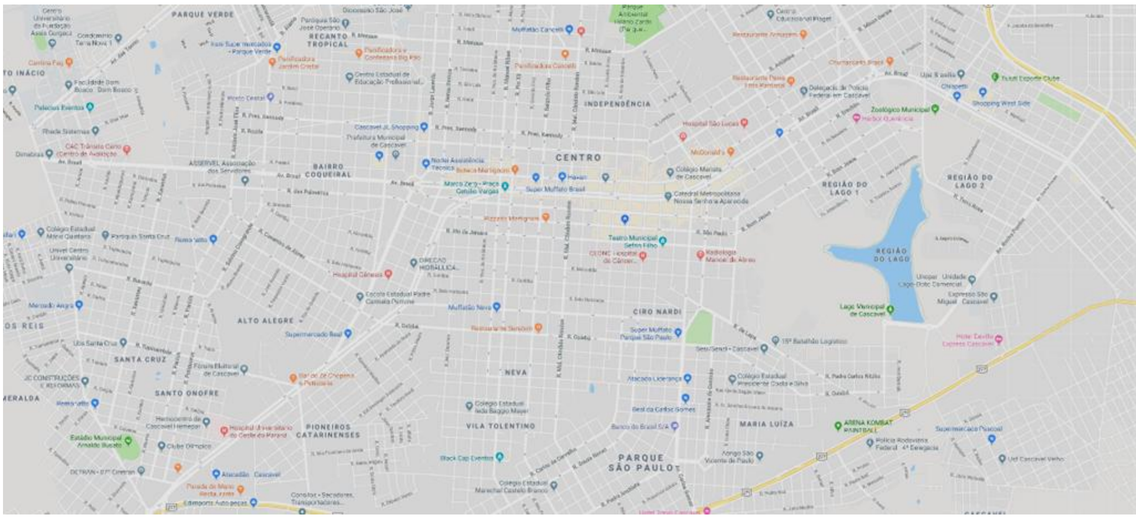
E calculando o coeficiente da reta, obtenham:

$$m_r = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Assim concluam que a equação geral é dada por $y = \frac{1}{2}x + 2$ que pode ser escrito na forma de equação geral como $x - 2y = -4$.

ETAPA 6 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos abordar as posições relativas entre duas retas no plano e a fórmula da distância entre um ponto e uma reta. Para tal retomaremos o exemplo do mapa da cidade de Cascavel-PR, conforme figura abaixo.



E proporemos os seguintes questionamentos aos discentes:

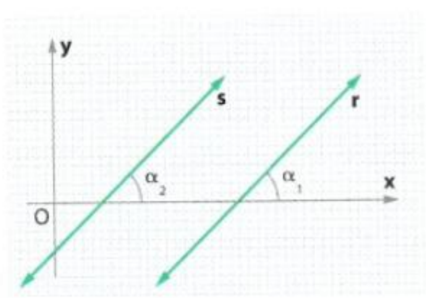
- O mapa apresenta ruas que não se cruzam comparando duas a duas? E apresenta ruas que se cruzam em algum ponto? E coincidentes?

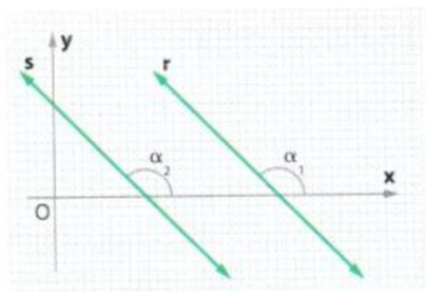
Esperamos que os discentes notem que há ruas que se cruzam e também há ruas que não se interceptam. Ainda observem que não é possível na prática ter ruas coincidentes, pois estariam uma sobre a outra. A partir disso, iremos expor de forma mais geral as posições relativas entre retas.

Denotaremos, utilizando o Geogebra, que dado duas retas, r e s, contidas no mesmo plano são paralelas ou concorrentes.

- **Retas paralelas**

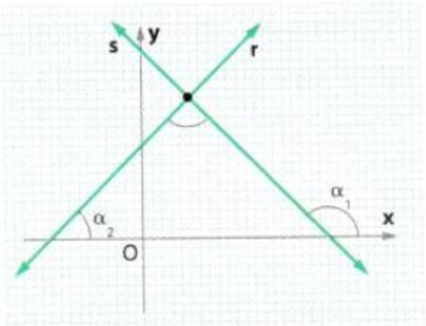
Duas retas distintas e não verticais r e s são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais $(m_1 = m_2)$.

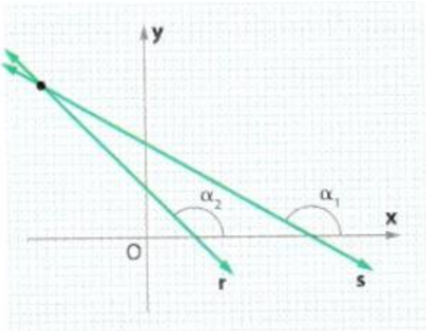




- **Retas concorrentes**

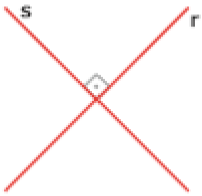
Duas retas distintas e não verticais r e s são concorrentes se, e somente se, seus coeficientes angulares são diferentes ($m_1 \neq m_2$).





- **Retas perpendiculares**

Duas retas r e s são perpendiculares uma à outra se, e somente se, são concorrentes e formam um ângulo reto.



Denotaremos ainda que:

Teorema

Duas retas r e s de coeficientes angulares m_r e m_s são perpendiculares entre si se, e somente se, $m_r \times m_s = -1$

Observação: Observaremos que se uma das retas é paralela a um dos eixos coordenados, então a reta perpendicular a ela é paralela ao outro eixo coordenado.

Denotaremos ainda que uma maneira rápida de verificar se duas retas são paralelas ou concorrentes é comparar suas equações gerais. Para tal, tomaremos duas retas, r e s, tal que $r: ax + by + c = 0$ e $s: a'x + b'y + c' = 0$, então comparando as razões $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ e $\frac{c}{c'}$ temos:

- Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, então temos a mesma reta representada de duas formas diferentes, em geral conhecidas como paralelas iguais ou coincidentes;
- Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, então temos duas retas paralelas distintas;
- Se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, então temos duas retas concorrentes.

Por conseguinte, pretendemos expor aos discentes a expressão que permite calcular a distância de um ponto a uma reta, para tal iremos questioná-los sobre como podemos fazer este cálculo. Em sequência, denotaremos que para um ponto $P = (x_p, y_p)$ e uma reta r de equação $ax + by + c = 0$, temos uma fórmula que facilita o cálculo da distância d de P a r, conforme segue:

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Por fim, iremos propor algumas situações-problema envolvendo o conteúdo abordado.

Exercícios

1. Num sistema cartesiano, um trem segue uma trajetória retilínea dada pela reta $2x + 3y - 6 = 0$. A menor distância entre uma cidade localizada no ponto $P(3, \sqrt{13})$ e o trem é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Resolução

Esperamos que os discentes notem que neste caso como temos a equação da reta e o ponto P basta calcularmos a distância entre eles, conforme segue:

$$d = \frac{|2.(3) + 3.(\sqrt{13}) - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|3\sqrt{13}|}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 3$$

2. Considere uma cidade em que as ruas são representadas por retas e as casas, por pontos. Num mapa cartesiano dessa cidade, com medidas em km, a padaria Pannetutti se localiza no ponto $P(-5, 0)$ e o açougue Quasar se localiza no ponto $Q(-1, -3)$. Uma pessoa que estiver na origem desse mapa e quiser se dirigir à Rua

Pedro Quintão, na qual se localizam a padaria e o açougue, terá de caminhar uma distância de, no mínimo,

a) $2\ km$

b) $2{,}5\ km$

c) $3\ km$

d) $3{,}5\ km$

e) $4\ km$

Resolução

Esperamos que os discentes notem que com os dois pontos dados podemos obter a equação da reta que representa a Rua Quintão, conforme segue:

$$m = \frac{-3-0}{-1-(-5)} = -\frac{3}{4}$$

$$y - 0 = -\frac{3}{4}\big(x-(-5)\big) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

Agora com a equação da reta e o ponto de origem $(0{,}0)$ podemos calcular a distância entre eles, conforme segue:

$$d = \frac{|-\frac{3}{4}(0) + 1.(0) + \frac{15}{4}|}{\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{15}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{15}{4}.\frac{4}{5} = 3\ km$$

3. Conhecidas as equações das retas $r: mx + y - 3 = 0$ e $s: 3x + y + k = 0$, podemos afirmar que r e s são retas

a) paralelas, se $m = 2$ e $k = -3$.

b) coincidentes, se $m = 3$ e $k \neq -3$.

c) concorrentes, se $m \neq 3$, $k \in \mathbb{R}$.

d) concorrentes, se $k = -3$, $m \in \mathbb{R}$.

e) paralelas, se $m = 1$, $k \in \mathbb{R}$.

Resolução

Esperamos que os discentes analisem as alternativas com as equações das retas, conforme segue:

a) Se $m = 2$ e $k = -3$ temos $r: 2x + y - 3 = 0$ e $s: 3x + y - 2 = 0$, ou seja, são concorrentes, pois $m_r \neq m_s$.

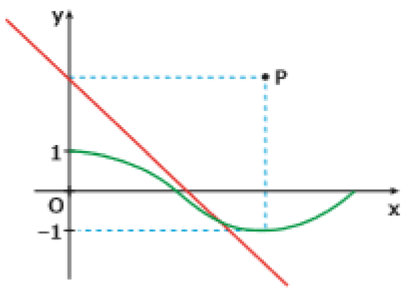
b) Se $m = 3$ e $k \neq -3$ temos $r: 3x + y - 3 = 0$ e $s: 3x + y + k = 0$, ou seja, temos retas paralelas, mas não coincidentes pois $\frac{3}{3} = \frac{1}{1} \neq -\frac{3}{k}$, com $k \neq -3$.

c) Se $m \neq 3$ e $k \in \mathbb{R}$, temos duas retas concorrentes pois $m_r \neq m_s$.

d) Se $k = -3$ e $m \in \mathbb{R}$, temos que as retas podem ser coincidentes se $m = 3$ ou concorrentes se $m \neq 3$.

e) Se $m = 1$ e $k \in \mathbb{R}$, temos $r: x + y - 3 = 0$ e $s: 3x + y + k = 0$, ou seja, são concorrentes, pois $m_r \neq m_s$.

4. No sistema cartesiano ortogonal, a reta $3x + 2y - 6 = 0$ intercepta a curva $y = cos\ x$, conforme figura. A distância do ponto P à reta dada é:



a) $\frac{3\pi}{2\sqrt{13}}$

b) $\frac{3\pi-2}{2\sqrt{13}}$

c) $\frac{3\pi+2}{2\sqrt{13}}$

d) $\frac{3\pi-4}{2\sqrt{13}}$

e) $\frac{3\pi}{\sqrt{13}}$

Resolução

Esperamos que os discentes notem que podemos descobrir a abscissa e ordenada do ponto P utilizando o gráfico e a equação da reta dada, conforme segue:

$$\cos(x) = -1 \rightarrow x = \pi$$

Logo, $P = (\pi, y)$, colocando a equação da reta na forma geral temos:

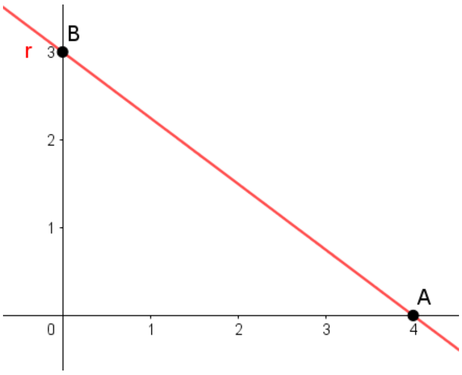
$$y = \frac{-3x + 6}{2} = -\frac{3}{2}x + 3$$

Tendo a equação da reta e o ponto $P = (\pi, 3)$ podemos calcular a distância entre eles conforme segue:

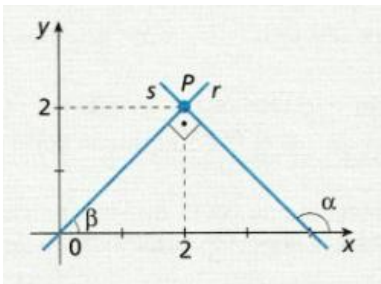
$$d = \frac{|3.(\pi) + 2.(3) - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|3\pi + 6 - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{3\pi}{\sqrt{13}}$$

Por fim iremos propor os seguintes problemas extraclasse:

1. Determine o coeficiente angular da reta r na figura.



2. Determine o valor de $m_r \times m_s$, sabendo que m_r e m_s correspondem, respectivamente, ao coeficiente angular das retas r e s apresentadas na figura. Utilize o teorema de retas perpendiculares.



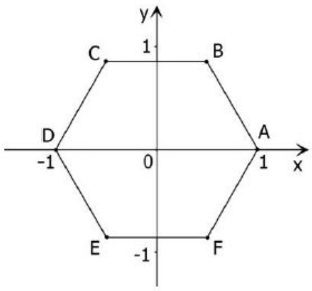
3. Seja r a reta determinada pelos pontos $A = (5,0)$ e $B = (2,0)$. Determine o valor do coeficiente angular da reta.

4. A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos A(1, 5) e B(4, 14) é:

a) 4
b) -5
c) 3
d) 2
e) 5

5. A reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento AB com $A = (0{,}3)$ e $B = (5{,}0)$ tem qual coeficiente angular?

6. Os pontos A, B, C, D, E e F determinam um hexágono regular ABCDEF de lado 1, tal que o ponto A tem coordenadas (1,0) e o ponto D tem coordenadas (-1,0), como na figura abaixo.



A equação da reta que passa pelos pontos B e D é:

a) $y = \sqrt{3}x$

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

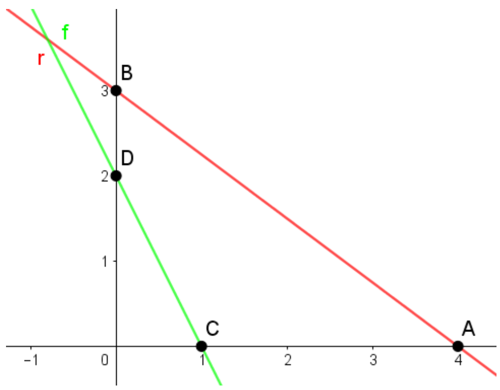
c) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Encontre a equação da reta t que passa pelo ponto X(-1,8) e é perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares.

8. Calcule o produto dos coeficientes angulares das retas abaixo.



REFERÊNCIAS

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 22 jul 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 3. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Vol. 3. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

2.5.2.1 Relatório – 21.09.2019

No sábado, dia 21 de Setembro de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o sexto encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar com Geometria Analítica, especificamente os conceitos de sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, inclinação da reta, coeficiente angular da reta, formas da equação da reta, posições relativas entre retas, distância de um ponto a uma reta.

Com o intuito de promover uma contextualização aos discentes, optamos por apresenta-lhes um mapa da cidade de Cascavel-Paraná e então levantamos as seguintes indagações “O mapa apresenta ruas na vertical? E na horizontal? Existem ruas na diagonal? Todas as ruas são retas?”, a partir das quais os discentes conseguiram observar que havia ruas na horizontal, vertical e diagonal e que algumas não eram retas.

Em sequência, desenhamos uma reta no quadro, representando uma rua qualquer do mapa, e posteriormente um sistema cartesiano ortogonal com o qual estabelecemos que a inclinação da reta, ou seja, seu coeficiente angular é equivalente a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo horizontal no sentido anti-horário. E ilustramos com o uso do software Geogebra alguns casos particulares, por exemplo, quando a reta é paralela ao eixo horizontal e quando a reta é vertical ao eixo horizontal do plano cartesiano.

Ainda, utilizando o Geogebra e algumas ilustrações na lousa, denotamos com a participação de alguns discentes, os quais se lembraram das relações trigonométricas, que se $0° < \alpha < 90°$ então $tg(\alpha) > 0$, ou seja, o coeficiente da reta é positivo e logo é uma reta crescente e se $90° < \alpha < 180°$ então $tg(\alpha) < 0$ assim o coeficiente angular da reta é negativo e consequentemente a reta é decrescente. E para fixação dos conceitos expomos algumas situações exemplo que foram resolvidas em conjunto com os discentes.

Por conseguinte, denotamos aos alunos que podemos calcular o coeficiente angular de uma reta utilizando as coordenadas de dois de seus pontos. Para tal, desenhamos um sistema cartesiano na lousa e nesse determinamos dois pontos quaisquer e traçamos uma reta. Então no ponto de coordenada vertical inferior traçamos uma reta que é paralela ao eixo horizontal e traçamos a reta que passa pelo outro ponto e é paralela ao eixo vertical, sendo que estas duas se encontram em um terceiro ponto e são perpendiculares.

Assim denotamos que a figura formada pelos três pontos é um triângulo retângulo e que podemos utilizar as relações trigonométricas para obter o valor da inclinação da reta, visto que, o valor de cada cateto do triângulo é equivalente à variação das medidas no eixo vertical e horizontal e assim podemos calcular o valor da inclinação pela expressão $m = tg(\alpha) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Vale ressaltar que neste momento realizamos os cálculos em dois casos, $0° < \alpha < 90°$ e $90° < \alpha < 180°$, e denotamos que a expressão anterior vale para ambos.

Em sequência propomos algumas situações-problema envolvendo os conceitos abordados, nos quais notamos que alguns discentes possuem dificuldades em interpretar o sistema cartesiano e para ajudá-los retomamos alguns dos exemplos expostos anteriormente. Além disso, fomos surpreendidos por alguns discentes que conseguiram realizar os exercícios utilizando-se de outros raciocínios, por exemplo, simetria. Posteriormente realizamos a correção dos exercícios na lousa.

Na sequência, utilizando a relação entre a tangente e a inclinação da reta, introduzimos a equação da reta como sendo $y - y_0 = m(x - x_0)$ e para fixação expomos alguns exemplos na lousa. Ainda, apresentamos outras duas formas de representação, a equação geral da reta e a equação reduzida, expondo suas características e ilustrando com alguns exemplos na lousa. Além disso, expomos alguns exemplos no Geogebra para facilitar a visualização das alterações no gráfico conforme se altera os coeficientes.

Então propomos aos discentes algumas situações-problema envolvendo o conteúdo abordado, nos quais os discentes apresentaram dúvidas principalmente quanto à interpretação dos enunciados, pois algumas palavras/conceitos como simétrico não eram de seu conhecimento. E posteriormente corrigimos os problemas na lousa com o auxílio dos alunos.

Por fim, retomamos o mapa da cidade de Cascavel-Paraná no intuito de abordar as posições relativas entre duas retas. Para tal fizemos os seguintes questionamentos aos discentes “O mapa apresenta ruas que não se cruzam comparando duas a duas? E apresenta ruas que se cruzam em algum ponto? E coincidentes?". Com isto, conseguimos que os discentes percebessem que duas retas podem ser paralelas, concorrentes, perpendiculares ou coincidentes.

Ainda, apresentamos a expressão que permite calcular a distância de um ponto até a uma reta e expomos alguns exemplos na lousa. Então propomos algumas situações–problema, as quais não foram possíveis de finalizar em sala.

2.5.3 Plano de aula – 28.09.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves
Lucas Campos de Araújo
Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos da equação geral e reduzida da circunferência e as posições relativas entre ponto, reta e circunferência.

Objetivos Específicos: Ao se trabalhar com as fórmulas da circunferência e as posições relativas, espera-se que os alunos sejam capazes:

- Determinar a equação geral e reduzida da circunferência;
- Diferenciar as posições relativas entre ponto, reta e circunferência;
- Associar as posições relativas com os conceitos anteriores de trigonometria;
- Resolver problemas com as equações reduzida e geral da circunferência;
- Resolvam problemas que envolvam posições relativas.

Conteúdo: Equação geral e reduzida da circunferência, posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta.

Recursos Didáticos: quadro, giz, folhas quadriculadas e multimídia.

Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos abordar as fórmulas da equação geral e reduzida da circunferência. Para tal, explicaremos que a **circunferência (λ)** é uma figura geométrica plana com forma circular formada por um conjunto de pontos equidistantes de um ponto central. A distância do centro a qualquer ponto da circunferência é determinada pelo tamanho da medida do raio (r).

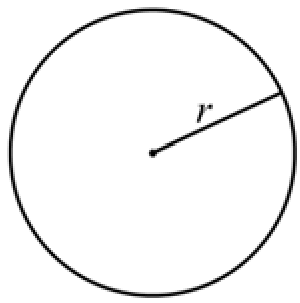


Figura 8: Circunferência

Fonte: acervo dos autores

Seja um ponto $\boldsymbol{C}$ centro da circunferência (λ) e uma medida $r \neq 0$, chamada raio, temos que $P \in \lambda \leftrightarrow \overline{CP} = r$, ou seja, os pontos pertencentes a circunferência distam a mesma medida r de seu centro C.

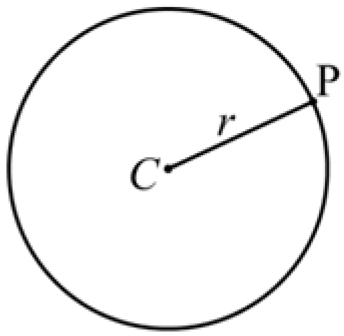


Figura 9: Distância do centro a um ponto da circunferência

Fonte: acervo dos autores

Em seguida, com o auxílio da figura abaixo, denotaremos que, dada uma circunferência com centro $\boldsymbol{C(a,b)}$ e raio $\boldsymbol{r}$. Se um ponto $\boldsymbol{P(x,y)}$ pertence à circunferência, então a seguinte expressão para distância entre os pontos P e C:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

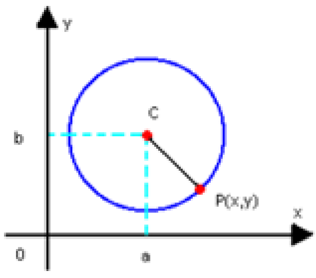


Figura 10: Expressão para distância

Fonte: brasilescola.uol.com.br/matemática/

Que, por sua vez, é a fórmula da equação reduzida da circunferência e que permite determinar os elementos essenciais para a construção da circunferência: as coordenadas do centro e o raio. Quando o centro da circunferência estiver na origem $C = (0{,}0)$, a equação da circunferência será $x^2 + y^2 = r^2$.

Se desenvolvermos a equação reduzida, obtemos a equação:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) - r^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

que é a fórmula da equação geral ou normal da circunferência.

Denotaremos que é muito comum na que as circunferências sejam representadas por sua equação geral, como, por exemplo, a circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Isto, à primeira vista, não nos permite identificar nem o centro nem o raio da circunferência em questão. Mas existem métodos de se obter a equação reduzida a partir da geral e apresentaremos duas formas, conforme segue:

- **Método de completar os quadrados**

Iremos expor que nesse método, o objetivo é obter os quadrados perfeitos $(x-a)^2$ e $(y-b)^2$ a partir das informações apresentadas na equação geral. Para exemplificar tomaremos a equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$:

- Vamos agrupar na equação geral os termos em x e os termos em y, isolando no outro membro o termo independente, conforme segue:

$$x^2 - 2x + \text{—} + y^2 + 4y + \text{—} = 4 + \text{—} + \text{—}$$

- Somaremos a ambos os termos da equação valores convenientes, de modo que os termos em x e os termos em y se transformem, cada qual, em um quadrado perfeito. Como o número que completa o quadro perfeito em x e em y é o quadrado da metade do coeficiente que os acompanha respectivamente, ou seja, para x é o quadrado da metade de -2 que é $(-1)^2 = 1$ e para y é o quadrado da metade de 4 que é $2^2 = 4$. Assim somando 1 e 4 em ambos os membros temos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 + 1 + 4$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

- Assim temos a seguinte equação reduzida $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$, que representa uma circunferência de centro $C = (1, -2)$ e raio 3.

- Observaremos ainda que se os coeficientes de x^2 e y^2 não forem iguais a 1 basta dividir toda equação por um número conveniente de forma que se tornem 1.

- **Método da comparação**

Iremos expor que neste método devemos comparar os coeficientes dos termos das duas equações – a equação geral teórica e a equação geral dada. Tomando o mesmo exemplo anterior temos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4$$

Dessa forma segue que:

$$-2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = -2x + 4y + (-4)$$

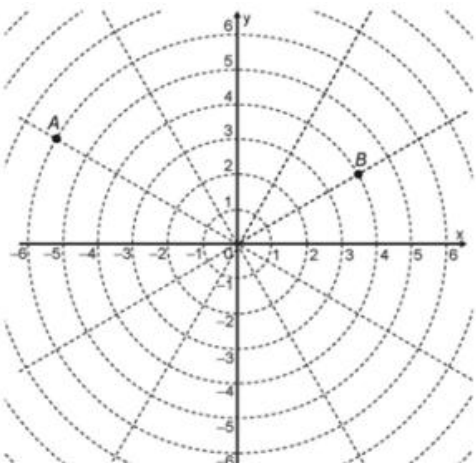
$$\begin{cases} -2ax = -2x \to a = 1 \\ -2by = 4y \to b = -2 \\ a^2 + b^2 - r^2 = -4 \to 1^2 + (-2)^2 - r^2 = -4 \to r^2 = 9 \to r = 3 \end{cases}$$

E portanto, o centro da circunferência é $C = (1, -2)$ e o raio é $r = 3$.

ETAPA 2 (30 minutos)

Nesta etapa pretendemos propor algumas situações-problema em relação ao conteúdo já abordado.

1. Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6} rad$ conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem $(0{,}0)$. Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.

Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a:

a) $\frac{(2.(\pi).1)}{3} + 8$

b) $\frac{(2.(\pi).2)}{3} + 6$

c) $\frac{(2.(\pi).3)}{3} + 4$

d) $\frac{(2.(\pi).4)}{3} + 2$

e) $\frac{(2.(\pi).5)}{3} + 2$

Resolução:

Esperamos que os alunos observem que se fosse possível passar pela origem o menor caminho seria o determinado pelas semirretas de origem em A e B até a origem do sistema, pois a menor distância entre dois pontos é uma reta.

Mas, como não podemos passar pela origem, esperamos que notem que cada uma das semirretas de uma circunferência a outra tem medida igual 1. E que conforme o raio da circunferência aumenta a medida de comprimento do arco também aumenta, visto que $l = \alpha \times r$. Logo, a circunferência de raio $r = 1$ tem o arco de menor medida, no caso, pelo enunciado, tem 12 arcos de comprimento $\frac{\pi}{6}$.

Assim basta tomarmos a semirreta de origem em B até a circunferência de raio $r = 1$, percorrer 4 arcos desta circunferência e tomar a semirreta de origem na circunferência de raio $r = 1$ até o ponto A.

Ou seja, iremos percorrer 8 semirretas de medida 1 e 4 arcos de comprimento $\frac{\pi}{6}$, somando temos:

$$4 \times \frac{\pi}{6} + 8 = \frac{2\pi}{3} + 8$$

Que pode ser escrito como:

$$\frac{2 \times \pi \times 1}{3} + 8$$

2. Considere as circunferências:

$$C_1: x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 0$$

$$C_2: x^2 - 16x + y^2 - 14y + 104 = 0$$

É correto afirmar que:

01. São circunferências concêntricas.

02. A circunferência C_1 tem centro em (5, 4) e C_2 em (8,7).

04. A circunferência C_2 tem raio igual a 4 unidades.

08. As circunferências interceptam-se nos pontos $(5,7)$ e $(8,4)$.

Resolução:

Esperamos que os discentes comparem as equações gerais dadas com a teórica para obter o centro e raio das circunferências, conforme segue:

- **Para C_1:**

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32$$

$$\begin{cases} -2ax = -10x \rightarrow a = 5 \\ -2by = -8y \rightarrow b = 4 \\ a^2 + b^2 - r^2 = 32 \rightarrow -r^2 = 32 - 25 - 16 = -9 \rightarrow r = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

- **Para C_2:**

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = x^2 - 16x + y^2 - 14y + 104$$

$$\begin{cases} -2ax = -16x \rightarrow a = 8 \\ -2by = -14y \rightarrow b = 7 \\ a^2 + b^2 - r^2 = 104 \rightarrow -r^2 = 104 - 64 - 49 = -9 \rightarrow r = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

Logo suas equações na forma reduzida são:

$$\begin{cases} C_1 = (x-5)^2 + (y-4)^2 = 9 \\ C_2 = (x-8)^2 + (x-7)^2 = 9 \end{cases}$$

Analisando as informações temos que não são concêntricas, mas tem mesmo raio. E os centros são $C_1 = (5,4)$ e $C_2 = (8,7)$.

Denotaremos que podemos, também, verificar a interseção resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 0 \\ x^2 - 16x + y^2 - 14y + 104 = 0 \end{cases} \rightarrow y = -x + 12$$

$$x^2 - 10x + (-x + 12)^2 - 8(-x + 12) + 32 = 0$$

$$x^2 - 10x + x^2 - 24x + 144 + 8x - 96 + 32 = 0$$

$$2x^2 - 26x + 80 = 0$$

$$x^2 - 13x + 40 = 0$$

$$x_1 = 5 \text{ e } x_2 = 8$$

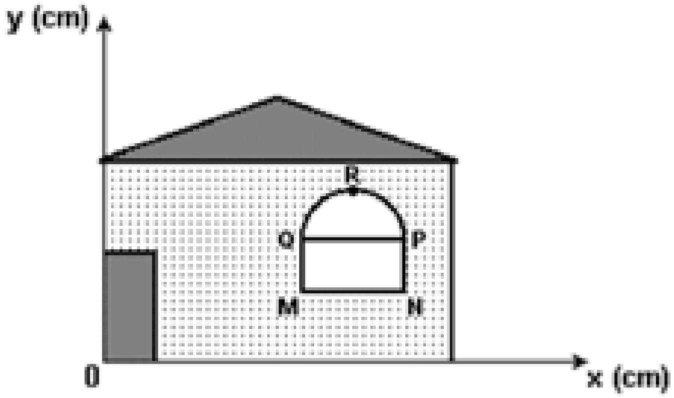
Disso segue que:

$$y_1 = -5 + 12 = 7$$

$$y_2 = -8 + 12 = 4$$

Portanto as circunferências se interceptam em $(5,7)$ e $(8,4)$. Logo a soma das respostas é $2 + 8 = 10$.

3. Um arquiteto deseja desenhar a fachada de uma casa e, para isto, utiliza um programa de computador. Na construção do desenho, tal programa considera o plano cartesiano e traça curvas a partir de suas equações. Na fachada, a janela tem a forma do retângulo $MNPQ$ encimado pela semicircunferência PRQ, conforme mostra a figura:



Para desenhar a janela o arquiteto precisa da equação da semicircunferência PRQ. Sabe-se que o segmento MN é paralelo ao eixo Ox e tem comprimento igual a $2\ cm$, que MQ tem comprimento igual a $1\ cm$ e que o ponto M tem coordenadas $(4, \frac{3}{2})$. Uma possível equação da semicircunferência é dada por:

a) $y = \frac{-5}{2} - \sqrt{(1 - (x-5)^3)}$

b) $y = \frac{5}{2} + \sqrt{(1 + (x-5)^3)}$

c) $y = \frac{-5}{2} + \sqrt{(1 - (x-5)^2)}$

d) $y = \frac{5}{2} + \sqrt{(1 - (x-5)^2)}$

e) $y = \frac{5}{2} + \sqrt{(1 + (x-5)^2)}$

Resolução:

Esperamos que os discentes tomem o ponto médio S entre $\overline{PQ}$, então $\overline{PS} = 1 = \overline{QS}$, pois $2 = \overline{MN} = \overline{PQ}$. Temos que a abscissa de Q é igual à de M que é 4 e como $\overline{MQ} = 1$ e a ordenada de M é $\frac{3}{2}$ segue que a ordenada de Q é $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. Ainda, a abscissa do ponto médio S é $4 + 1 = 5$e sua ordenada é igual a de Q, ou seja, equivale a $\frac{5}{2}$.

Como S é o centro da circunferência que é dada pelas coordenadas $(5, \frac{5}{2})$ e o raio $r = 1$. Desse modo, aplicando as informações na equação reduzida da circunferência, obtemos:

$$(x-5)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1 - (x-5)^2$$

$$y - \frac{5}{2} = \sqrt{1 - (x-5)^2}$$

$$y = \frac{5}{2} + \sqrt{1 - (x-5)^2}$$

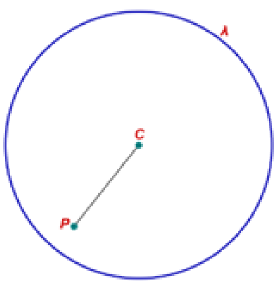
Portanto a alternativa correta é a letra d).

ETAPA 3 (60 minutos)

Nesta etapa, pretendemos analisar com os alunos as distâncias entre um ponto e o centro C da circunferência. Para estudar essas posições relativas, determinaremos uma circunferência λ de centro $C(X_c, Y_c)$ e raio r. Iremos expor três situações relativas ao posicionamento, detalhadas a seguir.

- **Ponto P interno à circunferência:**

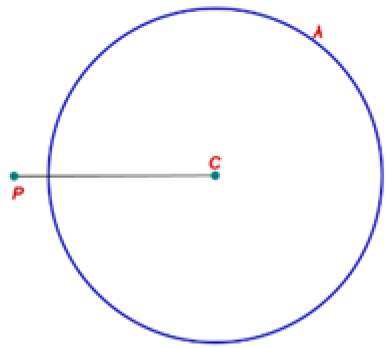
Quando a distância do ponto P até o centro é menor que o raio da circunferência;



Fonte: brasilescola.uol.com.br/matematica/

- **Ponto P externo à circunferência:**

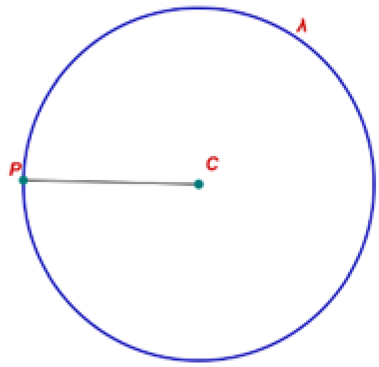
Quando a distância do ponto P até o centro é maior que o raio da circunferência;



Fonte: brasilescola.uol.com.br/matematica/

- **Ponto P pertence a circunferência:**

Quando a distância do ponto P até o centro é igual ao raio.



Fonte: brasilescola.uol.com.br/matematica/

Em seguida, apresentaremos uma situação-problema e a solucionaremos com os conceitos apresentados.

Exemplo:

1. O ponto $\boldsymbol{P}(3, b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $\boldsymbol{C}(0,3)$ e raio 5. Calcule o valor da coordenada **b**.

Resolução:

Esperamos que os discentes utilizem a equação reduzida de circunferência e as informações do enunciado de modo a obter:

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 25$$

Sabendo que o ponto P pertence à circunferência, temos que:

$$3^2 + (b-3)^2 = 5^2$$

$$9 + (b-3)^2 = 25$$

$$(b-3)^2 = 16$$

$$b - 3 = \pm 4$$

$$b_1 = 7 \text{ e } b_2 = -1$$

ETAPA 4 (30 minutos)

Nesta etapa pretendemos propor algumas situações-problema envolvendo os conceitos abordados.

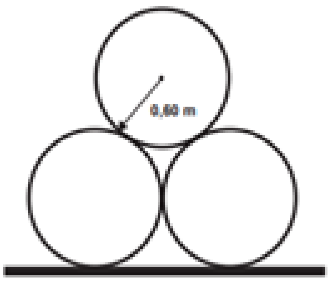
Exercícios

1. A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

CAMINHÃO ENTALA EM VIADUTO NO CENTRO

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere $1{,}7$ como aproximação para $3^{\frac{1}{2}}$. Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

a) 2,82

b) 3,52

c) 3,7

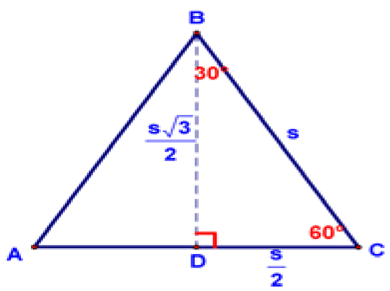
d) 4,02

e) 4,2

Resolução

Esperamos que os discentes visualizem um triângulo equilátero entre os centros das circunferências dos canos. O lado do triângulo equilátero mede o dobro do raio, isto é, diâmetro da circunferência, que no caso é $2 \times 0{,}6 = 1{,}2$.

E que lembrem que, pelo Teorema de Pitágoras, a altura de um triângulo equilátero é dado por:



$$h = \frac{\ell \times \sqrt{3}}{2}$$

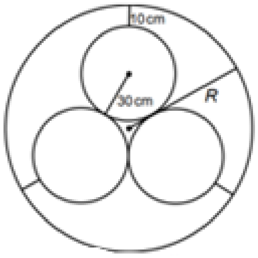
Logo,

$$h = 1{,}2 \times \frac{1{,}7}{2} = 0{,}6 \times 1{,}7 = 1{,}02$$

E por fim notem que a altura do viaduto é uma soma entre: altura do triângulo somada ao diâmetro do cano mais a distância da carroceria ao solo e a margem de segurança, isto é

$$h_{viaduto} = 1{,}02 + 1{,}2 + 1{,}3 + 0{,}5 = 4{,}02m$$

2. Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo $30\ cm$, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de $10\ cm$ entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



Utilize $1{,}7$ como aproximação para $\sqrt{3}$. O valor de R, em centímetros, é igual a:

a) 64

b) 65,5

c) 74

d) 81

e) 91

Resolução

Esperamos que os discentes observem que os centros dos 3 menores formam um triângulo equilátero cujo centro coincide com o centro da circunferência maior. E como queremos calcular o raio R da circunferência maior, temos que:

$$R = espaçamento\ de\ manutenção + raio\ do\ cano\ menor + distância\ do\ centro\ da\ circunferência\ maior\ a\ menor$$

$$R = 10 + 30 + d$$

Logo, esperamos que encontrem o valor d, que é igual a $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero, pois como todos os ângulos internos desse triângulo são de $60°$ temos que o ponto de encontro das bissetrizes dista $\frac{2}{3}$ da altura em relação a cada vértice, segue que:

$$d = \frac{2}{3}h$$

$$d = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}60$$

$$d = 1{,}7 \times 20$$

$$d \approx 34cm$$

Logo $R = 10 + 30 + 34 = 74cm$. Portanto a alternativa correta é representada por $c)$.

3. São dados: uma circunferência de centro $C = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ um ponto $T = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$ que pertence à circunferência. Qual é a equação dessa circunferência?

Resolução

Esperamos que os discentes tomem as informações do enunciado e escrevam a equação reduzida da circunferência, conforme segue:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = r^2$$

Tendo, também, a informação que o **ponto** $\boldsymbol{T} = \left(\boldsymbol{\frac{3}{2}}, \boldsymbol{-1}\right)$ pertence à **circunferência**. Então, podem substituí-lo na **equação** para calcular o **valor do raio**, conforme segue:

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + (-1-1)^2 = r^2$$

$$(-2)^2 = r^2$$

$$r^2 = 4$$

Portanto, a **equação reduzida da circunferência** é $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Etapa 5 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos abordar as posições relativas entre circunferência e reta. Para tal, entregaremos aos alunos folhas quadriculadas e expondo o seguinte questionário na multimídia:

1. Desenhe as três possibilidades de posição entre circunferência e reta;

2. O número de interseções das retas com o círculo definiria um critério para determinar qual posição relativa existe entre uma reta e um círculo?

3. Para determinar os pontos comuns ao círculo e a reta, algebricamente, o que teria que ser resolvido?

Em seguida, com o auxílio do *Geogebra*, mostraremos aos alunos as posições relativas entre reta e circunferência, com os seguintes passos:

- Vamos plotar o gráfico da circunferência $\lambda: x^2 + y^2 = 8$ e criar uma barra deslizante;
- No campo de entrada de dados do *GeoGebra*, vamos digitar a equação $s: y = x + c$;
- Movimentaremos a barra e observar a posição da reta s em relação à circunferência λ.
- Indagaremos os alunos acerca do que eles observam;
- Habilitando o rastro, validaremos essas observações.

Afirmaremos que conforme foi mostrado, existem retas que tocam a circunferência em dois pontos, retas que tocam a circunferência em apenas um ponto e outras que não interceptam a circunferência em ponto algum.

Quando não existe nenhum ponto em comum entre reta e circunferência, denominamos esta reta de **exterior**. Se há um ponto em comum entre reta e circunferência, denominados esta reta de **tangente**. Por fim, se a reta intercepta em dois pontos na circunferência, denominamos esta reta de **secante**.

Para finalizarmos, voltando ao *Geogebra*, mostraremos novamente as posições relativas, em seguida, pediremos aos alunos que generalizem, isto é, quando podemos afirmar que uma reta é exterior, secante ou tangente a uma circunferência.

Esperamos que relacionem a distância da reta e o raio da circunferência, obtendo assim:

- r é exterior quando d(C, s) > raio;
- r é secante quando d(C, s) = raio;
- r é tangente quando d(C, s) < raio.

Por conseguinte, proporemos aos alunos alguma situações-problema, conforme o conteúdo abordado.

Exercícios

1. Um emblema de uma bandeira de uma escola de samba é uma figura geométrica definida por $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 \leq 0$ quando projetada em um plano cartesiano com $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ dados em metros. Esse emblema será pintado em duas cores separadas pela reta $y = x$. A região acima da reta será pintada de verde, e a região abaixo será pintada de rosa. Considerando que a escola de samba pretende confeccionar 100 dessas bandeiras e que uma lata de tinta cobre $4\,m^2$ do emblema, determine a quantidade mínima de latas de tinta rosa a serem utilizadas. Adote $\pi = 3{,}14$.

a) 225

b) 320

c) 354

d) 450

e) 500

Resolução

Esperamos que os discentes transformem a equação geral $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 \leq 0$ dada no enunciado na equação reduzida, utilizando um dos métodos apresentados anteriormente, por exemplo:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9$$

$$\begin{cases} -2ax = -6x \rightarrow a = 3 \\ -2by = -6y \rightarrow b = 3 \\ a^2 + b^2 - r^2 = 9 \rightarrow -r^2 = 9 - 9 - 9 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3 \end{cases}$$

Logo, temos a equação reduzida:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 3^2$$

Como o centro é $C = (3, 3)$ e o raio $r = 3$. A reta $y = x$ contém o centro C e a área pintada de rosa é metade da área da circunferência temos:

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = 14{,}13\,m^2$$

Como são 100 bandeiras, a área total é $14{,}13 \times 100 = 1413\,m^2$ e como cada lata cobre $4\,m^2$ pela regra da proporcionalidade temos:

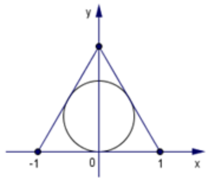
$$\frac{4}{1413} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1413}{4} = 353{,}25$$

$$x \approx 354\ latas$$

Logo a alternativa correta está representada por c).

2. Considere a circunferência inscrita no triângulo equilátero, conforme mostra a figura a seguir:



A equação da circunferência é:

a) $x^2 + (y-1)^2 = 1$

b) $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}$

c) $x^2 + \left(y - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

d) $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$

e) $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

Resolução

Esperamos que os discentes notem que o centro da circunferência é o incentro do triângulo PQR. Como o triângulo PCO é retângulo, temos que:

$$tan(30) = \frac{CO}{PO} \Rightarrow CO = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, como $CO = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e a abscissa do centro da circunferência é $x = 0$ a equação da circunferência é:

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Por fim iremos propor os seguintes problemas extraclasse:

1. Os pontos de interseção do círculo de equação (x – 4)2 + (y – 3)2 = 25 com os eixos coordenados são vértices de um triângulo. A área desse triângulo é:

a) 22.

b) 24.

c) 25.

d) 26.

e) 28

2. Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$, seja P seu ponto de ordenada máxima. A soma das coordenadas de P e:

a) 10

b) 10,5

c) 11

d) 11,5

e) 1

3. A distância entre o centro da circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$ e a reta de equação $2y + 5x = 0$ é

a) – 5

b) 0

c) 2

d) 5

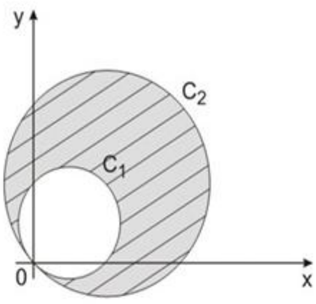
e) 9

4. Considere as equações das circunferências

$$C_1: x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$$

$$C_2: x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0$$

cujos gráficos estão representados abaixo:



A área da região hachurada é:

a) 3π unidades de área.

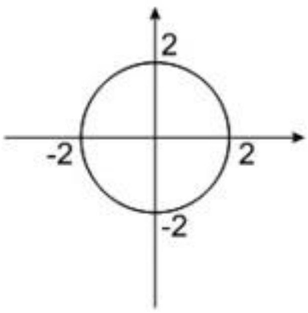
b) P unidades de área.

c) 5π unidades de área.

d) 6π unidades de área.

e) $\frac{\pi}{2}$ unidades de área.

5. Dada a figura abaixo cujas medidas estão expressas em centímetros,



E as proposições:

I – é uma circunferência de diâmetro 2 cm.

II – é uma circunferência de área 4π cm².

III – é uma circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

Considerando as proposições apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) Apenas as proposições I e III são verdadeiras.

b) Apenas as proposições I e II são verdadeiras.

c) Apenas a proposição III é verdadeira.

d) Apenas as proposições II e III são verdadeiras.

e) Apenas a proposição II é verdadeira.

6. Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I – é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

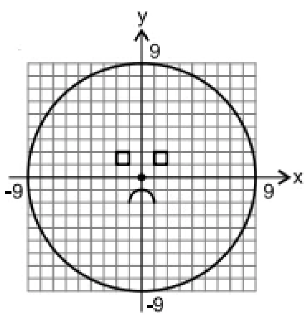
II – é a parábola de equação $y = - x^2 - 1$, com x variando de –1 a 1;

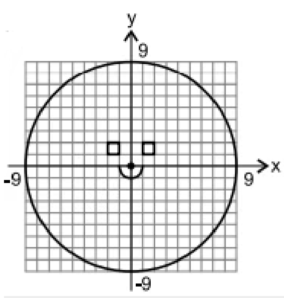
III – é o quadrado formado pelos vértices (–2, 1), (–1, 1), (–1, 2) e (–2, 2);

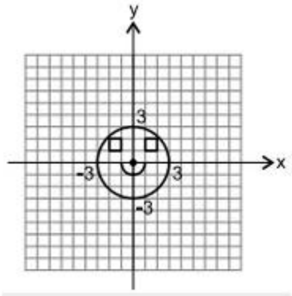
IV – é o quadrado formado pelos vértices (1, 1), (2, 1), (2, 2) e (1, 2);

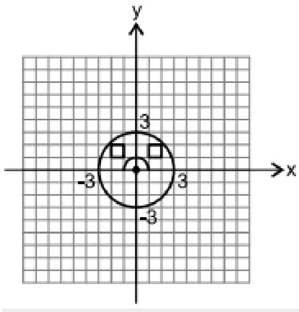
V – é o ponto (0, 0).

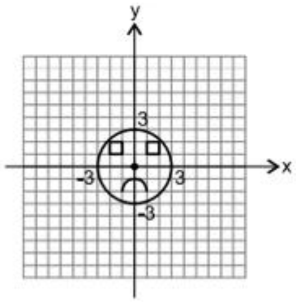
Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?











REFERÊNCIAS

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 22 jul 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 3. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Vol. 3. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Bastos, D. O. **Estudo da circunferência no ensino médio:** sugestões de atividades com a utilização do software GeoGebra. (Dissertação Mestrado)

2.5.3.1 Relatório – 28.09.2019

No sábado, dia 28 de Setembro de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o sétimo encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar com Geometria Analítica, especificamente os conceitos de equação geral e reduzida da circunferência e as posições relativas entre ponto, reta e circunferência.

Iniciamos a aula fazendo as correções dos exercícios que haviam ficado para os estudantes no encontro anterior e sanando as possíveis dúvidas que restavam. Em seguida retomamos com os alunos a definição de circunferência, e explicamos a distância entre ponto e circunferência definiu que do centro da circunferência até a borda dela temos como medida o raio. Com o auxílio de uma imagem projetada relembramos o conceito da distância entre pontos e que essa relação também pode ser usada na circunferência.

Em seguida, apresentamos a equação reduzida da circunferência, utilizando da expressão da distância chegamos à equação reduzida, aproveitando dessa expressão encontramos a equação geral da circunferência, ao definirmos apresentamos um exemplo para melhor fixação. Ao final do exemplo apresentamos aos alunos que há outras formas de obter a equação reduzida utilizando a equação geral, esses métodos foram o de completar quadrado e o método de comparação, ao expormos e exemplificamos os dois métodos os alunos relataram que completar quadrado é mais fácil que o de comparação.

Na sequência entregamos o material do aluno e solicitamos que eles fizessem os três primeiros exercícios da lista, passamos nas carteiras para auxiliar os estudantes na resolução, o circularmos verificamos que no primeiro exercício pensaram que havia possibilidade de o caminho ser uma reta, isso por não terem interpretado o problema, no segundo exercício demoraram a perceber que deveriam usar apenas a equação reduzida, dado alguns minutos fizemos as correções no quadro e reforçamos alguns pontos que havíamos percebido, como por exemplo, as dificuldades citadas anteriormente.

Posteriormente, analisamos com os alunos os conceitos de distância de um ponto e centro da circunferência, utilizamos um exemplo para fixar o conceito, e por restar pouco tempo explicamos o último conteúdo da aula, utilizando o Geogebra explicamos as posições relativas entre circunferência e reta, mostramos que existem retas que tocam a circunferência em um único ponto, existem retas que interceptam a circunferência em dois pontos, e retas que não tocam em nenhum ponto.

Por conseguinte, pedimos que os estudantes fizessem os exercícios restantes da lista, depois de alguns minutos fizemos a correção de mais dois exercícios no quadro e como já estava acabando a aula informamos que na próxima aula faríamos as demais correções.

2.6 Módulo 4 – Estatística e Probabilidade

2.6.1 Plano de aula – 05.10.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves

Lucas Campos de Araújo

Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de medidas centrais e do Princípio Fundamental da Contagem.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com o conceito do princípio fundamental da contagem, espera-se que os alunos:

- Diferenciar média, moda e mediana;
- Resolver problemas que envolvam os conceitos de medidas centrais;
- Identificar situações que envolvem PFC;
- Estabelecer as restrições nos problemas que utilizam PFC;
- Utilizar a notação fatorial;
- Analisar e definir os casos dos problemas que envolvem PFC;
- Resolver problemas pelo princípio aditivo e o PFC;
- Compreender e resolver problemas pela possibilidade complementar.

Conteúdo: Medidas de tendência central e princípio fundamental da contagem.

Recursos Didáticos: quadro, giz e folhas A4.

Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1 (30 minutos)

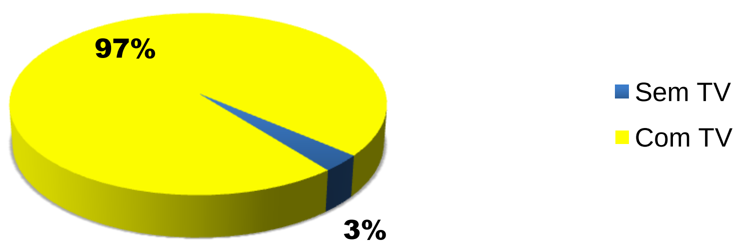
Nesta etapa pretendemos retomar o conceito de amostra e população para explorar os conceitos de média, moda e mediana. Para tal retomaremos a situação apresentada na primeira aula a respeito da “TV digital”:

Situação 1.

A tecnologia da TV digital garante acentuada melhoria na qualidade da imagem e do som, permite a transmissão simultânea de programas diferentes em um único sinal e a participação ativa do telespectador. Além disso, possibilita sintonizar as emissoras em aparelhos celulares e em automóveis. Essas qualidades, principalmente a interatividade, estimulam a mudança de comportamento do telespectador, até então quase totalmente passivo.

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE e da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios – PNAD, em 2011, 96,9% dos domicílios brasileiros tinham acesso à televisão, conforme o seguinte gráfico:

Distribuição dos domicílios brasileiros segundo a existência de TV



A partir desses dados iremos indagar aos discentes “Qual é o universo\conjunto\população estudado (a)? E qual é a amostra analisada?”. Com esta pergunta, esperamos que os discentes respondam que na pesquisa realizada os domicílios brasileiros formam uma população\universo de estudo enquanto os domicílios pesquisados formam uma amostra dessa população. E ressaltaremos que, em geral, se analisam amostras para estabelecer inferências estatísticas, dado que nem sempre é possível ou viável analisar toda a população.

Também, definiremos na lousa os conceitos abordados conforme abaixo:

Definição

Uma **população** é um conjunto de elementos que têm pelo menos uma característica em comum.

Definição

Uma **amostra** é um subconjunto finito formado por elementos extraídos de uma população.

Feito isto, indagaremos aos discentes sobre as medidas de tendência central que podem ser utilizadas em estatística, no intuito de que se lembrem dos conceitos de moda, média e mediana, então apresentaremos a definição formal dos conceitos, conforme segue.

Média

A média $\bar{x}$ é o valor obtido pelo quociente da soma dos elementos de um conjunto de dados pela quantia total de elementos. Ou seja, se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ então $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

Moda

A moda representa o valor mais frequente de um conjunto de dados, em caso de haver mais de um valor adicionasse prefixos bi, tri, etc, ou seja, bimodal, trimodal, etc.

Mediana

A mediana representa a posição do valor central de um conjunto de dados ordenado, se o número de elementos do conjunto for par deve-se tomar a média entre os dois elementos da posição central.

Posteriormente apresentaremos três situações-problema para diferenciar o uso de cada um dos conceitos apresentados, conforme segue.

Situação 1.

Uma instituição de ensino interessada em avaliar o nível de conhecimento de seus alunos que prestariam o vestibular decidiu realizar um simulado e obteve como resultado $\{10, 10, 10, 10, 9, 9, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 1\}$, sendo os resultados iguais ou superiores a 6 satisfatórios e inferiores a 6 insatisfatórios.

Resolução

Denotaremos que tomando a média dos elementos do conjunto de dados obtemos que:

$$\bar{x} = \frac{10 + 10 + 10 + 10 + 9 + 9 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1}{15} = \frac{90}{15} = 6$$

ou seja, tomando a média temos que os alunos obtiveram um resultado mediano.

Agora tomando a mediana que é o valor central do conjunto de dados temos que:

$$Med = 5$$

ou seja, pela mediana os alunos obtiveram um resultado inferior a média e insatisfatório.

E pela moda teríamos que:

$$Mod = 10$$

ou seja, tomando a moda teríamos que os alunos obtiveram um resultado excelente.

Por fim, concluiremos que neste caso a medida mais aceitável seria a mediana dado que no conjunto de dados temos 6 valores elevados que alteram o valor da média induzindo a pensar que os resultados foram satisfatórios, sendo que na verdade a maioria dos resultados foi insatisfatório.

Então iremos expor que:

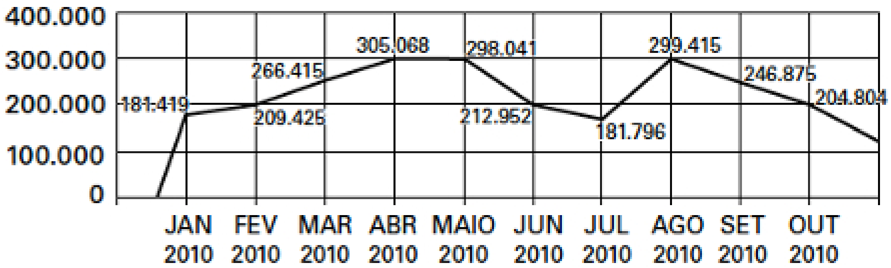
- A média deve ser utiliza quando os valores do conjunto de dados não apresentam grande discrepância entre si;
- A mediana deve ser utilizada quando houver grande discrepância entre os valores do conjunto de dados;
- E a moda deve ser utilizada quando houver uma característica nos elementos do conjunto de dados que se sobressaia em relação as demais.

ETAPA 2 (30 minutos)

Nesta etapa pretendemos propor algumas situações-problema envolvendo os conceitos abordados.

Exercícios:

1. O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.



Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é:

a) 212.952
b) 229.913
c) 240.621

d) 255.496
e) 298.041

Resolução

Esperamos que dos discentes lembrem que para calcular a mediana, devemos escrever todos os números referentes ao comportamento de emprego formal em ordem:

$$181.419;\ 181.719;\ 204.804;\ 209.425;\ 212.952;\ 246.875;\ 266.415;\ 298.041;\ 299.415;\ 305.068$$

E observem que os valores centrais dessa lista são: 212.952 e 246.875. Logo, tomando a média entre eles temos:

$$Med = \frac{212.952 + 246.875}{2} = \frac{459.827}{2} = 229.913{,}05$$

A parte inteira desse resultado é 229.913, representado pela alternativa b).

2. A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual.

As empresas que esse investidor decidiu comprar são:

a) Balas W e Pizzaria Y.
b) Chocolates X e Tecelagem Z.
c) Pizzaria Y e Alfinetes V.
d) Pizzaria Y e Chocolates X.
e) Tecelagem Z e Alfinetes V.

Resolução

Esperamos que os discentes percebam que para solucionar o problema basta calcular a média da receita bruta das empresas e selecionar as duas maiores, conforme segue.

Alfinetes V:

$$\frac{\mathbf{200+220+240}}{3}=\frac{660}{3}=220$$

Balas W:

$$\frac{200\ +\ 230\ +\ 200}{3}=\frac{630}{3}\ =\ 210$$

Chocolates X:

$$\frac{250\ +\ 210\ +\ 215}{3}=\frac{675}{3}\ =\ 225$$

Pizzaria Y:

$$\frac{230\ +\ 230\ +\ 230}{3}=\frac{690}{3}\ =\ 230$$

Tecelagem Z:

$$\frac{160\ +\ 210\ +\ 245}{3}=\frac{615}{3}\ =\ 205$$

Assim as maiores médias são da Pizzaria Y e Chocolates X, representado pela alternativa d).

3. Dois alunos apostaram qual deles terminaria o ano com a maior média. As notas deles foram:

	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	4º Bimestre
Aluno 1	10,0	9,0	5,0	4,0
Aluno 2	6,0	6,5	7,5	8,0

Entre as alternativas a seguir, assinale aquela que for correta.

- **a)** O aluno 1 conseguiu a melhor média, pois possui as melhores notas iniciais.
- **b)** O aluno 2 conseguiu a melhor média, pois manteve as notas próximas umas das outras.
- **c)** O aluno 1 venceu a aposta, pois sua média foi 7,0.
- **d)** O aluno 2 venceu a aposta, pois sua média foi 7,0.
- **e)** Nenhum aluno venceu a aposta, pois suas médias foram iguais.

Resolução

Esperamos que os discentes percebam que basta calcular a média dos alunos para solucionar o problema, conforme segue.

Aluno 1:

$$\frac{10+9+5+4}{4}=\frac{28}{4}=7$$

Aluno 2:

$$\frac{6+6{,}5+7{,}5+8}{4}=\frac{28}{4}=7$$

Assim concluam que ninguém venceu a aposta, pois a média de ambos é igual e portanto a alternativa correta é representada por $e)$.

ETAPA 3 (60 minutos)

Nesta etapa para introduzir o conceito do principio fundamental da contagem iremos nos valer da seguinte contextualização:

“Frequentemente estamos interessados em contar o número de maneiras em que determinadas ações podem ser executadas. De quantas maneiras podemos nos vestir? De quantas formas podemos viajar de uma cidade para outra? De quantas formas podemos combinar as opções de comida para montar o cardápio de um jantar? Uma maneira simples de contar é fazer uma lista com todas as possibilidades e contá-las uma a uma. Contudo, isso é pouco eficiente e é muito comum que o número de possibilidades seja tão grande que isso se torna até impossível. Por exemplo, de quantas formas podemos escolher as três letras e os quatro números para montar uma placa de carro? Ou como calcular o número de maneiras de preencher um cartão da Mega sena?”

Apresentaremos o seguinte problema que será resolvido com os alunos:

Jeniffer participará da promoção de uma loja de roupas que está dando um vale-compra no valor de R$ 1000,00 reais. Ganhará o desafio o primeiro participante que conseguir fazer o maior número de combinações com o kit de roupa cedido pela loja. No kit temos: seis camisetas, quatro saias e dois pares de sapato do tipo salto alto. De quantas maneiras distintas Jeniffer poderá combinar todo o vestuário que está no kit de roupa?

Resolução

Denotaremos que um método simples de visualizar todas as combinações possíveis é construindo uma árvore de decisão. Considerando as seguintes ações: qual camiseta vestir? E qual calça vestir, após a escolha da camiseta? A árvore de decisão é construída da seguinte forma:

- No primeiro nível, chamado de raiz da árvore, não é tomado nenhuma decisão. Como há mais camisetas, neste nível, indicamos as escolhas para camisetas.
- No segundo nível, indicamos as saias possíveis para cada uma das camisetas.
- No último nível, indicamos os sapatos possíveis para cada uma das saias possíveis.

Obtemos por meio da árvore de decisões 48 combinações, contando cada ramo da árvore.

Explicaremos para os alunos que este raciocínio é generalizado para situações onde duas ou mais ações ou escolhas precisam ser executadas, definindo:

Se desejamos executar uma sequência de *n* ações, onde a primeira ação pode ser executada de m_1 maneiras, a segunda de m_2 maneiras e assim sucessivamente, até que a n-ésima ação pode ser executada de m_n maneiras, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao produto $(m_1).(m_2).\dots.(m_n)$.

A formulação acima é denominada de **o Princípio Fundamental da Contagem**, chamado muitas vezes de princípio multiplicativo.

Em seguida, proporemos que os alunos resolvam algumas situações-problema.

Exercícios

1. Digamos que você possui 3 camisas e 2 calças sociais. De quantas maneiras diferentes você pode se vestir (escolhendo exatamente uma das camisas e uma das calças)?

Resolução

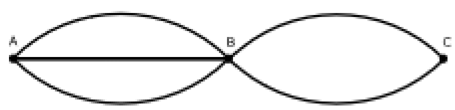
(i) escolher a camisa; (ii) escolher a calça. A ação (i) pode ser executada de 3 maneiras diferentes e, para cada uma dessas maneiras, poderemos executar a ação (ii) de 2 maneiras diferentes. Dessa forma, o número total de maneiras de executar ambas as ações será $3 \cdot 2 = 6$.

2. Para montar um sanduíche em uma lanchonete, o cliente deve escolher exatamente um tipo pão, um tipo de carne e um tipo de queijo. Sabe-se que existem três opções para o pão (baguete, pão de forma ou pão árabe), duas opções para a carne (hambúrguer ou frango) e três opções para o queijo (mussarela, cheddar ou suíço). Calcule quantos sanduíches diferentes é possível montar?

Resolução

O cliente terá 3 decisões. Há 3 possibilidades para a escolha do pão e, para cada uma delas, há 2 possibilidades para a escolha da carne. Além disso, agora, para cada uma dessas $2 \cdot 3$ possibilidades para escolha de pão e carne, há ainda 3 possibilidades para a escolha do queijo. Isso totaliza $(2 \cdot 3) \cdot 3 = 18$ maneiras de montar o sanduíche.

3. Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.



a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?

b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?

c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B?

Resolução

Esperamos que percebam que são 6 possibilidades diferente de ir de A até C.

Como, para ir são 6 possibilidades, para voltar também são 6. Totalizando, 36 possibilidades.

Como, para ir são 6 possibilidades, mas apenas uma delas foi escolhida, para não repetir estradas na volta, resta 1 possibilidade de C para B e 2 de B para A. Temos então 6·1·2 = 12 possibilidades

4. Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pinturas estão indicadas abaixo: Primeira: verde, amarelo, bege, verde, cinza; Segunda: verde, cinza, verde, bege, cinza. Quantas são as possibilidades?

Resolução

Iniciando a pintura pela primeira casa, que pode ser pintada com qualquer uma das quatro cores, seguindo para sua vizinha, que não poderá ser pintada apenas com a cor utilizada na primeira, e seguindo o mesmo raciocínio até a última casa, temos 4·3·3·3·3 = 324 possibilidades.

Etapa 4 (45 minutos)

Começaremos esta etapa, introduzindo a **notação fatorial**. Explicaremos que em diversas vezes em problemas matemáticos, nos deparamos com produtos em que os termos são naturais consecutivos. Para facilitar a representação destes produtos, foi criada a representação fatorial:

$$n!, n \in \mathbb{N}$$

Apresentaremos os seguintes exemplos para entendimento:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$\vdots$$

$$n! = n(n-1) \cdot n(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em seguida, proporemos o seguinte exemplo:

Exemplo

1. Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é:

a)288
b)296
c)864
d)1728
e) 2130

Resolução

Queremos com este problema, que os alunos pensem na restrição dada pelo enunciado e de que forma poderão resolver com os conceitos e notação apresentadas.

Com a ajuda dos alunos, solucionaremos no quadro o problema, explicando que o livro de Geometria tem $4!$ formas de ser organizado pelo princípio fundamental da contagem, do mesmo modo, o livro de Álgebra tem $2!$ e o livro de Análise tem $3!$ formas de ser organizado. Pelo PFC temos que:

$$4!\,2!\,3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 288$$

Obtemos 288 maneiras de organizar os livros. No entanto, pelo enunciado, os livros de mesmo assunto devem permanecer juntos, como são 3 livros temos 3!. Pelo PFC concluímos que: $288 \cdot 3! = 1728$maneiras de organizar os livros na estante, logo a alternativa correta é a d).

Em seguida proporemos os seguintes exercícios:

Exercícios

1. Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir.

grupos taxonômicos	número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

T&C Amazônia, ano 1, n.º 3, dez./2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

a) 1 320
b) 2 090
c) 5 845
d) 6 600
e) 7 245

Resolução

Esperamos que os discentes notem pela tabela e pelo PFC que temos:

$$2 \cdot 20 \cdot 33 = 1320 \; grupos$$

2. O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) *14*

b) *18*

c) *20*

d) *21*

e) *23*

Resolução

Esperamos que os discentes notem que para a identificação das cores primárias são definidas 3 cores. Juntando as cores, 2 a 2, obtemos mais 3 cores secundárias, totalizando 6 cores. Sendo cada uma no seu tom original, clara ou escura, obtemos $6 \cdot 3 = 18$*cores. Ainda, temos as cores branco e preto, finalizando 20 cores, alternativa c).*

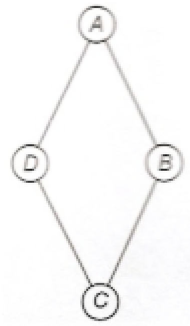
Etapa 5 (60 minutos)

Explicaremos aos alunos que há problemas em que não é possível aplicar diretamente o PFC e que isso acontece quando a árvore de decisão é assimétrica, ou seja, quando a quantidade de escolhas para uma certa ação muda de acordo com as ações tomadas anteriormente. Em situações como a descrita, faz-se necessário, dividir o problema em vários casos.

Para exemplificar, utilizaremos o seguinte problema:

Exemplo

1. *Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.*



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

Resolução

Explicaremos aos alunos que deve ser considerada duas situações para resolver o problema. A 1ª situação: as pedras em A e C são de cores diferentes e a 2ª situação: as pedras A e C são de mesma cor. Para a 1ª situação, existem 3 possibilidades de escolha para A, 2 possibilidades para C e 1 possibilidade para B e D. Obtendo pelo PFC: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$*possibilidades. Para a 2ª situação, existem 3 possibilidades de escolha para A, 1 possibilidade para C, 2 possibilidades para B e D, resultando em:* $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 12$*possibilidades. Logo, o artesão poderá produzir* $6 + 12 = 18$ *joias diferentes.*

Para concluir, afirmaremos que a técnica utilizada para resolver o problema acima é denominada de ***Princípio Aditivo****, definida como:*

"Ao dividir um problema de contagem em casos, onde dentro de cada caso contamos o número de soluções que nele se enquadram e todas as soluções se enquadram em exatamente um dos casos, o número total de soluções é igual à soma dos números de soluções de cada caso."

Em seguida, proporemos aos discentes algumas situações-problema.

Exercícios

1. *Digamos que você deseja comprar um computador, mas está em dúvida sobre qual marca, modelo e cor irá escolher. Há apenas duas marcas, que chamaremos de Marca A e Marca B, pelas quais você se interessa. A Marca A tem à disposição três modelos e cada um desses pode ser comprado em quatro possíveis cores. Já a Marca B oferece dois modelos, tais que, para cada um, há duas possíveis escolhas de cor. De quantas maneiras diferentes você pode realizar a compra?*

Resolução

Esperamos que os discentes observem que há três decisões que devem ser tomadas: a marca, o modelo e a cor. Porém, para cada possível marca, modelo e cor, a quantidade é diferente. Logo, temos duas situações: 1ª comprar um computador da marca A ou comprar um computador da marca B.

Se optarmos pela compra da marca A, pelo PFC temos: $3 \cdot 4 = 12$*escolhas para o modelo e cor. Se optarmos pela compra da marca B, pelo PFC temos:* $2 \cdot 2 = 4$*escolhas para o modelo e cor. Note que, poderemos executar apenas uma única situação, podemos então somar as escolhas obtendo 16 maneiras de realizar a compra.*

2. *Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.*

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

Resolução

Esperamos que os discentes observem que pela tabela, as escolas I, III e V não poderiam ser campeãs, pois não conseguiriam atingir a média de 68 pontos. Em caso de empate, a escola II é a campeã pelo quesito enredo. Esta mesma escola é a campeã em outros 6 casos possíveis e em cada um deles temos outras 5 possíveis maneiras das outras escolas se colocarem. Assim, o número total de configurações é $6 \cdot 5 \cdot 5 = 750$.

3. Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às 9 h, 10 h e 11 h e de segunda a sexta às 17 h e 18 h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

Resolução

Esperamos que os discentes observem que podemos dividir em dois casos: 1º com aula aos sábados e 2º sem aula aos sábados. Para o primeiro caso, são 3 possibilidades de aulas nos sábados, 2 possibilidades de horários e 4 possibilidades de dias. Obtendo pelo PFC 24 possibilidades. Já para o segundo caso, são 6 possibilidades de dias não consecutivos, 2 possibilidades de horários manhã/tarde. Para manhã existem 3 possibilidades de aula e para tarde existem 2 possibilidades. Pelo PFC temos 72 possibilidades. Pelo princípio aditivo, 96 possibilidades no total.

4. No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo). O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Resolução

Esperamos que os discentes observem que, pelo enunciado, temos 3 paisagens e 4 cores e que o fundo poderá ser azul ou cinza. Para o fundo azul temos: palmeira cinza ou verde e a casa azul ou verde, 4 possibilidades. Para o fundo cinza temos: palmeira verde e a casa azul, verde ou amarela, 3 possibilidades. Pelo princípio aditivo, 7 variações que é a alternativa b).

5. O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito anteriormente. Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

a) 14

b) 12

c) 8

d) 6

e) 4

Resolução

Como queremos que a leitura seja a mesma independente do lado, a barra deverá ser simétrica. Sabendo que o código de barras possui 5 barras, faz-se necessário considerar a possibilidade de combinação das 3 primeiras. Cada barra é preenchida com cor preta ou não, logo tem 2 possibilidades em cada barra. Para as três barras, obtemos 8 possibilidades. No entanto, como as barras não podem ser inteiramente brancas ou escuras, subtraímos duas possibilidades, totalizando 6 possibilidades, alternativa d).

Etapa 6 (45 minutos)

Começaremos etapa, afirmando aos alunos que muitas vezes é mais fácil contar o número de possibilidades de algo não acontecer do que o número de possibilidades de acontecer.

Ou seja, contamos o número de possibilidades de algo que não tem uma determinada característica e excluímos do total das possibilidades dadas, denominamos de possibilidade complementar. Utilizando o exercício abaixo abordaremos o que foi afirmado acima.

Chamamos de palavra qualquer sequência finita de letras, formadas usando o alfabeto de 26 letras. Assim, para ser considerada uma palavra, a sequência finita de letras não precisa fazer sentido, ou seja, não precisa ser encontrada num dicionário de Português. Por exemplo, “CASA”, “PERIPONGUE”, “TITANTNN” são palavras. Calcule o número de palavras com cinco letras, que possuem (pelo menos) duas letras consecutivas iguais.

Explicaremos aos alunos que se tentarmos contar as palavras destes tipos, teremos que dividir em vários casos. Por exemplo, podemos considerar primeiro as palavras em que todas as letras são iguais, em seguida, aquelas em que exatamente quatro letras são iguais, mas a quinta letra é diferente. Afirmaremos então que é mais fácil contar as palavras que não possuem a característica desejada.

De fato, para a primeira letra temos 26 possibilidades e 25 possibilidades para as demais letras. Obtemos um total de $26 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 = 26 \cdot 25^4$palavras de cinco letras que não possuem a característica desejada e que é a possibilidade complementar da desejada. Ainda, o total de palavras com cinco letras pelo PFC é igual 26^5. Logo, o número de palavras com a característica desejada é $26^5 - 26 \cdot 25^4 = 1725126$.

Em seguida, proporemos aos discentes algumas situações-problema.

Exercícios

1. Para gerar a sua senha de acesso, o usuário de uma biblioteca deve selecionar cinco algarismos de 0 a 9, permitindo-se repetições e importando a ordem em que eles foram escolhidos. Por questões de segurança, senhas que não tenham nenhum algarismo repetido são consideradas inválidas. Por exemplo, as senhas 09391 e 90391 são válidas e diferentes, enquanto a senha 90381 é inválida. O número total de senhas válidas que podem ser geradas é igual a:

a) 69760

b) 30240

c) 50000

d) 19760

Resolução

A quantidade de códigos com 5 algarismos de 0 a 9 pelo PFC é $10^5 = 100000$. Contando os algarismos que não são repetidos, obtemos pelo PFC: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$. Excluindo o valor encontrado do total obtemos 69760, alternativa a).

2. Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, no qual as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a 1ª letra da placa determina um estado desse país. Considerando o alfabeto com 26 letras, o número MÁXIMO de carros que cada estado poderá emplacar será de;

a) 175760

b) 409500

c) 6500000

d) 6760000

e) 175760000

Resolução

Pelo PFC é de 6760000, pois para a primeira letra temos 1 possibilidade que é uma letra por estado, para a segunda e terceira temos 26 possibilidades e para todos os números temos 10 possibilidades que são os algarismos de 0 à 9.

Por fim iremos propor os seguintes problemas extraclasse:

1. Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes (juntos), mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144
b) 180
c) 240
d) 288
e) 360

2. Quantas senhas com 4 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,e 9?

3. De quantas maneiras diferentes 6 amigos podem sentar em um banco para tirar uma foto?

4. Quantas comissões de 4 elementos podemos formar com 20 alunos de uma turma?

5. O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas

6. Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

7. Uma secretária possui 6 camisas, 4 saias e 3 pares de sapatos. O número de maneiras distintas com que a secretária poderá se arrumar usando 1 camisa, 1 saia e 1 par de sapatos corresponde a

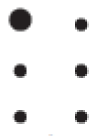
a) 13

b) 126

c) 72

d) 54

8. A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é :

a) 12

b) 31

c) 36

d) 63

e) 720

Referências

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 3. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Vol. 1. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Projeto Araribá: matemática: ensino fundamental/obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editora executiva Juliane Matsubara Barroso.1d. São Paulo: Moderna, 2006.

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 2 Agosto 2019.

Banco de questões OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br/banco.htm. Acesso em: 2 Agosto 2019.

2.6.1.1 Relatório – 05.10.2019

No sábado, dia 05 de Outubro de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o oitavo encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste. Neste dia, foram desenvolvidas atividades com o intuito de trabalhar o Princípio Fundamental da Contagem, com enfoque nas diversas situações em que pode ser apresentado.

Antes de iniciar o conteúdo do Princípio Fundamental da Contagem, retomamos com os alunos as principais medidas de dispersão: média, moda e mediana. Com o objetivo de distinguir quando seria correto usar cada uma delas. Para isso, propomos a situação onde descrevia uma pesquisa quanto ao uso de TV digitais nos domicílios no Brasil. Questionamos os alunos se aquela pesquisa representava toda a população brasileira, e caso a pesquisa em uma região específica os dados obtidos seriam os mesmos.

Após essa breve discussão, definimos com os alunos o que são amostra e população, e tomando a situação-problema:

Uma instituição de ensino interessada em avaliar o nível de conhecimento de seus alunos que prestariam o vestibular decidiu realizar um simulado e obteve como resultado $\{10,10,10,10,9,9,5,5,5,4,4,3,3,2,1\}$*, sendo os resultados iguais ou superiores a 6 satisfatórios e inferiores a 6 insatisfatórios.*

Indagamos os alunos acerca de qual medida de dispersão representaria melhor este problema. Para isso, mostramos que a média e a moda não representariam este problema, pois a média mostrava que todos os alunos tiverem resultados satisfatórios e a moda, o resultado contrário. Logo, concluímos com os alunos que a mediana seria o valor mais aceitável para representar este problema. Para finalizar esta etapa, propomos alguns exercícios para serem resolvidos pelos alunos.

Os alunos em geral, não tiveram dificuldades em realizar os cálculos das medidas de dispersão, e em um dos exercícios propostos, na hora da correção, uma aluna apresentou outra forma de solucionar que não estava prevista.

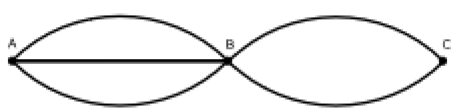
Em sequência, começamos a definir os conceitos envolvidos no Princípio Fundamental da Contagem. Para isto, foi realizado uma breve contextualização, onde foram descritas diversas situações do cotidiano em que estamos preocupados em “combinar” ou “arrumar” objetos de várias maneiras. Também, foi indagado aos alunos acerca das placas de carro, como era obtida aquela sequência alfanumérica e de que quantas maneiras poderíamos obter esta sequência.

Para reafirmar os conceitos de reagrupar, recombinar e rearrumar objetos e de quantos maneiras possíveis poderia ser realizado, propomos a seguinte situação para os alunos:

Jeniffer participará da promoção de uma loja de roupas que está dando um vale-compra no valor de R$ 1000,00 reais. Ganhará o desafio o primeiro participante que conseguir fazer o maior número de combinações com o kit de roupa cedido pela loja. No kit temos: seis camisetas, quatro saias e dois pares de sapato do tipo salto alto. De quantas maneiras distintas Jeniffer poderá combinar todo o vestuário que está no kit de roupa?

De imediato, os alunos associaram a multiplicação $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$como resultado para o problema. Indagamos então, como chegaram a este resultado e por quê era válido. Muitos afirmaram que era válido, mas nenhum explicou o porquê desse resultado. A fim de ilustrar o resultado e mostrar a validade, construímos no quadro a árvore de possibilidades para este problema, começando com as camisetas, saias, e por fim, sapatos. No final, concluímos com os alunos que cada raminho obtido da árvore era uma possibilidade e que o resultado obtido era o mesmo da multiplicação que disseram anteriormente. A fim de fixar a ideia da árvore de possibilidades, propomos 4 exercícios para os alunos.
Os alunos tiveram algumas dificuldades em interpretar o item c) do seguinte exercício:

3. Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.



a) *De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?*

b) *De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?*

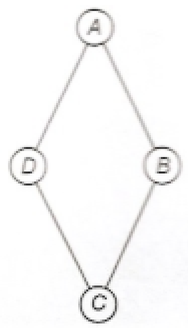
c) *De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B?*

Associaram a ideia de percorrer apenas um caminho, tanto pra ida e volta, mas não contaram que pra ida são 6 possibilidades. Assim, muitos chegaram na resposta 6, quanto o correto seria 12 possibilidades, uma vez que são 6 possibilidades para ir, 1 de voltar por C e 2 de voltar por B.

Em seguida, apresentamos a notação fatorial. A maioria dos alunos sabiam o cálculo que representava, mas não souberam explicar o porquê era utilizado. Apresentamos então, alguns exemplos de números em notação fatorial e afirmamos que era conveniente pois facilitava a representação. Propomos então, mais alguns exercícios a fim de estabelecer o que até aquele momento fora apresentado.

Logo após a correção dos exercícios, propomos a seguinte situação aos alunos:

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

Alguns alunos, responderam que pelo PFC já obteríamos a resposta, mas não souberam dizer qual era. No quadro, explicamos que cada ação tomada, determina a quantidade de decisões para a outra ação. Logo, propomos aos alunos que poderíamos resolver o problema, dividindo o mesmo em duas situações e que a soma das possibilidades das duas situações seria o valor que estávamos buscando.

Os alunos, apresentaram-se confusos com essa ideia, mas afirmamos que alguns problemas, como o apresentado, era necessário essa divisão em situações e somas das possibilidades e que isso é denominado pelo Princípio Aditivo. Propomos então, mais alguns exercícios para fixarem a ideia.

Em geral, os alunos apresentaram dificuldades para resolver os exercícios sugeridos. Pois todos, para serem resolvidos, teriam que ser divididos em situações e analisados cada uma. Muitos alunos tentaram resolver pelo PFC sem dividir em casos, para estes e o restante, reafirmamos a ideia de cada decisão tomada interferir na escolha da outra decisão. Depois de um determinado tempo, realizamos a correção no quadro, explicando cada situação com o propósito de sanar as dúvidas existentes.

Na sequência, afirmamos para os alunos que em algumas situações era mais fácil calcular a quantidade de possibilidade de determinada coisa não acontecer do que o contrário. Para isto, propomos o seguinte:

Calcule o número de palavras com cinco letras, que possuem (pelo menos) duas letras consecutivas iguais.

Apresentamos também aos alunos, que palavras não precisariam ter significado ou representar algo, que era considerado como uma sequência de letras. Indagamos então, acerca de palavras que condiziam com a situação apresentada. Alguns alunos disseram: “BANHO”, “SALA”, entre outras. No entanto, questionamos se sabíamos a quantidade exata dessas palavras.

Mostramos no quadro, que para o caso geral, uma palavra de 5 letras pode ser formado por $26 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 = 26 \cdot 25^4$ e que o caso apresentado e requerido era um subconjunto daquele valor, dado por $26 \cdot 25^4$. Logo, o resultado era a subtração $26^5 - 26 \cdot 25^4 = 1725126$. Afirmamos que essa ideia é resultado direto do conjunto complementar, e que, por exemplo, era mais fácil contar que não ganhará na Mega-Sena do que o contrário. Para finalizar a aula, propomos os exercícios restantes do material do aluno.

2.6.2 Plano de aula – 19.10.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves

Lucas Campos de Araújo

Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de permutação, combinação e arranjo e a capacidade de resolver problemas que envolvam estes conceitos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com análise combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar situações que envolvam permutação;
- Diferenciar permutação simples e com repetição;
- Desenvolver e relacionar as noções de fatorial e permutação;
- Distinguir arranjo e combinação;
- Resolver problemas que envolvam arranjo e combinação.

Conteúdo: Permutação, Arranjo e Combinação.

Recursos Didáticos: quadro, giz, folhas A4, régua e fita métrica.

Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1 (60 minutos)

Nesta etapa pretendemos retomar o Principio Fundamental da Contagem - PFC, no intuito de posteriormente apresentar o conceito de permutação simples. Para tal, iremos expor que:

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento acontecer é dado pelo produto $m \times n$.

Ainda apresentaremos o seguinte exemplo:

Exemplo

1. Digamos que você possui 3 camisas e 2 calças sociais. De quantas maneiras diferentes você pode se vestir (escolhendo exatamente uma das camisas e uma das calças)?

Resolução

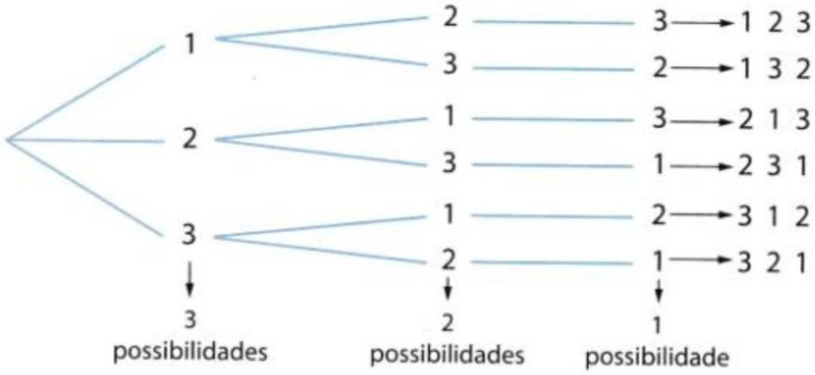
(i) escolher a camisa; (ii) escolher a calça. A ação (i) pode ser executada de 3 maneiras diferentes e, para cada uma dessas maneiras, poderemos executar a ação (ii) de 2 maneiras diferentes. Dessa forma, o número total de maneiras de executar ambas as ações será 3 · 2 = 6.

Feito isso, proporemos aos discentes o seguinte questionamento:

1ª. Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os números 1, 2 e 3?

Resolução

Esperamos que os discentes percebam que agora desejamos obter o número de agrupamentos possíveis com os 3 algarismos dados no enunciado e todos serão utilizados em cada agrupamento sem repetição. Ou seja, resolvendo por tentativa cheguem a: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. E concluam que são seis números possíveis. Que também podem ser representados pelo diagrama de árvore de possibilidades:



Ressaltaremos ainda que analisando a situação pelo PFC temos que $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.

Posteriormente diremos que:

Definição

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição.

De modo geral, se tivermos n elementos distintos, podemos escolher o primeiro elemento da fila de n maneiras, o segundo elemento de $n-1$ maneiras e prosseguindo desta forma e usando o princípio multiplicativo temos que o número de agrupamentos possíveis de se obter com n elementos é dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Denotaremos que esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de permutações simples. Indicado por P_n em que n é o número de elementos, ou seja,

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Ainda ressaltaremos que P_n é também chamado de fatorial do número natural n e indicado por $n!$ (lê-se “n fatorial”). Assim temos:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Por conseguinte, apresentaremos alguns exemplos no intuito de fixar os conceitos apresentados.

Exemplos:

1. Quantos agrupamentos podemos formar com 5 algarismos distintos sem repetição?

Resolução

$$P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

2. Quantas são as combinações (anagramas) possíveis sem repetição com as letras da palavra PERDÃO? E as que iniciam em P e terminam em O? E as que as letras A e O ficam juntas?

Resolução

(i)

$$P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

(ii) Devemos permutar as 4 letras não fixas, ou seja, calcular:

$$P\ -\ -\ -\ - O$$

$$P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

(iii) Como as letras devem estar juntas devemos considerar como se fossem apenas um, ou seja, permutar apenas 5 elementos, conforme segue:

$$P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Em sequência iremos propor algumas situações-problema envolvendo o conceito de permutação simples.

Exercícios

1. Qual é a soma dos números de 4 algarismos distintos formados por 2, 4, 6 e 8?

Resolução

Esperamos que os discentes percebam que a soma S procurada tem P_4 parcelas, ou seja, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ parcelas. E notem que na ordem das unidades simples U, cada algarismo aparece 6 vezes (número de permutações dos outros 3 algarismos nas outras ordens) e que ocorre o mesmo nas outras ordens que são dezena D, centena C e unidade de milhar UM.

Logo temos que a soma dos valores, em cada ordem, é:

$$\underbrace{(8 + 8 + \cdots + 8)}_{6\ vezes} + \underbrace{(6 + 6 + \cdots + 6)}_{6\ vezes} + \cdots + \underbrace{(2 + 2 + \cdots + 2)}_{6\ vezes} = 120$$

$$S = 120\ U + 120\ D + 120\ C + 120\ UM$$

$$S = (120 \times 1) + (120 \times 10) + (120 \times 100) + (120 \times 1000)$$

$$S = 120 + 1.200 + 12.000 + 120.000 = 133.320$$

2. Quantos são os anagramas da palavra SABER?

Resolução

Esperamos que os discentes notem que temos que realizar a permutação das 5 letras da palavra SABER, conforme segue:

$$P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 = 5!$$

3. O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75913 é:

a) 24

b) 31

c) 32

d) 88

e) 89

Resolução

Esperamos que os discentes contando apenas os ímpares observem que restam os algarismos 1, 3, 5, 7, 9. E pela permutação simples, obtém-se $5! = 120$ números de cinco algarismos distintos. Escrevendo estes números em ordem crescente até o número 75913, temos:

- $4! = 24$ números iniciados em 1
- $4! = 24$ números iniciados em 3
- $4! = 24$ números iniciados em 5
- $3! = 6$ números iniciados em 71
- $3! = 6$ números iniciados em 73
- $2! = 4$ números iniciados em 751
- $2! = 4$ números iniciados em 753
- $1! = 1$ número 75913

Logo, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75913 é:

$$24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 89°.$$

4. Com as letras da palavra PROVA podem ser escritos x anagramas que começam por vogal e y anagramas que começam e terminam por consoante. Os valores de x e y são, respectivamente:

a) 48 e 36

b) 48 e 72

c) 72 e 36

d) 24 e 36

e) 72 e 24

Resolução

Esperamos que os discentes notem que para x temos duas possibilidades (A ou O) para a primeira letra, como iremos utilizar apenas uma delas sobram 4 letras para permutar e assim concluam que:

$$x = 2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

E para y notem que temos 3 possibilidades (P, R ou V) para a primeira letra e como utilizaremos apenas uma sobram 2 possibilidades para a quinta letra em que também utilizaremos apenas uma, assim restam com as vogais três letras para permutar e assim concluam que:

$$y = 3 \times 3! \times 2 = 3 \times 6 \times 2 = 36$$

Logo, $x = 48$ e $y = 36$.

Também consideraremos outras resoluções como:

Para x:

- Primeira letra: duas possibilidades (A ou O)
- Segunda letra: quatro possibilidades (são 5, uma já foi utilizada para a primeira)
- Terceira letra: três possibilidades
- Quarta letra: duas possibilidades
- Quinta letra: uma possibilidade

Pelo princípio multiplicativo, são 48.

Para y:

- Para a primeira letra: 3 possibilidades (P,R ou V)
- Para a quinta letra: 2 possibilidades, uma já foi utilizada para a primeira.
- Para a segunda letra: 3 possibilidades, 5 letras, duas já foram utilizadas.
- Para a terceira letra: 2 possibilidades
- Para a quarta letra: uma possibilidade

Pelo princípio multiplicativo, são 36.

Logo, $x = 48\ e\ y = 36$.

ETAPA 2 (30 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar o conceito de permutação com repetição. Para tal tomaremos a seguinte situação-problema:

1ª. Quantas são os anagramas possíveis com a palavra AMORA?

Resolução

Esperamos que os discentes apresentem algumas ideias de resolução utilizando seus conhecimentos prévios.

Em sequência, iremos expor que nesse caso os anagramas não correspondem mais a uma permutação simples, pois temos letras repetidas que ocasionam anagramas repetidos.

Logo, apesar da palavra AMORA ter 5 letras o número de anagramas é inferior a $5! = 120$. Se as duas letras A fossem distintas, A_1MORA_2, teríamos $5!$ anagramas, ou seja, fixadas as letras M,R e O a permutação das letras A_1 e A_2 daria, para cada anagrama, origem a $2!$ novos anagramas. Como essas letras são iguais, a permuta não gera um novo anagrama, mas um repetido.

Então para o cálculo correto do número de anagramas da palavra AMORA, devemos dividir por $2!$ o total de permutações simples que é $5!$. Portanto, o total de anagramas da palavra AMORA é:

$$Anagramas = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

Ressaltaremos que o mesmo raciocínio se aplica quando há repetição de mais de um elemento, por exemplo, a palavra MACACA que tem:

$$Angramas = \frac{6!}{2!\,3!} = \frac{720}{2 \times 6} = \frac{720}{12} = 60$$

Posteriormente apresentaremos que:

Definição

O número de permutações de n elementos, dos quais $n_1, n_2, \dots, n_k$ são tipos distintos é indicado por $P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$ e é dado por:

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

Então proporemos algumas situações-problemas envolvendo permutação com repetição.

Exercícios

1. O número de anagramas da palavra BIOCIÊNCIAS que terminam com as letras AS, nesta ordem é:

a) $9!$

b) $11!$

c) $\frac{9!}{2!3!}$

d) $\frac{11!}{2!}$

e) $\frac{11!}{3!}$

Resolução

Esperamos que os discentes notem que como as letras AS devem aparecer sempre juntas no final, temos que realizar apenas a permutação das outras 9 letras e considerar a repetição das letras I e C com 3 e 2 vezes respectivamente, conforme segue:

$$\frac{P_9}{P_2 \times P_3} = \frac{9!}{2! \times 3!}$$

2. Sendo $n \neq 0$, o(s) valor(es) de n tal que $\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!} = 7n$ é (são):

a) 7

b) 0 e 7

c) 0 e 10

d) 1

e) 0 e 2

Resolução

Esperamos que os discentes manipulem a expressão utilizando a noção de fatorial, conforme segue:

$$\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n$$

$$\frac{[(n+1) \times n \times (n-1)!] - [n \times (n-1)!]}{(n-1)!} = 7n$$

$$\frac{(n-1)! \times ([(n+1) \times n] - n)}{(n-1)!} = 7n$$

$$[(n+1) \times n] - n = 7n$$

$$n^2 + n - n = 7n$$

$$n^2 = 7n$$
$$n = 7$$

ETAPA 3 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar aos discentes o conceito de arranjo. Para tal, retomaremos que a permutação simples de n elementos é qualquer agrupamento ordenado desses n elementos. Por exemplo, com a palavra AMOR podemos formar $4! = 24$ anagramas, ou seja, as 4 letras dessa palavra podem ser reordenadas de 24 maneiras diferentes, resultando 24 anagramas.

Então indagaremos aos discentes de quantas maneiras diferentes podemos formar sequências com 2 letras distintas, escolhidas entre as 4 da palavra AMOR.

Iremos explicar a situação em duas etapas:

1ª etapa: escolher a primeira letra entre 4 possíveis;

2ª etapa: escolher a segunda letra entre 3 possíveis.

Pelo princípio multiplicativo, iremos expor que temos $4 \times 3 = 12$ possibilidades de formar sequências com 2 letras distintas.

Observaremos que desse total de 12 possibilidades:

- Começam por A → AM, AO e AR;
- Começam por M → MA, MO e MR;
- Começam por O → OA, OM e OR;
- Começam por R → RA, RM e RO.

Diremos então que esses agrupamentos ordenados são os arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 2 a 2. E para representa-lo podemos escrever como $A_{4,2} = 4 \times 3 = 12$.

Ainda, explicaremos para 3 letras dentre as 4 possíveis, em que as duas primeiras etapas se repetem e, para a 3ª etapa, temos escolha da terceira letra entre as 2 restantes, o que totaliza $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades. Desse total de 24 possibilidades:

- Começam por A → AMO, AMR, AOM, AOR, ARO E ARM;
- Começam por M → MAO, MAR, MOA, MOR, MRA E MRO;
- Começam por O → OAM, OAR, OMA, OMR, ORA E ORM;
- Começam por R → RAM, RAO, RMA, RMO, ROA E ROM;

Denotaremos que esses agrupamentos ordenados são arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 3 a 3. E para representa-lo podemos escrever como $A_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

Por conseguinte, apresentaremos que:

Definição

Dado um conjunto com n elementos, chame-se arranjo simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

E denotaremos que se indica por $A_{n,p}$ o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p.

Então iremos calcular o número total de agrupamentos no caso geral de n elementos arranjados p a p, com $n \geq p$, conforme segue:

- Para $n = p$, temos que $A_{n,n} = P_n = n!$;
- Para $n > p$, temos n elementos distintos e vamos arranjá-los p a p. Construindo a árvore de possibilidades, obtemos:
    - Na primeira posição: n possibilidades, pois temos n elementos;
    - Na segunda posição: $(n-1)$ possibilidades, pois temos $(n-1)$ elementos disponíveis;
    - Na terceira posição:$(n-2)$ possibilidades, pois temos $(n-2)$ elementos disponíveis;
    - $\vdots$
    - Na p-ésima posição: $n-(p-1)$ possibilidades, pois temos $n-(p-1)$ elementos disponíveis.

E pelo PFC, temos que o número total de possibilidades é dado por:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times [n-(p-1)]}_{p\ fatores}$$

$$A_{n,p} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

Denotaremos que podemos indicar esse produto por termos fatoriais, multiplicando a expressão anterior por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$:

$$A_{n,p} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) \times \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) \times (n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ressaltaremos que podemos utilizar qualquer uma das duas expressões apresentadas. Para tal, iremos expor alguns exemplos, conforme segue:

- $A_{10,4} = \overbrace{10}^{n} \times 9 \times 8 \times \overbrace{7}^{n-p+1} = 5040$ ou $A_{10,4} = \frac{10!}{6!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6!}{6!} = 5040;$
- $A_{8,2} = \overbrace{8}^{n} \times \overbrace{7}^{n-p+1} = 56$ ou $A_{8,2} = \frac{8!}{6!} = \frac{8\times7\times6!}{6!} = 56.$

Por fim, denotaremos que no caso de combinações a ordem importa.

Feito isso, iremos propor algumas situações-problema abordando o conceito que fora explanado.

Exercícios

1. Quatro amigos vão ao cinema e escolhem, para sentar-se, uma fila em que há seis lugares disponíveis. Sendo n o número de maneiras como poderão se sentar, o valor de n/5 é igual a:

a) 360

b) 720

c) 144

d) 72

e) 24

Resolução

Esperamos que os discentes notem que podemos utilizar o conceito de arranjo simples para solucionar o problema, conforme segue:

$$A_{6,4} = \frac{6!}{2!} = 360$$

Logo como $n = 360$ temos que $\frac{n}{5} = \frac{360}{5} = 72$ que é representando pela alternativa d).

2. Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?

Resolução

Esperamos que os discentes notem que podemos utilizar o conceito de arranjo simples para solucionar o problema, conforme segue:

$$A_{30,4} = \frac{30!}{26!} = 657.720 \text{ maneiras.}$$

3. Para uma viagem, seis amigos alugaram três motocicletas distintas, com capacidade para duas pessoas cada. Sabe-se que apenas quatro desses amigos são habilitados para pilotar motocicletas e que não haverá troca de posições ao longo do percurso. De quantas maneiras distintas esses amigos podem se dispor nas motocicletas para realizar a viagem?

a) 24

b) 72

c) 120

d) 144

e) 720

Resolução

Esperamos que os discentes notem que podemos utilizar o conceito de arranjo simples para solucionar o problema, conforme segue:

$$A_{4,3} = \frac{4!}{1!} = 24$$

Logo a 24 maneiras de se definir os pilotos e $P_3 = 3! = 6$ modos de se ocupar os lugares restantes.

Assim esperamos que concluam pelo princípio multiplicativo que há $24 \times 6 = 144$ maneiras distintas de acomodar os seis amigos nas motocicletas, logo a alternativa correta é d).

ETAPA 4 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar aos discentes o conceito de combinação. Para tal, faremos aos discentes o seguinte questionamento:

1ª. Considerando o conjunto formado pelas letras da palavra AMOR, quantos subconjuntos com 3 elementos podemos formar?

Resolução

Denotaremos que, como visto anteriormente, o número de agrupamentos da palavra AMOR é dado por $A_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$. Esses agrupamentos são:

AMO	AMR	AOM	AOR	ARO	ARM	MAO	MAR	MOA	MOR	MRA	MRO
OAM	OAR	OMA	OMR	ORA	ORM	RAO	RAM	RMA	RMO	ROA	ROM

Ressaltaremos que em termos de conjuntos cujos elementos são as letras do agrupamento, os conjuntos formados por AMO, AOM, MAO, MOA, OAM e OMA são iguais, pois ao permutar 3 letras, o conjunto continua tendo exatamente os mesmos elementos, isto é, o conjunto não se modifica.

Dessa forma, o total de 24 sequências com as 3 letras deve ser dividido por $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (número de permutações de 3 letras).

Assim poderemos afirmar que a quantidade de subconjuntos com 3 elementos é $\frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{24}{6} = 4$, escolhidos entre os 4 elementos do conjunto das letras da palavra AMOR:

$$\{A, M, O\}, \{A, M, R\}, \{A, O, R\}, \{M, O, R\}$$

Denotaremos que esses agrupamentos são combinações simples de 4 elementos tomados 3 a 3.

Por conseguinte, iremos expor que:

Definição

Dado um conjunto de n elementos, chama-se de combinação simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos escolhidos dentre os n possíveis.

Ainda iremos expor que indica-se por $C_{n,p}$ o número de combinações simples de n elementos tomados p a p.

Denotaremos que com p elementos distintos, podemos obter $p!$ permutações. Isso significa que, a partir de uma combinação, podemos obter $p!$ arranjos distintos dos n elementos tomados p a p.

Logo, o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos $(A_{n,p})$ e o número de permutações $(p!)$:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Por fim, denotaremos que no caso de combinações a ordem não importa.

Posteriormente iremos propor algumas situações-problema envolvendo o conceito de combinação.

Exercícios

1. Um grupo de 6 alunos decide escrever todos os anagramas da palavra PERGUNTA. Esta tarefa será feita em vários turnos de trabalho. Em cada turno 3

alunos escrevem e os outros descansam. Para serem justos, decidiram escrever o mesmo número de anagramas em cada turno.
Qual deve ser o número mínimo de anagramas, escrito por turno, de modo que não se repitam grupos de trabalho?

a) 23
b) 720
c) 2016
d) 5040
e) 35000

Resolução

Esperamos que os discentes notem que o número de anagramas da palavra PERGUNTA é $P_8 = 8! = 40320$. E como temos 6 alunos para agrupa-los 3 a 3 esperamos que utilizem o conceito de combinação simples, conforme segue:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

Logo para obtermos o número de anagramas que cada aluno deverá escrever esperamos que façam:

$$\frac{40320}{20} = 2016.$$

2. Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.

Resolução

Esperamos que os discentes notem que serão escolhidos 4 times dentre 12 times para definir o grupo A, como a ordem de escolha não importa, trata-se de uma combinação. Para o jogo de abertura, devem ser escolhidos dois dentre os quatro times que formam o grupo A, sendo que o primeiro joga em seu próprio campo e o segundo como visitante, logo a ordem de escolha importa, portanto trata-se de um arranjo. Assim a resposta correta esta representada pela alternativa $a)$.

Por fim iremos propor os seguintes problemas extraclasse:

1. Quantos números de 5 algarismos podemos formar com os números 1,2,3,4,5?

2. Quantos são os anagramas da palavra FULCRO?

3. Tomando como base a palavra UFPEL, resolva as questões a seguir.

- **a.** Quantos anagramas podem ser formados de modo que as vogais estejam sempre juntas?
- **b.** Quantos anagramas podem ser formados com as letras UF juntas?
- **c.** Quantos anagramas podem ser formados com as letras PEL juntas e nessa ordem?

4. Considere todos os números formados por seis algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a. Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1.
b. Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512346 e que número ocupa a 242ª posição.

5. Determine o número de anagramas da palavra PRECIPUAMENTE.

6. Se $\frac{(n-1)!}{(n+1)!-n!} = \frac{1}{81}$, então o valor de n é:

- **f)** 13
- **g)** 11

h) 9
i) 8
j) 6

7. Uma família é composta por seis pessoas (pai, mãe e quatro filhos) que nasceram em meses diferentes do ano. Calcule as sequências dos possíveis meses de nascimento dos membros dessa família.

8. Em época de eleição para o grêmio estudantil do colégio, tiveram 12 candidatos aos cargos de presidente, vice-presidente e secretário. De quantos modos diferentes estes candidatos poderão ocupar as vagas deste grêmio?

9. Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

• Um entre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo;
• Um entre os tamanhos: pequeno e grande;
• De um até cinco entre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame; sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

Calcule:

a. Quantos sanduíches distintos podem ser montados;
b. O número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 2. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Vol. 2. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 2 Agosto 2019.

Banco de questões OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br/ banco.htm. Acesso em: 2 Agosto 2019.

2.6.2.1 Relatório – 19.10.2019

No sábado, dia 19 de Outubro de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o nono encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar os conceitos de Permutação, Arranjo e Combinação.

Inicialmente, retomamos junto aos discentes algumas ideias abordadas no encontro anterior sobre princípio fundamental da contagem, para que pudéssemos apresentar o conceito de permutação simples e relacioná-lo com o fatorial. Para tal, expomos alguns exemplos na lousa, como o número de possibilidades para se vestir quando temos 3 camisas e 2 calças, denotando o cálculo das possibilidades tanto pelo princípio multiplicativo, quanto pela árvore de possibilidades. Então para formalizar o conceito denotamos que se um evento é composto por duas etapas independentes e sucessivas e tendo a primeira etapa m possibilidades e a segunda n possibilidades, temos que o número de possibilidades total do evento é dado pelo produto de m por n.

Posteriormente, propomos outros exemplos para fixar o conceito, por exemplo, sobre as possibilidades de números de 3 algarismos distintos formados pelos números 1, 2 e 3. Neste denotamos a relação da permutação com o fatorial, expondo que o número de possibilidades pode ser expresso por $3.2.1 = 3! = 6$, além disso, expomos que permutar é basicamente a troca de posição dos elementos.

Por conseguinte, propomos algumas situações-problema envolvendo o conceito abordado, nas quais notamos certa dificuldade dos discentes em expressar um raciocínio mais abstrato do que mecânico, visto que muitos estavam tentando escrever todas as possibilidades, o que pode ser uma tarefa árdua em alguns casos. Contudo, por indagações e encaminhamentos individuais conseguimos que alguns estabelecem meios de resolução diferentes. Assim, fora possível corrigir os problemas na lousa com a participação de alguns discentes.

Na sequência, com a intenção de apresentar o conceito de permutação com repetição, propomos aos discentes que estabelecessem o número de palavras possíveis com as letras da palavra AMORA. Em um primeiro momento alguns discentes pensaram em 5!, mas logo perceberam que temos letras repetidas. Neste momento, expomos que quando temos elementos repetidos ao trocá-los de posição obtemos a mesma configuração, desse modo é necessário excluir os termos que se repetem utilizando-se da operação de divisão.

Ainda sobre permutação com repetição, para tornar mais claro o conceito, pedimos que os alunos expusessem uma palavra, a qual foi ARARA. Então, utilizando a lousa e giz colorido, determinamos os 12 casos possíveis sem repetição dentro os 120 anagramas totais.

ARARA	ARARA	ARARA	ARARA	ARARA	ARARA
ARARA	ARARA	ARARA	ARARA	ARARA	ARARA

E como anteriormente, propomos algumas situações-problema para explorar a compreensão dos discentes sobre o assunto. Dentre os problemas propostos havia um que exigia manipulação algébrica, no qual os discentes tiveram dificuldades por não estarem acostumados com este tipo de trabalho. Contudo demos os encaminhamentos necessários para que os discentes tomassem nota sobre as notações e expomos a resolução dos problemas na lousa.

Em seguida, no intuito de introduzir o conceito de arranjo utilizamos a palavra AMOR. Inicialmente descrevemos que utilizando permutação simples teríamos 24 possibilidades, no entanto podemos estar interessados em analisar apenas as sequências formadas por duas letras distintas da palavra, ou ainda por três letras distintas. Deste modo obtemos que para duas letras temos 12 possibilidades e para três letras temos 24 possibilidades. Em ambos os casos relacionamos o número de permutações inicial com os casos particulares, por exemplo, temos que $12 = \frac{24}{2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4!}{(4-2)!}$. A partir disto definimos o conceito de arranjo, denotando que a ordem importa, e na sequência propomos algumas situações-problema, nas quais os discentes não apresentaram grandes dificuldades.

Por fim, com a intenção de introduzir o conceito de combinação retomamos o exemplo da palavra AMOR, no qual tratamos às possibilidades em termos de conjuntos cujos elementos são as letras do agrupamento. Assim, denotamos que os conjuntos formados por AMO, AOM, MAO, MOA, OAM e OMA são iguais, pois ao permutar 3 letras, o conjunto continua tendo exatamente os mesmos elementos, isto é, o conjunto não se modifica.

Dessa forma, expomos que o total de 24 sequências com as 3 letras deve ser dividido por $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (número de permutações de 3 letras). E assim, afirmamos que a quantidade de subconjuntos com 3 elementos é $\frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{24}{6} = 4$, escolhidos entre os 4 elementos do conjunto das letras da palavra AMOR:

$$\{A, M, O\}, \{A, M, R\}, \{A, O, R\}, \{M, O, R\}$$

Ainda, como feito anteriormente tomamos o número de possibilidades e relacionamos com as repetições conforme segue $4 = \frac{24}{6} = \frac{4!}{3!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!}$. Assim conseguimos expor que $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. E então resolvemos um exercício conceitual em que os discentes tinham que identificar se utilizariam arranjo e combinação, no qual lembrando-se de que para arranjo a ordem importa e para combinação não importa, os discentes não tiveram dificuldade.

2.6.3 Plano de aula – 26.10.2019

Plano de Aula

Janaina Maria de Lima Gonçalves

Lucas Campos de Araújo

Patrícia Ferreira Suri

Público-Alvo:

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 4 horas.

Objetivo Geral: Promover aos alunos a apropriação dos conceitos introdutório da teoria de probabilidade e a capacidade de resolver problemas que envolvam estes conceitos.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com a teoria de probabilidade, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar um experimento aleatório;
- Comparar um evento com o espaço amostral;
- Calcular a probabilidade de um evento;
- Distinguir eventos independentes e dependentes;
- Indicar eventos mutuamente exclusivos;
- Relacionar a teoria de conjunto com probabilidade;
- Resolver problemas que envolvam experimentos aleatórios.

Conteúdo: Probabilidade.

Recursos Didáticos: quadro, giz, folhas A4, régua e fita métrica.

Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1 (30 minutos)

Nesta etapa para introduzir a aula iremos expor para os discentes a seguinte contextualização:

Nos jogos de futebol, antes de iniciar a partida, o juiz pede aos capitães de cada equipe que escolham o lado da moeda (cara ou coroa) e, depois, a lança para o alto. O vencedor desse cara ou coroa pode escolher o lado do campo para iniciar a partida ou optar pela posse da bola.

Feito isso indagaremos aos discentes sobre o motivo pelo qual é utilizado este método. E posteriormente explicaremos que esse método garante que as duas equipes tenham a mesma chance de escolha, já que é possível obter um de dois valores: cara ou coroa.

Denotaremos que a área que investiga a chance de ocorrência de um evento é denominada teoria da probabilidade e teve sua origem no século XVII, na tentativa de responder questões ligadas aos jogos de azar.

Então indagaremos aos discentes sobre outras situações de seu conhecimento que envolvem a teoria de probabilidades esperando que os mesmos relatem múltiplos aspectos da vida social e econômica que vivenciam, como previsão meteorológica, mercado financeiro, efeitos colaterais de medicamentos, entre outros.

Por conseguinte, retomando a situação do futebol, iremos expor que, antes do lançamento da moeda, não é possível saber com exatidão qual será o resultado. Por isso, esse tipo de situação é chamada de **experimento aleatório**. Daremos, também, outros exemplos de experimentos aleatórios como o lançamento de um dado, a retirada de uma bola em um bingo, o sorteio dos números na loteria, entre outros.

Ressaltaremos que os possíveis resultados no lançamento de uma moeda, denominados **eventos**, são: cara ou coroa. O conjunto dos eventos possíveis $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ forma o **espaço amostral** desse experimento. Daremos, também, outros exemplos como o lançamento de um dado não viciado em que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Assim concluiremos que:

- **Experimento aleatório** é todo experimento que, quando repetido várias vezes sob as mesmas condições, apresenta, entre as possibilidades, resultados imprevisíveis;
- **Espaço amostral** ($\boldsymbol{\Omega}$) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento;
- **Evento (E)** é todo subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

Em sequência apresentaremos algumas situações como exemplo.

Exemplos

1. No lançamento de um dado, um possível evento é: o número apresentado na face voltada para cima é par. Nesse caso, denotaremos que o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o evento é $E = \{2, 4, 6\}$. E o número de elementos dos dois conjuntos é indicado, respectivamente, por $\#\Omega = 6$ e $\#E = 3$.

2. Quando se retira uma bola de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50, um possível evento é: a bola retirada conter um número primo menor que 20. Nesse caso, denotaremos que o espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 49, 50\}$ e o evento é $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. E o número de elementos dos dois conjuntos é indicado, respectivamente, por $\#\Omega = 50$ e $\#E = 8$.

Denotaremos então os seguintes conceitos:

- **Evento simples ou elementar** é todo subconjunto unitário do espaço amostral;
- **Evento certo** é quando o subconjunto coincide com o espaço amostral, ou seja, são equipotentes;
- **Evento impossível** é quando o subconjunto é vazio, ou seja, não tem elementos.

Em sequência iremos propor alguns exercícios para trabalhar os conceitos abordados.

Exercícios

1. Em uma embalagem, há 500 parafusos. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 3 parafusos dessa embalagem e verificar se eles estão de acordo com as normas de qualidade. Calcule o número de elementos do espaço amostral desse experimento.

Resolução

Esperamos que os discentes notem que para descobrir o número de elementos é necessário contar todos os subconjuntos possíveis de 3 parafusos dentre os 500 disponíveis, ou seja, calcular a combinação de 500 parafusos agrupados 3 a 3, conforme segue:

$$C_{500,3} = \frac{500!}{3!\,497!} = 20.708.500$$

2. Para o lançamento simultâneo de 2 dados, um azul e um vermelho, considerados ambos não viciados e numerados de 1 a 6, determine os eventos correspondentes a cada uma das seguintes situações:

- **a)** Sair o mesmo número em ambos os dados;
- **b)** Sair soma menor que 2;
- **c)** Sair soma maior que 1 e menor que 15;
- **d)** Sair, em um dos dados, o número 6 e, no outro dado, um número múltiplo de 3.

Resolução

Esperamos que os discentes notem que o espaço amostral é:

$$\Omega = \begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix}$$

e assim obtenham os seguintes resultados:

(a) $E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

(b)$E = \emptyset$

(c) $E = \Omega$

(d)$E = \{(6,3),(3,6),(6,6)\}$

ETAPA 2 (30 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar aos discentes a definição formal de probabilidade. Para tal, proporemos a seguinte situação:

Suponha que Joaquim em um belo dia se sinta com sorte e queira fazer apenas um jogo na loteria conhecida como Mega Sena. Contudo antes jogar ele decide conferir as suas chances de vitória em relação à quantidade de números escolhidos para se jogar.

Joaquim sabe que uma cartela da Mega Sena é composta por 60 números dois quais serão sorteados seis para determinar o resultado. Ainda, sabe que:

Quantidade de nº Jogados	Valor da Aposta
6	3,50
7	24,50

8	$98{,}00$
9	$294{,}00$
10	$735{,}00$
11	$1.617{,}00$
12	$3.234{,}00$
13	$6.006{,}00$
14	$10.510{,}50$
15	$17.517{,}50$

Como Joaquim possui um orçamento limitado de $R\$600{,}00$ para realizar suas apostas, qual seria a estratégia probabilisticamente mais correta a ser tomada?

Resolução

Iremos expor que podemos resolver a situação determinando o espaço amostral e verificando a probabilidade de cada jogo com quantidades diferentes de nº marcados em relação ao orçamento disponível.

Para tal, denotaremos que o espaço amostral, ou seja, o conjunto dos resultados possíveis desse experimento aleatório pode ser obtido por uma combinação dos 60 números tomados 6 a 6, conforme segue:

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!\,54!} = 50.063.860$$

A partir desses $50.063.860$ grupos iremos concluir que a chance de Joaquim ganhar com:

- 1 cartela de 6 números é de 1 em $50.063.860$, em que podemos representar o evento por $E = 1\, cartela\; de\; 6\, números$ e a probabilidade por $P(E) = \frac{1}{50.063.860} \approx 0{,}000000019$.

Ressaltaremos que nessa situação, consideramos que, para cada evento simples, existe a mesma chance de ocorrência. E quando adotamos esse critério em um espaço amostral finito, esse espaço é denominado **espaço amostral equiprovável.**

Então continuaremos a explicação da situação para os demais casos:

- 1 cartela de 7 números é equivalente a 7 cartelas de 6 números, pois $C_{7,6} = \frac{7!}{6!1!} = 7$ dentre as $50.063.860$, ou seja, denotando por

$E = 1\, cartela\ de\ 7\, números$ temos que a probabilidade é $P(E) = \frac{7}{50.063.860} = \frac{1}{7.151.980} \approx 0{,}000000139$.

- 1 cartela de 8 número é equivalente a 28 cartelas de 6 números, pois $C_{8,6} = \frac{8!}{6!2!} = 28$ dentre as $50.063.860$, ou seja, denotando por $E = 1\, cartela\ de\ 8\, números$ temos que a probabilidade é $P(E) = \frac{28}{50.063.860} = \frac{1}{1.787.995} \approx 0{,}000000559$.
- 1 cartela de 9 números é equivalente a 84 cartelas de 6 números, pois $C_{9,6} = \frac{9!}{6!3!} = 84$ dentre as $50.063.860$, ou seja, denotando por $E = 1\, cartela\ de\ 9\, números$ temos que a probabilidade é $P(E) = \frac{84}{50.063.860} = \frac{3}{1.787.995} \approx 0{,}000001677$.

Concluiremos então que como Joaquim dispõem de apenas $R\$600{,}00$ e irá comprar apenas uma cartela terá maiores chances de ganhar se fizer uma aposta de 9 números.

Por fim, apresentaremos a seguinte definição:

Definição

Em um espaço amostral equiprovável Ω, finito e não vazio, a **probabilidade** de ocorrência de um evento E, indicada por $P(E)$, é a razão entre o número de elementos do evento, $\#E$, e o número de elementos do espaço amostral, $\#\Omega$:

$$P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega}$$

A partir da definição denotaremos que:

$$0 \leq \#E \leq \#\Omega$$

$$\frac{0}{\#\Omega} \leq \frac{\#E}{\#\Omega} \leq \frac{\#\Omega}{\#\Omega}$$

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Ou seja, se E é um evento impossível, então $P(E) = 0$ e se E é um evento certo então $P(E) = 1$.

Em sequência iremos propor algumas situações-problema para fixar o conceito apresentado.

Exercícios

1. Um casal planeja ter três filhos. Calcule a probabilidade de nascimento de:

a) Duas meninas e um menino;

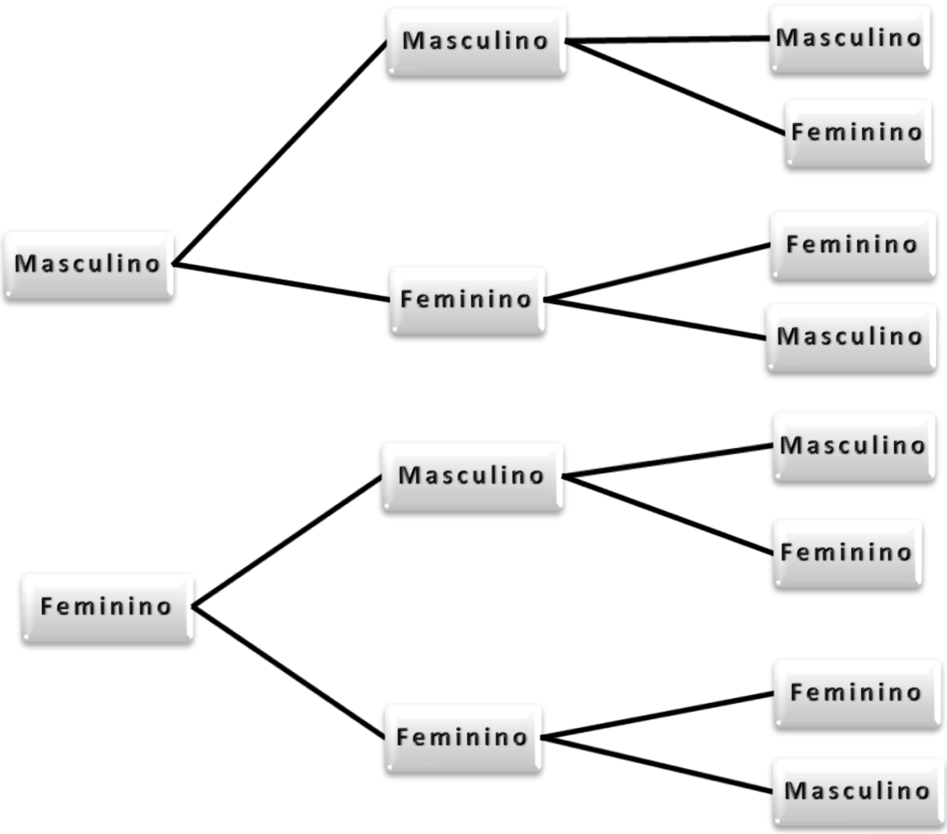
b) Três meninos;

c) Pelo menos um menino;

d) Todas as crianças do mesmo sexo.

Resolução

Esperamos que os discentes descrevam o espaço amostral para então se preocupar com os eventos do enunciado, isto poderá ser feito, por exemplo, por um diagrama conforme segue:



Ou seja, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{(M,M,M),(M,M,F),(M,F,M),(F,M,M),(F,F,M),(F,M,F),(M,F,F),(F,F,F)\}$$

(a) $E = \{(F,F,M),(F,M,F),(M,F,F)\}$ logo $\#E = 3$ e temos que $P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega} = \frac{3}{8}$.

(b) $E = \{(M,M,M)\}$ logo $\#E = 1$ e temos que $P(E) = \frac{1}{8}$.

(c) $E = \{(M,M,M),(M,M,F),(M,F,M),(F,M,M),(F,F,M),(F,M,F),(M,F,F)\}$ logo $\#E = 7$ e temos que $P(E) = \frac{7}{8}$.

(d) $E = \{(M,M,M),(F,F,F)\}$ logo $\#E = 2$ e temos que $P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

2. Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

a) 8%

b) 9%

c) 11%

d) 12%

e) 22%

Resolução

Esperamos que os discentes observem que o número de elementos do espaço amostral é

$$\#\Omega = 42 + 22 + 56 + 30 + 50 = 200$$

Como queremos saber a probabilidade de uma pessoa portadora de doença crônica ter sido vacinada e temos do enunciado que 22 com doenças crônicas foram vacinadas, esperamos que os discentes utilizem a definição de probabilidade e obtenham:

$$P(E) = \frac{22}{200} = \frac{11}{100} = 0{,}11 \equiv 11\%$$

ETAPA 3 (40 minutos)

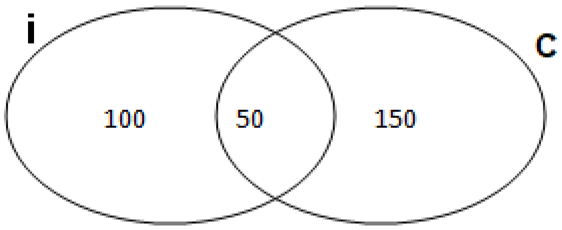
Nesta etapa pretendemos apresentar aos discentes os conceitos de interseção e união de eventos, eventos complementares e mutuamente exclusivos, para tal faremos uso dos diagramas de Venn associados a situações-problema.

Situação 1.

Entrevistaram-se 300 adolescentes acerca da preferência quanto a esportes individuais ou esportes coletivos. O resultado da pesquisa foi o seguinte:

- 150 gostam de esportes individuais;
- 200 gostam de esportes coletivos;
- 50 gostam igualmente dos dois tipos.

Denotaremos que é possível representar a situação utilizando o diagrama de Venn, conforme segue:



Então iremos expor que, nesse experimento, o espaço amostral é a união do conjunto dos adolescentes que gostam de esportes individuais (i) com o conjunto dos que gostam de esportes coletivos (C), ou seja, o total de 300 jovens entrevistados. Ressaltaremos que escolhendo um adolescente ao acaso:

- A probabilidade de E: $gostar\ apenas\ de\ esportes\ individuais$ é dada por $P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$;
- A probabilidade de E: $gostar\ apenas\ de\ esportes\ coletivos$ é dada por $P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega} = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$;
- A probabilidade de E: $gostar\ de\ ambos\ os\ tipos\ de\ esportes$ é dada por $P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$.

Ressaltaremos que em geral, se A e B são eventos quaisquer, a **probabilidade da interseção** de A e B, representada por $P(A \cap B)$, é dada por:

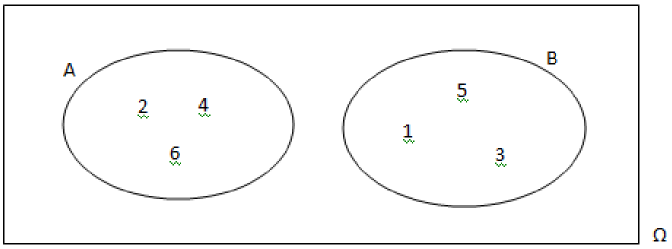
$$P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}$$

Ainda observaremos que se A e B não apresentam elementos comuns, ou seja, $A \cap B = \emptyset$ temos que $P(A \cap B) = 0$, pois $\#(A \cap B) = 0$.

Situação 2.

Considere o lançamento de um dado não viciado numerado de 1 a 6. Nessa situação, considere o evento $A\colon sair\ número\ par$ com $\#A = 3$, e o evento $B = sair\ número\ ímpar$ com $\#B = 3$. Sabe-se que $\#\Omega = 6$, logo a probabilidade dos eventos A e B é dada por:

$$P(A) = \frac{3}{6} = P(B)$$



Denotaremos que a probabilidade de ocorrência do evento B poderia ser calculada considerando-se que há somente duas possibilidades no experimento, ou seja, o número sorteado só pode ser par ou ímpar. Assim, a reunião dos eventos A e B implica um evento certo, cuja probabilidade é igual a 1. Isto é, $P(A) + P(B) = 1 \rightarrow P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$

Por conseguinte, ressaltaremos que se Ω é o espaço amostral de um experimento aleatório e A um evento de Ω. Dizemos que o evento $\bar{A}$ é o **complementar** do evento A se:

- $\bar{A} \cap A = \emptyset$;
- $\bar{A} \cup A = \Omega$.

Assim teremos que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, ou seja, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Situação 3.

Marcos está jogando com os amigos. A brincadeira consiste em somar pontos com o lançamento simultâneo de dois dados, um vermelho e um azul. Qual é a probabilidade de Marcos obter soma par ou soma múltipla de 3?

Resolução

Denotaremos que conhecemos e podemos descrever o espaço amostral e os eventos mencionados, conforme segue:

- O espaço amostral Ω tem 36 elementos:

$$\Omega = \begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix}$$

- O evento $A = sair\ soma\ par$ tem 18 elementos e temos que $P(A) = \frac{18}{36}$:

$$A = \begin{matrix} (1,1),(1,3),(1,5) \\ (2,2),(2,4),(2,6) \\ (3,1),(3,3),(3,5) \\ (4,2),(4,4),(4,6) \\ (5,1),(5,3),(5,5) \\ (6,2),(6,4),(6,6) \end{matrix}$$

- O evento $B = sair\ soma\ múltipla\ de\ 3$ tem 12 elementos e temos que $P(B) = \frac{12}{36}$:

$$B = \begin{matrix} (1,2),(1,5) \\ (2,1),(2,4) \\ (3,3),(3,6) \\ (4,2),(4,5) \\ (5,1),(5,4) \\ (6,3),(6,6) \end{matrix}$$

Estamos interessados na probabilidade de ocorrer o evento A ou B, ou seja, na **probabilidade da união** de A e B, que é dada por $P(A \cup B)$.

Logo para a situação analisada teremos que:

$$A \cup B = \begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,5) \\ (2,1),(2,2),(2,4),(2,6) \\ (3,1),(3,3),(3,5),(3,6) \\ (4,2),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,3),(5,4),(5,5) \\ (6,2),(6,3)(6,4),(6,6) \end{matrix}$$

Pela definição de probabilidade temos que:

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Logo a probabilidade de Marcos obter soma par ou múltipla de 3 é de $\frac{2}{3} \approx 66{,}67\%$.

Vamos supor ainda que, no jogo entre Marcos e os amigos, deseja-se calcular a probabilidade de obter soma par e soma múltipla de 3. Nesse caso, iremos expor que basta calcular $A \cap B$ e utilizar a definição de probabilidade, conforme segue:

$$A \cap B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,6)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Consideraremos os resultados obtidos para $P(A), P(B), P(A \cup B) e\ P(A \cap B)$ e observaremos que:

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Por conseguinte, generalizaremos a situação tomando os eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω, finito e não vazio, para os quais teremos:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega} + \frac{\#B}{\#\Omega} - \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}$$

Assim concluiremos que a probabilidade de ocorrência do evento **união** de A e B é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Neste momento, observaremos que se A e B são conjuntos disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, então os eventos A e B são chamados de **mutuamente exclusivos**, e temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Para exemplificar, tomaremos a situação anterior sobre o jogo do Marcos com os amigos em que o evento $A = sair\ soma\ par$ e $B = sair\ soma\ 5$, temos que $A \cap B = \emptyset$.

Em sequência, iremos propor algumas situações-problema envolvendo os conceitos abordados.

Exercícios

1. Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, a probabilidade de que esse aluno fale espanhol é de

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{5}{6}$

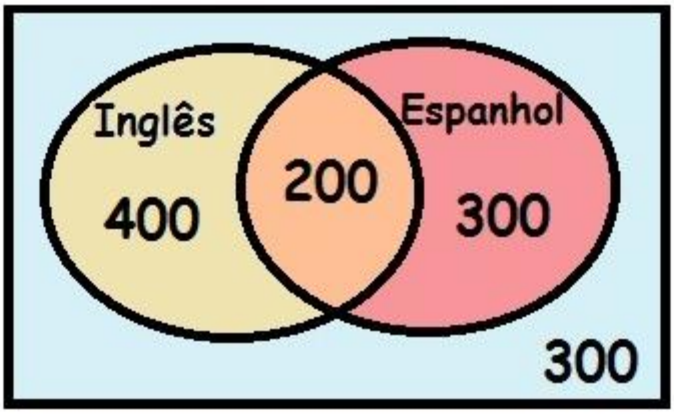
e) $\frac{5}{14}$

Resolução

Esperamos que os discentes notem que se somarmos o número de alunos que falam inglês, os que falam espanhol e os que não falam nenhuma dessas línguas, teremos um total de 1400, o que supera a quantidade de alunos da escola. Isso garante então que há alunos que falam inglês e espanhol simultaneamente.

Assim como temos 1200 alunos na escola e 300 deles não falam línguas estrangeiras, restam apenas 900 alunos que falam essas línguas.

Esperamos que observem que se somarmos a quantidade de alunos que falam inglês (600) com os que falam espanhol (500), obteremos um total de 1.100. Então, ao fazermos a diferença desse total com a quantidade que fala língua estrangeira, isto é, $1.100 - 900$ obteremos 200. Essa é a quantidade de alunos que falam as duas línguas. Portanto, de 600 alunos, apenas 400 falam somente inglês, e de 500 alunos, apenas 300 falam apenas espanhol. Para facilitar o entendimento, os discentes podem organizar essas informações em um diagrama de Venn, conforme segue:



Pelo diagrama temos evidentemente que 400 alunos falam apenas inglês, 300 alunos falam apenas espanhol, 200 alunos falam as duas línguas e 300 alunos não falam nenhuma língua estrangeira.

Como estamos interessados em escolher um aluno que não fala inglês, nosso espaço amostral será composto por aqueles que falam apenas espanhol ou que não falam nenhuma língua, logo, $\#\Omega = 600$. O número de casos favoráveis é a quantidade de alunos que falam apenas espanhol, então $\#E = 300$. Assim poderão então calcular a probabilidade:

$$P(E) = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}.$$

2. Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. A probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20 é de

a) 1/100
b) 19/100
c) 20/100
d) 21/100
e) 80/100

Resolução

Esperamos que os discentes notem que o $\#\Omega = 100$ e $\#E = 20$, assim utilizando a definição de probabilidade temos que

$$P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega} = \frac{20}{100}$$

3. Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

a) 23,7%
b) 30,0%
c) 44,1%
d) 65,7%

e) 90,0%

Resolução

Esperamos que os discentes notem que como temos três alunos que irão fazer a seleção a chance do primeiro não saber falar inglês é de 70%, a do segundo também é de 70% e o mesmo ocorre para o terceiro. Logo pelo principio multiplicativo temos que:

$$P(não\ falar\ inglês) = 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}7^3$$

que é justamente o complementar do conjunto de evento dos alunos que falam inglês. Portanto, temos que:

$$P(falar\ inglês) + P(não\ falar\ inglês) = 1$$

$$P(falar\ inglês) = 1 - 0{,}7^3 = 1 - 0{,}343 = 0{,}657 \equiv 65{,}7\%$$

4. *Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.*

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

1. *O jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;*
2. *Ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;*
3. *Em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;*
4. *Se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.*

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

a) *Azul.*
b) *Amarela.*
c) *Branca.*
d) *Verde.*
e) *Vermelha.*

Resolução

Esperamos que os discentes verifiquem qual é a probabilidade de o jogador ganhar de acordo com cada cor escolhida. Para tal devem fazer uso da probabilidade de união de eventos, obtendo assim:

A probabilidade de obter uma bola de cor X é igual à probabilidade de retirar a bola de cor X na urna 1 multiplicada pela probabilidade de retirar a bola de cor X da urna 2 somada com o produto da probabilidade de não retirar a bola de cor X da urna 1 com a probabilidade de retirar a bola de cor X da urna 2.

- **Bola Amarela**

$$P = \left(\frac{4}{10} \times \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{6}{10} \times \frac{0}{11}\right) = \frac{4}{110} \approx 0{,}0363$$

- **Bola Azul**

$$P = \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{11}\right) + \left(\frac{7}{10} \times \frac{1}{11}\right) = \frac{13}{110} \approx 0{,}1181$$

- **Bola Branca**

$$P = \left(\frac{2}{10} \times \frac{3}{11}\right) + \left(\frac{8}{10} \times \frac{2}{11}\right) = \frac{22}{110} = 0{,}2$$

- **Bola Verde**

$$P = \left(\frac{1}{10} \times \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{9}{10} \times \frac{3}{11}\right) = \frac{31}{110} \approx 0{,}2818$$

- **Bola Vermelha**

$$P = \left(\frac{0}{10} \times \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{10}{10} \times \frac{4}{11}\right) = \frac{40}{110} \approx 0{,}3636$$

Portanto, podemos constar que a maior probabilidade é obtida escolhendo-se a bola vermelha representada pela alternativa e).

ETAPA 5 (40 minutos)

Nesta etapa pretendemos apresentar aos discentes o conceito de probabilidade condicional. Para tal, iremos nos valer da seguinte situação-problema:

Situação – Um jogo consiste em escolher um número entre 1 e 6 e lançar um dado duas vezes sucessivas. Se o número escolhido aparecer em pelo menos um dos lançamentos, a pessoa vence. Se não aparecer em nenhum dos dois lançamentos, a pessoa perde. Dois amigos decidiram jogá-lo. Um deles escolheu o número 3 e lançou o dado duas vezes. Qual é a probabilidade de ele ganhar se não obteve o número 3 no primeiro lançamento?

Resolução

Denotaremos que o espaço amostral desse experimento é:

$$\Omega = \begin{matrix} (1{,}1), (1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (1{,}5), (1{,}6) \\ (2{,}1), (2{,}2), (2{,}3), (2{,}4), (2{,}5), (2{,}6) \\ (3{,}1), (3{,}2), (3{,}3), (3{,}4), (3{,}5), (3{,}6) \\ (4{,}1), (4{,}2), (4{,}3), (4{,}4), (4{,}5), (4{,}6) \\ (5{,}1), (5{,}2), (5{,}3), (5{,}4), (5{,}5), (5{,}6) \\ (6{,}1), (6{,}2), (6{,}3), (6{,}4), (6{,}5), (6{,}6) \end{matrix}$$

e representaremos os seguintes eventos:

- Evento A: obter o número 3 em pelo menos um dos lançamentos;

$$A = \{(1{,}3), (2{,}3), (3{,}1), (3{,}2), (3{,}3), (3{,}4), (3{,}5), (3{,}6), (4{,}3), (5{,}3), (6{,}3)\}$$

Como $\#A = 11$ temos que $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{11}{36}$.

- Evento B: não obter o número 3 no primeiro lançamento;

$$B = \begin{matrix} (1{,}1), (1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (1{,}5), (1{,}6) \\ (2{,}1), (2{,}2), (2{,}3), (2{,}4), (2{,}5), (2{,}6) \\ (4{,}1), (4{,}2), (4{,}3), (4{,}4), (4{,}5), (4{,}6) \\ (5{,}1), (5{,}2), (5{,}3), (5{,}4), (5{,}5), (5{,}6) \\ (6{,}1), (6{,}2), (6{,}3), (6{,}4), (6{,}5), (6{,}6) \end{matrix}$$

Como $\#B = 30$ temos que $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{30}{36} = \frac{15}{18}$.

Denotaremos por $A|B$ a ocorrência do evento A, dado que o evento B já tenha ocorrido, e por $P(A|B)$ a **probabilidade condicional** de ocorrer A, dado que B já ocorreu.

Nessa situação, diremos que, $P(A|B)$ é a probabilidade de obter 3 em um dos lançamentos do dado, sendo que não foi obtido 3 no primeiro lançamento.

Ressaltaremos que a ocorrência do evento B modifica a condição e a probabilidade do evento A, pois, a partir da ocorrência de B, o espaço amostral passa a ser o conjunto B e disso temos que:

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$

$$P(A|B) = \frac{\#\Omega}{\#\Omega} \times \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} \times \frac{\#\Omega}{\#B}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{5/36}{30/36} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$$

Assim concluiremos que a probabilidade de um dos amigos ganhar, tendo escolhido o número 3 e não obtido esse número no primeiro lançamento do dado, é de aproximadamente 16,67%. E definiremos que em geral, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

com $P(B) \neq 0$, ou $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$.

Por conseguinte denotaremos que dois eventos, A e B, são **eventos independentes** quando a probabilidade de ocorrência de um deles não afeta a ocorrência do outro, isto é, se: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.

E que para ocorrência simultânea de dois eventos independentes, substituímos $P(A|B)$ por $P(A)$ em $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$ e temos $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Ainda, que na ocorrência de mais de dois eventos independentes a probabilidade é o produto das probabilidades de cada um dos eventos conforme o princípio multiplicativo.

Então iremos propor algumas situações-problema envolvendo os conceitos abordados.

Exercícios

1. Um grupo de 50 moças é classificado de acordo com a cor dos cabelos, e dos olhos de cada moça, segundo a tabela:

	Olhos	
Cabelos	azuis	castanhos
Loira	17	9
Morena	4	14
Ruiva	3	3

Está chovendo quando você encontra a menina, seus cabelos estão completamente cobertos, mas você percebe que ela tem olhos castanhos. Qual a probabilidade de ela ser morena?

Resolução

Esperamos que os discentes notem que o deseja-se descobrir a probabilidade da moça ser morena dado que tem olhos castanhos. Ou seja, denominando o evento $B: ter\ olhos\ castanhos$ e $A: ser\ morena$ temos que:

$$P(B) = \frac{26}{50} = \frac{13}{25}$$

$$P(A) = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$$

$$P(A \cap B) = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

Dessa maneira utilizando o conceito de probabilidade condicional concluam que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7/25}{13/25} = \frac{7}{13}$$

Ou seja, a probabilidade de ser morena dado que tem olhos castanhos é de aproximadamente 53,8%.

Por fim iremos propor os seguintes problemas extraclasse:

1. Em uma população humana, a probabilidade de um indivíduo ser mudo é estimada em $\frac{50}{10000}$, a probabilidade de ser cego é $\frac{85}{10000}$ e a probabilidade de ser mudo e cego é $\frac{6}{10000}$. Nesse caso, "ser mudo" não exclui a possibilidade de "ser cego". Com base nessas informações, a probabilidade de um indivíduo, escolhido ao acaso, ser mudo ou cego é igual a:

a) 0,0135
b) 0,0129
c) 0,0174
d) 0,0156

2. Em uma urna existem bolas enumeradas de 1 a 15. Qualquer uma delas possui a mesma chance de ser retirada. Determine a probabilidade de se retirar uma bola com número nas seguintes condições:

a) par
b) primo
c) par ou primo
d) par e primo

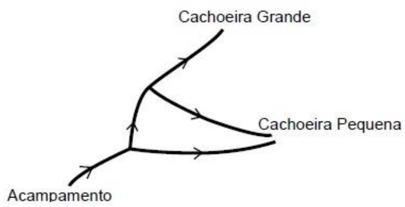
3. Um teste de múltipla escolha é composto de 12 questões, com 5 alternativas de resposta, sendo que somente uma, é correta. Calcule a probabilidade de uma pessoa, marcando aleatoriamente as 12 questões, acertar metade das respostas.

4. Uma moeda é lançada 10 vezes. Determine a probabilidade de sair "coroa" 7 vezes.

5. Um aluno prestou vestibular em apenas duas Universidades. Suponha que, em uma delas, a probabilidade de que ele seja aprovado é de 30%, enquanto na outra, pelo fato de a prova ter sido mais fácil, a probabilidade de sua aprovação sobe para 40%. Nessas condições, a probabilidade de que esse aluno seja aprovado em pelo menos uma dessas Universidades é de:

a) 70%
b) 68%
c) 60%
d) 58%
e) 52%

6. Dois jovens partiram, do acampamento em que estavam, em direção à Cachoeira Grande e à Cachoeira Pequena, localizadas na região, seguindo a trilha indicada neste esquema:



Em cada bifurcação encontrada na trilha, eles escolhiam, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguiam adiante. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de eles chegarem à Cachoeira Pequena é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{3}{4}$

Referências

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Ensino médio vol. 2. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Vol. 2. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Enem – provas e gabaritos. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 2 Agosto 2019.

Banco de questões OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br/ banco.htm. Acesso em: 2 Agosto 2019.

2.6.3.1 Relatório – 26.10.2019

No sábado, dia 26 de Outubro de 2019, tivemos a oportunidade de realizar o nono encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar os conceitos de Probabilidade.

Inicialmente, questionamos aos discentes se eles gostavam de esportes individuais e coletivos, a maioria respondeu que gostava de esportes coletivos, então perguntamos se nas disputas de futebol a maneira que é escolhido quem fica com campo e quem fica com a bola era justa? Então eles nos responderam que sim, questionamos o porquê, e os discentes responderam que cada time teria 50% de chance de ganhar, em seguida explicamos que o lançamento da moeda é o mais justo pois cairia apenas cara ou coroa dando a mesma chance para ambos os lados.

Posteriormente, definimos o que é um experimento aleatório, o que é o espaço amostral, o que é um evento, e utilizamos a situação descrita acima para exemplificar o que havíamos definido anteriormente. Após, denotamos os conceitos de evento simples, evento certo e evento impossível. Em sequência pedimos aos estudantes que resolvessem os dois primeiros exercícios da lista, e que nós passaríamos auxiliando nas resoluções, passados alguns minutos fizemos a correção no quadro.

Em seguida, questionamos aos discentes se os pais apostavam em jogos como a Mega Sena, alguns responderam que sim, então apresentamos a seguinte situação, suponha que Joaquim em um belo dia se sinta com sorte e queira fazer apenas um jogo na loteria conhecida como Mega Sena. Contudo antes jogar ele decide conferir as suas chances de vitória em relação à quantidade de números escolhidos para se jogar.

Joaquim sabe que uma cartela da Mega Sena é composta por 60 números dois quais serão sorteados seis para determinar o resultado. Apresentamos uma tabela com os valores das apostas para determinados números, e questionamos qual seria a melhor estratégia para apostar sabendo que ele tinha um orçamento de R$ 600,00- para isso utilizando os conceitos de combinação, calculamos com os discentes qual seria a probabilidade de ele ganhar com um jogo de seis números, assim como qual seria a probabilidade dele ganhar com os demais jogos, ao final concluímos então que como Joaquim dispõem de apenas R$600,00 e irá comprar apenas uma cartela terá maiores chances de ganhar se fizer uma aposta de 9 números.

Adiante, definimos o conceito de probabilidade, e que pela razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral, após pedimos para que os estudantes resolvessem os exercícios 3 e 4 do material, circulamos pelas carteiras para tirar possíveis dúvidas, dado alguns minutos fizemos a correção no quadro.

Por fim, explicamos os conceitos de união e interseção de eventos, para tal utilizamos de diagramas para melhor mostrar a eles o que estava sendo explicado, pedimos para que os discentes fizessem os demais exercícios e os liberamos para a confraternização de encerramento, nos despedimos e deixamos aberto para eles tirarem as dúvidas conosco posteriormente via mensagem.

2.6 PROMAT - Considerações

O PROMAT beneficiou todos os participantes. Os discentes tiveram a possibilidade de estar na frente da sala de aula como docente. Em especial no nosso grupo, foi satisfatório saber que estávamos ajudando os alunos, no aprendizado e produção de conhecimento sobre a matemática. A parte de planejamento de aulas, possibilitou-nos o aprofundamento crítico e o desenvolvimento em relação a metodologia que iria ser trabalhada.

O aprendizado obtido, como docente, proporcionou-nos várias reflexões durante este trajeto. Os pontos fortes e fracos, individualmente de cada integrante do grupo, o enfrentamento de obstáculos epistemológicos. Proporcionou-nos ainda, a visão de unicidade acerca dos alunos, as suas etapas para o aprendizado concreto e suas dificuldades ao longo do caminho.

A partir dessa possibilidade, concluímos e averiguamos a importância de tal projeto. Junto aos alunos, crescemos e enfrentamos as dificuldades em sala de aula. Pudemos, visualizar previamente, como seria o meio em que escolhemos participar profissionalmente. Contudo, conscientes que haveriam mudanças, relacionadas a colegas, alunos e escolas.

Certificamos, acima de tudo que, como futuros educadores, devemos mostrar que a matemática não é só mais um conteúdo a ser mostrado na escola, deve ser ensinada para agregar na vida do aluno.