Solubilidade por meio de radicais de equações polinomiais de grau menor ou igual a quatro

Elisangela Danielli de Lima - Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) - Medianeira
Sandro Marcos Guzzo - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE) - Cascavel

(*Recebido em 09/12/2021. Aceito em 13/12/2021. Publicado em 22/12/2021*)

Resumo: Nosso objetivo neste trabalho é apresentar técnicas clássicas de resolução de equações polinomiais de grau menor ou igual a 4 por meio de radicais. Fazemos também um breve apanhado histórico sobre a busca de tais fórmulas. Em particular estamos interessados em comprovar que toda equação polinomial de grau menor ou igual a 4 é solúvel por meio de radicais, mesmo que as soluções (raízes) sejam números complexos.

Palavras-chave: Equações polinomiais; Solubilidade por radicais; Fórmula de Cardano.

1 Introdução

Nesta seção faremos um apanhado de definições e conceitos relevantes para este texto. Acreditamos que o leitor esteja familiarizado com a maioria destas definições e resultados. Mesmo assim vamos enunciar estes resultados por motivos de referência textual.

Denomina-se polinômio na variável x, qualquer expressão escrita na forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0, \tag{1}$$

sendo que a_0, a_1, $\ldots$, a_n são coeficientes constantes (reais ou complexos) e $n \in \mathbb{N}$.

É comum designar um polinômio de forma mais econômica como uma função $p(x)$. Ao afirmar que $p(x)$ é um polinômio então deve ficar claro que

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Um polinômio $p(x)$ é chamado de polinômio nulo, se todos os coeficientes da expressão (1) forem iguais a zero. Neste caso escrevemos $p(x) = 0$. Dizer então que $p(x)$ é não nulo, e escrevemos $p(x) \neq 0$, significa que pelo menos um dos coeficientes da expressão (1) é não nulo.

Definição 1. Dado um polinômio $p(x)$ não nulo, então o grau de $p(x)$ é o maior número natural n de forma que $a_n \neq 0$. Representamos o grau de $p(x)$ por $gr(p)$.

Note que não está definido o grau do polinômio nulo. Mas o grau de um polinômio pode ser igual a 0. De acordo com a definição anterior, se $gr(p) = 0$ então $a_0 \neq 0$ e com isso $p(x) = a_0$ é obrigatoriamente não nulo.

Definição 2. Denomina-se equação polinomial na incógnita x a toda equação da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{2}$$

sendo a_0, a_1, $\ldots$, a_n são coeficientes constantes (reais ou complexos), com $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. O número n é chamado de grau da equação polinomial.

Note que uma equação polinomial pode ser escrita na forma simplificada por $p(x) = 0$, sendo que $p(x)$ representa o polinômio do lado esquerdo da equação. Neste caso, o grau da equação polinomial é também o grau do polinômio $p(x)$.

Definição 3. Dado um número α, real ou complexo, o valor do polinômio $p(x)$ em α é o número denotado por $p(\alpha)$ dado por

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_{n-2} \alpha^{n-2} + \cdots + a_1 \alpha + a_0,$$

isto é, $p(\alpha)$ é o número obtido ao substituir x por α. Se além disso $p(\alpha) = 0$, então α é dito uma raiz de $p(x)$.

Definição 4. Um número α, real ou complexo, é chamado de raiz ou de solução da equação polinomial,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

se

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_{n-2} \alpha^{n-2} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0,$$

isto é, ao substituir a incógnita x por α, a igualdade torna-se verdadeira.

Note que se $p(x)$ é um polinômio, então uma raiz α de $p(x)$ é também uma raiz ou uma solução da equação $p(x) = 0$.

Embora o conceito de raiz de uma equação polinomial seja relativamente simples, em geral não é uma tarefa muito simples encontrar tais raízes (ou soluções). Algumas vezes as raízes são números irracionais ou mesmo números complexos. Resolver uma equação polinomial por meio de radicais significa encontrar as raízes da equação manipulando os coeficientes da equação. Desta forma, uma equação polinomial é solúvel por radicais quando suas soluções podem ser escritas como expressões que incluem apenas somas, subtrações, multiplicações, divisões, potências e raízes envolvendo seus coeficientes.

Os alunos do ensino fundamental já estão familiarizados com a obtenção de soluções de equações polinomiais de grau 1 ou 2. No caso de uma equação de grau 1, ou de primeiro grau,

$$ax + b = 0,$$

com $a \neq 0$, a solução $x = -\frac{b}{a}$ pode ser facilmente encontrada por manipulação dos coeficientes. No caso de uma equação de grau 2, ou de segundo grau,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com $a \neq 0$, as soluções $x_0 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ também são bem conhecidas. Não importa se estas soluções são fornecidas com o que chamamos de "fórmulas prontas", pois estas fórmulas prontas são obtidas manipulando-se os coeficientes da equação.

O Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrado por Karl Friedrich Gauss em 1799 em sua tese de doutorado, garante que uma equação polinomial de grau n possui exatamente n raízes complexas. De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, uma equação polinomial de grau n,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3}$$

com coeficientes reais ou complexos, possui exatamente n raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ reais ou complexas (não necessariamente distintas) e além disso,

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

O trabalho de encontrar estas n raízes pode ser feito por partes. Caso se possa determinar uma raiz r_1 da equação (3), então podemos escrever

$$p(x) = (x - r_1)q(x),$$

e o trabalho de encontrar as demais raízes de $p(x)$ pode continuar pela determinação das raízes de $q(x)$. A vantagem neste caso é que o grau de $q(x)$ é menor do que o grau de $p(x)$. Para ser mais preciso, se $gr(p) = n$, então teremos $gr(q) = n - 1$.

Nas próximas duas seções apresentaremos técnicas de solução por meio de radicais para equações polinomiais de graus 3 e 4. Equações polinomiais de grau maior ou igual a 5 não são solúveis por meio de radicais. Quem demonstrou isso foi o matemático Évariste Galois. O leitor interessado na Teoria de Galois ou em mais informações a respeito dos polinômios, como operações com polinômios, raízes de polinômios ou divisibilidade de polinômios, pode consultar Biazzi (2014).

2 Equações polinomiais do terceiro grau

Desde a descoberta de uma fórmula que resolvesse a equação do 2° grau, os matemáticos começaram a pensar em formas de resolver as equações de grau 3. Uma equação do terceiro grau é uma equação na forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{4}$$

com a, b, c e d coeficientes reais ou complexos e $a \neq 0$.

No início do século XVI, dois matemáticos italianos, Tartaglia e Cardano, conseguiram encontrar uma fórmula para a resolução das equações do terceiro grau. Girolamo Cardano (1501-1576) era um respeitado professor de Bolonha e Milão que frequentava a alta sociedade e além de matemático era médico, astrônomo, astrólogo e filósofo. Ele tinha grande vontade de aprender sobre os mais diversos assuntos, o que resultou na publicação de diversos livros.

Já Tartaglia, cujo nome oficial é Niccolò Fontana (1500-1557), era órfão de pai e muito pobre. Ainda na infância, quando sua cidade foi atacada pelos franceses, Niccolò sofreu um golpe que perfurou seu palato e o deixou gago para o resto da vida, e por isso recebeu o apelido Tartaglia, que significa gago. Apesar das dificuldades, Tartaglia era autodidata e muito inteligente e se tornou professor de matemática.

A obtenção de uma fórmula resolutiva para as equações do terceiro grau teve início por volta de 1510 quando Scipione del Ferro, professor de Matemática da Universidade de Bolonha encontrou uma fórmula para resolver as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Ele não publicou essa fórmula, mas compartilhou-a com seu aluno Antonio Maria Fior que posteriomente iniciou um desafio com Tartaglia que consistia em um passar para o outro uma lista de equações de terceiro grau para serem resolvidas. Tartaglia aceitou o desafio e em 1535 conseguiu encontrar uma forma geral para resolver as equações do tipo $x^3+px^2+q = 0$, além daquelas já conhecidas por Fior. Cardano, que na época estava escrevendo uma obra englobando Álgebra, Aritmética e Geometria, sabendo da resolução obtida por Tartaglia pediu a ele que a revelasse para que fosse colocada em seu livro, mas Tartaglia não concordou alegando que tinha intenção de publicá-la numa obra própria.

Cardano implorou, sob juramento ao Evangelho, que não publicaria a fórmula e Tartaglia decidiu confiar-lhe o segredo. Em 1545, em sua obra Ars Magna, Cardano quebrou a promessa feita a Tartaglia e publicou a fórmula, dizendo ainda que 30 anos antes Scipione del Ferro já havia obtido os mesmos resultados. Tartaglia foi a público a fim de esclarecer os fatos e a traição de Cardano, mas no fim das contas a fórmula obtida por Tartaglia é conhecida até hoje como Fórmula de Cardano.

Contudo, o método desenvolvido por Tartaglia só é aplicável em equações de terceiro grau que não possuem o termo quadrático e portanto não podem ser aplicados na equação geral (4). Ludovico Ferrari, professor da Universidade de Bolonha e discípulo de Cardano, desenvolveu um método que permite eliminar o termo quadrático da equação original (4) transformando-a em uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$.

A técnica de Ferrari consiste em aplicar a mudança de variáveis $x = y - \frac{b}{3a}$ na equação (4), obtendo

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0,$$

e portanto

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0.$$

Designando agora $p = c - \frac{b^2}{3a}$ e $q = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$, recaimos em uma equação de grau 3 sem o termo quadrático.

O que precisamos para obter as raízes da equação geral (4) é encontrar pelo menos uma raiz. A partir desta raiz encontrada podemos reduzir o grau do polinômio e usar a fórmula de Bháskara para determinar as outras duas raízes. Iniciamos, sem perda de generalidade, considerando a equação

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

pois caso o coeficiente dominante a seja diferente de 1, podemos dividir toda a equação por a e obter a equação com coeficiente dominante 1. De acordo com a técnica de Ferrari, fazendo a mudança de variáveis $x = y - \frac{b}{3}$, obtemos então

$$y^3 + py + q = 0, \tag{5}$$

com $p = c - \frac{b^2}{3}$ e $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$.

A ideia central agora é comparar a expressão (5) com a expressão do cubo de uma soma. Se u e v são dois números reais ou complexos, então

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3,$$

ou equivalentemente

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0. \tag{6}$$

Note que esta última expressão é uma equação cúbica, no termo $(u+v)$, que não apresenta o termo quadrático. Comparando então a equação (6) com a equação (5), vemos que a soma $(u+v)$ é uma raiz de (5), desde que

$$\begin{cases} p = -3uv \\ q = -(u^3+v^3). \end{cases}$$

Basta agora determinarmos u e v solução do sistema (não linear) acima e a raiz procurada para a equação (5) será $(u+v)$. Dentre as várias maneiras para resolver este sistema, vamos utilizar uma técnica não convencional que pode ser aplicada neste caso particular. Reescrevemos o sistema como

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q, \end{cases}$$

e queremos encontrar u^3 e v^3 conhecendo sua soma e seu produto. Por conta disso, sabemos então que u^3 e v^3 são as raízes da equação quadrática

$$w^2 - (u^3+v^3)w + u^3v^3 = 0,$$

isto é,

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Desta forma

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e

$$v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Portanto

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

e uma raiz procurada da equação (5) é

$$y = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Finalmente para voltar na equação original (4), basta ver que $x = y + \frac{b}{3}$.

O leitor atento verá que u^3 e v^3, obtidos por este método, podem ser números complexos. Não queremos aqui entrar em muitos detalhes sobre os números complexos, mas caso u^3 e v^3 sejam complexos, eles serão complexos conjugados. As raízes cúbicas de dois números complexos conjugados continuam complexos conjugados uma da outra, e a soma de dois números complexos conjugados é um número real. Então, mesmo que tenhamos que determinar as raízes cúbicas de dois números complexos, a raiz y encontrada por esta técnica será um número real. Para mais detalhes sobre números complexos, números complexos conjugados e raízes de números complexos sugerimos Zill (2011).

Como ilustração da técnica obtida, vamos considerar dois exemplos nos quais queremos determinar as raízes (reais ou complexas) de polinômios de grau 3.

Exemplo 1. Considerando a equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$, que chamaremos de equação original. Sabemos que a substituição de Ferrari $x = y - \frac{b}{3} = y + 2$ eliminará o termo quadrático. Fazendo então esta substituição, obtemos

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 6(y+2) - 5 = 0,$$

e após a reorganização dos termos,

$$y^3 - 6y - 9 = 0.$$

Claro que para chegarmos nesta última equação, sem o termo quadrático, poderíamos usar as fórmulas obtidas anteriormente. Como $b = -6$, $c = 6$ e $d = -5$, podemos calcular $p = c - \frac{b^2}{3} = -6$ e $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = -9$, obtendo o polinômio em y, sem o termo quadrático.

Agora, para encontrar u e v, temos que

$$u^3 = \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}} = 8 \qquad \text{e} \qquad v^3 = \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}} = 1,$$

e portanto

$$u = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Segue que $y = u + v = 3$, donde $x = y - \frac{b}{3} = 3 - \frac{-6}{3} = 5$ é uma raíz procurada da equação de grau 3. De posse dessa raiz, vamos dividir o polinômio original por $(x - 5)$. Temos então

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = (x - 5)(x^2 - x + 1),$$

e agora basta encontrar as duas raízes restantes com a equação quadrática $x^2 - x + 1 = 0$. Estas raízes são precisamente

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2},$$

e

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Segue que as 3 raízes da equação original, obtidas por meio de radicais, são $x_0 = 5$, $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, e $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

O leitor poderia agora dizer que o exemplo anterior poderia ser resolvido de forma mais rápida. É conhecido que uma equação polinomial geral da forma (2) possui uma solução racional na forma $\frac{p}{q}$ se, e somente se, $p|a_0$ e $q|a_n$. Neste caso, os únicos números racionais que poderiam ser solução da equação polinomial do exemplo anterior são ± 5 e ± 1. Poderíamos rapidamente testar estes quatro valores e encontrar a primeira raiz $x_0 = 5$. Este exemplo permite isso, porém há casos em que as raízes podem não ser racionais ou mesmo casos em que a_0 possui muitos divisores e o trabalho de procurar raízes por substituição pode se tornar tão exaustivo quando o método que aplicamos, como no exemplo seguinte.

Exemplo 2. Consideremos a equação $x^3 - 24x^2 + 160x - 256 = 0$, que chamaremos de equação original. Fazendo a substituição de Ferrari $x = y - \frac{b}{3} = y + 8$, temos

$$(y+8)^3 - 24(y+8)^2 + 160(y+8) - 256 = 0,$$

e reorganizando os termos

$$y^3 - 32y = 0.$$

Embora seja uma equação de grau 3 ainda, já detectamos que esta equação agora pode ser escrita na forma $y(y^2 - 32) = 0$. Desta forma as raízes procuradas agora são mais simples de serem obtidas e são

$$y_0 = 0, \qquad y_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad y_2 = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2}.$$

Voltando para a variável original x, como $x = y + 8$, temos as 3 raízes da equação original $x_0 = 8$, $x_1 = 8 + 4\sqrt{2}$ e $x_2 = 8 - 4\sqrt{2}$.

3 Equações polinomiais do quarto grau

Uma equação do quarto grau é uma equação na forma

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{7}$$

com a, b, c, d e e coeficientes reais ou complexos, e $a \neq 0$. No mesmo documento onde publicou a resolução da equação do terceiro grau, na Ars Magna, Cardano também publicou um método para a resolução de uma equação do quarto grau, desenvolvida pelo seu discípulo Ludovico Ferrari.

A resolução da equação de quarto grau pelo Método de Ferrari, consiste primeiro em transformar a equação original (7) em uma equação na forma

$$x^4 + px^2 + r = qx, \tag{8}$$

ou seja uma equação do quarto grau sem o termo cúbico. Isto é conseguido fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{b}{4a}$ na equação original (7), para chegar na forma (8). Vamos aos detalhes.

Inicialmente podemos considerar, sem perda de generalidade, a equação

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

e utilizando a mudança de variável sugerida por Ferrari, $x = y - \frac{b}{4}$, obtemos

$$\left(y - \frac{b}{4}\right)^4 + b\left(y - \frac{b}{4}\right)^3 + c\left(y - \frac{b}{4}\right)^2 + d\left(y - \frac{b}{4}\right) + e = 0,$$

e portanto

$$y^4 + \left(c - \frac{3b^2}{8}\right)y^2 + \left(d + \frac{b^3}{8} - \frac{bc}{2}\right)y + \left(\frac{b^2c}{16} - \frac{3b^4}{256} - \frac{bd}{4} + e\right) = 0.$$

Designando $p = c - \frac{3b^2}{8}$, $q = d + \frac{b^3}{8} - \frac{bc}{2}$ e $r = \frac{b^2c}{16} - \frac{3b^4}{256} - \frac{bd}{4} + e$, e chegamos na forma desejada

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Feito isso, a ideia agora é escrever

$$y^4 + py^2 + r = -qy,$$

e tornar os dois membros quadrados perfeitos. Queremos acrescentar então em ambos os membros desta equação termos que tornem ambos os membros quadrados perfeitos. Para qualquer valor de $\alpha \in \mathbb{R}^*$, acrescentando αy^2 e $\frac{q^2}{4\alpha}$ em ambos os membros, obtemos

$$y^4 + (\alpha + p)y^2 + \left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = \alpha y^2 - qy + \frac{q^2}{4\alpha} = \left(\sqrt{\alpha}y - \frac{q}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2.$$

Então queremos encontrar α para que o lado esquerdo da equação também seja um quadrado perfeito. Notemos que uma expressão quadrática $z^2 + mz + n$ é um quadrado perfeito se e somente se $\Delta = m^2 - 4n = 0$. Desta forma procuramos α de forma que

$$(\alpha + p)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0,$$

ou ainda

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0.$$

Resolvendo agora esta equação do terceiro grau, determinamos α que torna ambos os membros da equação

$$y^4 + (\alpha + p)y^2 + \left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = \alpha y^2 - qy + \frac{q^2}{4\alpha}$$

quadrados perfeitos. Feito isso, já que ambos os membros são quadrados perfeitos, basta extrair raiz quadrada de ambos os membros obtendo

$$\left(y^2 + \frac{\alpha + p}{2}\right) = \pm\left(\sqrt{\alpha}y - \frac{q}{2\sqrt{\alpha}}\right).$$

Esta última expressão nos fornece duas equações quadráticas em y e portanto quatro valores para y. De posse dos quatro valores obtidos para y, usamos $x = y - \frac{b}{4}$ para obter as quatro raízes procuradas para a equação original.

Notemos que o valor de α foi obtido pela solução de uma equação do terceiro grau. Conforme visto anteriormente α poderá assumir três valores distintos e então poderíamos perguntar se isto nos conduziria a 12 raízes da equação original, sendo 4 raízes para cada valor de α considerado. O que acontece nesse caso é que temos quatro raízes que serão combinadas duas a duas de acordo com a escolha de α. Lembremos que há 3 formas distintas de agrupar 4 elementos dois a dois. Além disso, este α pode ser complexo, ou mesmo um número real negativo, o que conduziria a soluções complexas da equação original.

Vamos utilizar as ideias desenvolvidas em um exemplo.

Exemplo 3. Consideremos a equação $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 36x - 31 = 0$. Primeiramente faremos a eliminação do termo cúbico. Usando a substituição de Ferrari $x = y - \frac{b}{4} = y - 1$, obtemos

$$(y-1)^4 + 4(y-1)^3 - 6(y-1)^2 - 36(y-1) - 31 = 0$$

e após a reorganização dos termos,

$$y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0.$$

Claro que para chegarmos nesta última equação, sem o termo cúbico, poderíamos utilizar as fórmulas obtidas nesta seção. Como $b = 4$, $c = -6$, $d = -36$ e $e = -31$, calculamos $p = c - \frac{3b^2}{8} = -12$, $q = d + \frac{b^3}{8} - \frac{bc}{2} = -16$ e $r = \frac{b^2c}{16} - \frac{3b^4}{256} - \frac{bd}{4} + e = -4$, chegando na equação em y sem o termo cúbico.

Agora reescrevemos

$$y^4 - 12y^2 - 4 = 16y,$$

e acresentamos em ambos os membros os termos αy^2 e $\frac{q^2}{4\alpha} = \frac{64}{\alpha}$ obtendo

$$y^4 + (\alpha - 12)y^2 + \left(\frac{64}{\alpha} - 4\right) = \alpha y^2 + 16y + \frac{64}{\alpha}, \tag{9}$$

sendo que α deve ser uma solução da equação cúbica

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0,$$

isto é,

$$\alpha^3 - 24\alpha^2 + 160\alpha - 256 = 0.$$

Usando os métodos da seção anterior para equação de grau 3, obtemos três valores para α que são $\alpha_0 = 8$, $\alpha_1 = 8 + 4\sqrt{2}$ e $\alpha_2 = 8 - 4\sqrt{2}$ (ver segundo exemplo da seção anterior). Lembremos que como comentado anteriormente, a escolha do valor de α não alterará as raízes procuradas, apenas a ordem de obtenção delas. Naturalmente o valor $\alpha = 8$ é o mais simples de ser utilizado agora. Com $\alpha = 8$ em (9) obtemos

$$y^4 - 4y^2 + 4 = 8y^2 + 16y + 8,$$

donde reescrevemos ambos os membros como quadrados perfeitos

$$(y^2 - 2)^2 = (\sqrt{8}y + \sqrt{8})^2.$$

Extraindo raiz quadrada em ambos os membros, obtemos duas equações quadráticas em y,

$$y^2 - 2 = \sqrt{8}y + \sqrt{8} \qquad \text{e} \qquad y^2 - 2 = -(\sqrt{8}y + \sqrt{8}),$$

ou ainda

$$y^2 - \sqrt{8}y - (2 + \sqrt{8}) = 0 \qquad \text{e} \qquad y^2 + \sqrt{8}y - (2 - \sqrt{8}) = 0,$$

Resolvendo estas duas equações quadráticas obtemos as quatro raízes da equação de quarto grau modificada,

$$\begin{aligned}
y_0 &= \sqrt{2} + \sqrt{4 + \sqrt{8}},\\
y_1 &= \sqrt{2} - \sqrt{4 + \sqrt{8}},\\
y_2 &= -\sqrt{2} + \sqrt{4 - \sqrt{8}},\\
y_3 &= -\sqrt{2} - \sqrt{4 - \sqrt{8}}.
\end{aligned}$$

Para a equação original lembramos que $x = y - 1$ e portanto as raízes da equação original são

$$\begin{aligned}
x_0 &= -1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + \sqrt{8}},\\
x_1 &= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 + \sqrt{8}},\\
x_2 &= -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - \sqrt{8}},\\
x_3 &= -1 - \sqrt{2} - \sqrt{4 - \sqrt{8}}.
\end{aligned}$$

Observe que nesse caso foram encontradas quatro soluções irracionais.

Conclusões

Nos estudos que originaram este trabalho tivemos a oportunidade de observar o quanto a busca por soluções de equações polinomiais fez com que a matemática evoluísse ao longo dos anos. A própria linguagem matemática sofreu diversas adaptações e, podemos dizer até, melhorias para que fosse mais prático resolver equações. Algumas descobertas da área de resoluções de equações alteraram de forma definitiva os rumos da matemática.

Muitos problemas de diversas áreas são modelados por equações polinomiais, portanto sabemos que elas são de grande importância. Porém, como existem diversos métodos computacionais capazes de encontrar soluções com bastante aproximação, a resolução por meio de radicais hoje em dia acaba sendo deixada de lado.

Um fato que chama a atenção nessa temática é que apesar de as últimas atualizações nas resoluções por radicais terem mais de 300 anos, a maior parte dos alunos de ensino médio não conhece essas fórmulas ou mesmo a história tão rica por trás delas. Um trabalho extremamente rico, histórica e matematicamente, seria apresentar para essas novas gerações o quanto a matemática evoluiu através da busca pelas soluções por radicais.

Referências

Biazzi, Ricardo N. *Polinômios Irredutíveis - Critérios e Aplicações.* Dissertação, UNESP. Rio Claro, 2014.

Costa, Ueslei F. *Equações Algébricas: do Papiro de Ahmes até Évariste Galois.* Dissertação, UFTM. Uberaba, 2020.

Garbi, Gilberto G. *O Romance das Equações Algébricas.* 3^a edição revista e ampliada. Editora Livraria da Física. São Paulo, 2009.

Zill, Dennis G., Shanahan, Patrick D. Curso introdutório à análise complexa com aplicações. Rio de Janeiro, LTC, 2011.