

Anais da

XXXVII Semana
Acadêmica da
Matemática
2024

Anais da
**XXXVII Semana Acadêmica
da Matemática**

29/04/2024 a 03/05/2024



Realização
Curso de
Matemática



Apoio
CCET
Centro de Ciências
Exatas e Tecnológicas

Comissão organizadora da XXXVII Semana Acadêmica da Matemática:

Jean Sebastian Toillier (Coordenador)
Fabiana Magda Garcia Papani
Francieli Cristina Agostinnetto Antunes
Amarildo de Vicente
Clezio Aparecido Braga
Erika Diana Alves de Oliveira
Michelli Neves Lavagnoli

Comitê científico:

Alessandra dos Santos
Amarildo de Vicente
Andreia Büttner Ciani
Clezio Aparecido Braga
Dulcyene Maria Ribeiro
Fabiana Magda Garcia Papani
Flavio Roberto Dias Silva
Francieli Cristina Agostinnetto Antunes

Jean Sebastian Toillier
Pamela Gonçalves
Paulo Domingos Conejo
Plinio Lucas Dias Andrade
Rogerio Luis Rizzi
Sandro Marcos Guzzo
Simone Aparecida Miloca

Arte da Capa:

Clezio Aparecido Braga

Diagramação:

Clezio Aparecido Braga

Semana Acadêmica de Matemática (37.: 2024 Cascavel-PR)
Anais da XXXVII Semana Acadêmica de Matemática / Jean
Sebastian Toillier Coordenador / 2024.
126 p.

ISSN 2526-0804
Vários autores
Versão *on line*
29/04/2024 a 03/05/2024

1. Matemática- Estudo e ensino. 2. Ensino de Matemática- Jogos.
3. Matemática-evento. I. Toillier, Jean Sebastian. II. Título.

Apresentação

A Semana Acadêmica da Matemática está na sua XXXVII edição. Este é o evento de extensão mais tradicional promovido pelo Curso de Matemática, da UNIOESTE campus de Cascavel. É um evento com periodicidade anual.

Na programação da XXXVII Semana Acadêmica de Matemática figuram palestras, minicursos e comunicações orais. As comunicações orais resultam da inscrição dos participantes na modalidade de apresentadores de trabalhos.

Nesta edição da Semana Acadêmica de Matemática, 12 trabalhos foram inscritos e aceitos para apresentação oral e publicação nos anais do evento. São em geral trabalhos resultados das pesquisas de Iniciação Científica e de Monografia desenvolvidos por alunos do curso de Matemática. Registramos também trabalhos realizados por professores do Curso de Matemática da UNIOESTE - Cascavel, e de alunos de outros cursos que desenvolveram suas pesquisas com teor matemático. A apresentação destes trabalhos no evento tem o objetivo de compartilhar os conhecimentos adquiridos pelos alunos e professores nos seus respectivos projetos. O registro destes trabalhos servirá para que os futuros alunos possam também fazer uso deste conhecimento.

A comissão organizadora agradece aos autores pelo envio dos trabalhos e também à comissão científica pelas contribuições dadas durante o processo de avaliação e correção dos trabalhos.

A comissão organizadora.

Índice de Trabalhos

Programação em Game Engine	4
Existência e unicidade de solução para um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.....	13
Um breve estudo sobre Otimização Topológica e suas aplicações	19
Otimização de portfólios com modelo de Markowitz	30
Introdução ao desenvolvimento de jogos com a unity game engine.....	36
Fenômenos aleatórios discretos e alguns modelos probabilísticos.....	47
Integral Riemann e Integral Cauchy no ensino de análise	58
Gamificação: uma metodologia utilizada em aulas do Promat	70
Estatística descritiva: uma experiência no primeiro ano do Ensino Médio	77
Demonstração da área e perímetro da circunferência por meio de triangulações inscritíveis e circunscritíveis.....	85
Heurísticas para o problema de caminho mínimo visitando nós específicos	95
O uso do Algeplan para o ensino de polinômios	103
Geração imediatista: os desafios no ensino da Matemática.....	110
O uso dos jogos no ensino da Matemática.....	117

Programação em Game Engine

Michelli Neves Lavagnoli¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
michellineveslavagnoli@gmail.com

Flavio Roberto Dias Silva²

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
frdsilva@yahoo.com.br

Resumo: O presente artigo tem por finalidade apresentar os resultados obtidos durante o estudo e desenvolvimento de um pacote de algoritmos responsável pelo funcionamento de um jogo digital.

Palavras-chave: Programação básica, C Sharp (C#), Unity 3D.

1 Introdução

No cenário nacional atual os jogos digitais passaram a ser parte do cotidiano da maioria da população, independentemente do aparelho, “cerca de três em cada quatro brasileiros tem o costume de jogar, mais precisamente 74,5% da população” (Pesquisa Game Brasil, 2022).

Devido ao crescimento desse segmento nos últimos anos, surgiu uma demanda por profissionais qualificados para trabalhar na área e isso motivou universidades como a FATEC (Faculdades de Tecnologia) de São Paulo e a PUCPR de Curitiba a montarem cursos que estudam a ciência dos jogos digitais. De acordo com a Associação Brasileira de Games (Abra-games), além do caráter de entretenimento, a popularidade dos jogos permitiu a sua utilização no apoio à educação, no atendimento à saúde, no treinamento e capacitação profissional e até na promoção do bem-estar.

Nesse contexto, o presente artigo busca mostrar os resultados obtidos durante o estudo de programação básica, linguagem C Sharp e sua aplicação nos softwares utilizados durante a execução do projeto. Em particular realizando a implementação de algoritmos responsáveis pelo funcionamento de um jogo no espaço tridimensional.

2 Linguagem de programação

¹¹ Agradeço ao CNPq pela bolsa de estudos que possibilitou o aperfeiçoamento dos materiais utilizados nesse período de pesquisa.

Nosso objetivo é o desenvolvimento de um pacote de algoritmos para o funcionamento de um jogo digital e o motor escolhido para isso foi a Unity 3D. Como a linguagem de programação padrão da Unity é o C Sharp, nossos estudos em linguagem de programação foram realizados nessa linguagem. A seguir, destacaremos algumas características e o funcionamento da linguagem C Sharp.

3 C Sharp (C#) e sua linguagem de programação

O C Sharp é uma linguagem de programação orientada a objetos, criada pela Microsoft e lançada em meados de 2002. Sua criação foi baseada na linguagem de programação C e possui algumas familiaridades com as linguagens C++, Java e JavaScript.

Os scripts produzidos em C# são executados no .NET, um sistema de execução virtual que possui um conjunto de bibliotecas de classes que funcionam em conjunto com as bibliotecas do Motor de Jogos Unity. Abaixo estão citados alguns pontos elementares sobre linguagens de programação os quais foram utilizados no jogo, em particular, na sintaxe da linguagem C Sharp:

Variáveis

As variáveis representam dados cujos valores podem ser alterados durante a execução do algoritmo. Mais precisamente, uma variável representa uma posição de memória que armazena um dado de um tipo específico (esse dado pode ser no formato numérico, de texto, booleana, entre outros), (Pereira, 2010).

Operadores

Os operadores são expressões utilizadas em um ou mais operandos durante a execução de uma instrução. Abaixo apresentamos uma tabela com os mais usuais operadores da linguagem C#.

Tabela 1: Tabela de operadores em C#

+	Soma	= =	Igual a
-	Subtração	!=	Diferente de
*	Multiplicação	>	Maior que
/	Divisão	<	Menor que
%	Resto da divisão	>=	Maior igual a
=	Atribui valor à variável	<=	Menor igual a
++	Soma o valor “um”	--	Subtrai o valor “um”
&&	“E” condicional	&	“E” bit a bit
	“Ou” condicional		“Ou” bit a bit
!	Negação		

Comentários

Os comentários são linhas de códigos que permitem ao programador inserir no script textos que não são lidos durante a execução. Em C Sharp, há dois tipos de comentários: aqueles delimitados por “/*...*/”, que pode se estender por várias linhas, e aqueles iniciados por “//”, que definem um comentário de linha única (Pereira, 2010). Abaixo na figura 1, temos um exemplo do uso dos comentários.

```
12 // Use this for initialization
13 // Mensagem do Unity | 0 referências
14 void Start () {
15     Debug.Log(R);
16 }
17
18 // Update is called once per frame
19 // Mensagem do Unity | 0 referências
20 void Update () {
21     //Vector3.ProjectOnPlane pega a projeção de um vetor no primeiro parametro em cima de umplano com vetor normal
22     //dado pelo segunda parametro
23     Vector3 proj = Vector3.ProjectOnPlane(R.velocity, Vector3.up);
24     Vector3 fcam = Vector3.ProjectOnPlane(Camera.main.transform.forward,Vector3.up);
25     //Vector3.Rcam = Vector3.Cross(Vector3.up, fcam);
26     if (Input.GetKey(KeyCode.W))
27     {
28         if(proj.magnitude<velMax)
29             R.AddForce(moveForce *fcam);
30     }
31 }
```

Figura 1: uso do comentário de linha única
Fonte: Produção própria com auxílio do *Visual Studio*

Condicionais

Condicionais é a estrutura de controle que permite que o programa execute diferentes blocos de código dependendo de uma variável que pode ser verdadeira ou falsa. Estruturas condicionais também são conhecidas como estruturas de Controle de Fluxo. A figura 2 apresenta um exemplo do uso das condicionais.

```
// Use this for initialization
// Mensagem do Unity | 0 referências
void Start()
{
    Debug.Log("O ângulo do arco é de : " + valor + " graus");
    float rad = valor * ((Mathf.PI) / 180);

    if (valor % 90 != 0 || valor % 180==0)
    {
        if (valor % 180 == 0)
        {
            Debug.Log("Seno: 0 ");
            Debug.Log("tangente: 0 ");
        }
        else
        {
            Debug.Log("seno: " + Mathf.Sin(rad));
            Debug.Log("tangente: " + Mathf.Tan(rad));
        }
        Debug.Log("Cosseno: " + Mathf.Cos(rad));
    }
    else
    {
        Debug.Log("seno: " + Mathf.Sin(rad));
        Debug.Log("A tangente é inexistente");
        Debug.Log("Cosseno: 0 ");
    }
}
```

Figura 2: uso de condicionais
Fonte: Produção própria com auxílio do *Visual Studio*

Laços

Um laço é um recurso da programação que permite executar um bloco de código repetidamente até que uma condição específica seja atendida. Ele verifica se uma condição é verdadeira, e se for, executa um bloco de código. Em seguida a condição é verificada novamente e o processo se repete até que a condição seja falsa.

Os laços de repetição podem ser classificados de duas formas, sendo laços de repetição interativa ou laços de repetição iterativa. São interativos quando necessitam da intervenção

de um usuário do programa para repetir a próxima ação um indeterminado número de vezes, são laços iterativos quando executam as repetições previstas de forma automática um número de vezes (Manzano, 2014). A figura 3 apresenta o uso dos laços em um bloco de código.

```
for (int j = i; j < charV2.Length; j++)
{
    if (charV1[i] == charV2[j])
    {
        encontrouLetra = true;
        saoAnagramas &= contchar1[i] == contchar2[j];
    }
}

if (!encontrouLetra)
{
    saoAnagramas = false;
    break;
}
```

Figura 3: Uso de laços

Fonte: Produção própria com auxílio do *Visual Studio*

Durante os estudos da linguagem de programação e a criação dos algoritmos de teste, foram realizadas a execução dos mesmos no motor de Jogos Unity 3D. Dessa maneira, mesmo antes de compreender melhor os componentes da Unity já havíamos trabalhado com ela para a adaptação. Após a compreensão da linguagem C# e seus componentes mais usuais, foram iniciadas as aplicações na Unity com a interação do *Visual Studio*.

4 *Visual Studio* e Unity 3D

O *Visual Studio* é um Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE) criado pela Microsoft. Ele oferece uma ampla variedade de recursos e ferramentas para o desenvolvimento de aplicativos, incluindo, editor de código, depurador, gerenciador de projeto, testes e colaborações de equipe.

Uma das vantagens do Visual Studio é sua interface de uso simples e intuitivo. A IDE é projetada para ajudar os desenvolvedores a se concentrarem em seu trabalho, facilitando a escrita de código, sugerindo correções de erros e dando sugestões de auto complemento de código. Para a produção do jogo, utilizados a IDE em conjunto com o motor Unity 3D.

A Unity é um motor de jogos muito popular atualmente, é gratuito e por isso atrai muitas pessoas em ingressar em seus estudos. A engine disponibiliza ao usuário a documentação didática necessária (Unity (A), 2024), além de diversos tutoriais referentes a criação dos jogos (Unity (B),2024).

Esse motor de jogos tem suporte para a produção de jogos 2D e 3D, bem como compilar para vários sistemas operacionais. Ao criar um script na Unity, é possível abrir o mesmo pelo motor de jogos, o qual abre o arquivo no software *Visual Studio*. No arquivo aberto é

possível perceber que as bibliotecas da Unity são inseridas automaticamente. Pode -se observar essa interação nas figura 4, 5 e 6.

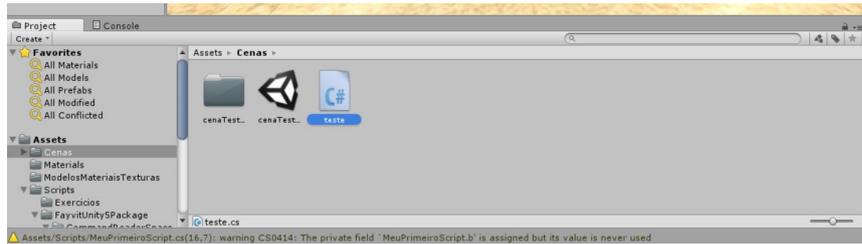


Figura 4: Criação do Script na janela Project
Fonte: Produção própria com auxílio da Unity 3D

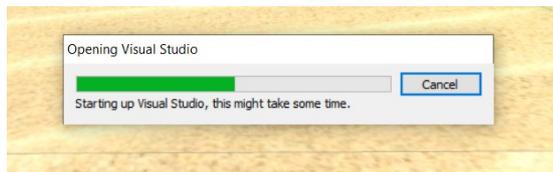


Figura 5: Abrindo a IDE através da Unity
Fonte: Produção própria com auxílio da Unity 3D

```
1 using System.Collections;
2 using System.Collections.Generic;
3 using UnityEngine;
4
5 public class teste : MonoBehaviour {
6
7     // Use this for initialization
8     void Start () {
9
10    }
11
12    // Update is called once per frame
13    void Update () {
14
15    }
16 }
17
```

Figura 6: Script do *Visual Studio* carregado com as bibliotecas da Unity 3D
Fonte: Produção própria com auxílio do *Visual Studio*

5 Arquitetura de programação e Interface

A arquitetura da programação da Unity é organizada de acordo com o que é apresentado na Figura 7, o jogo é programado em forma de cenas, dentro das cenas temos os Game-Objects e, anexados aos GameObjects, temos componentes. Os scripts que escrevemos para programar o jogo entram em cena anexados a um GameObject na forma de componente.

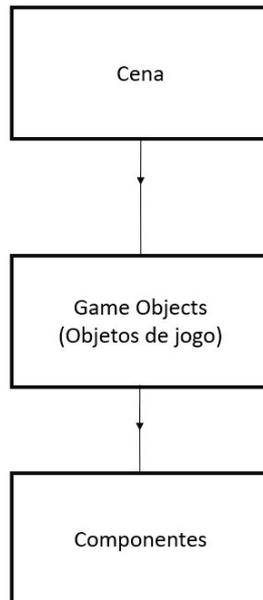


Figura 7: Arquitetura da Programação

Fonte: Acervo da autora

Abaixo estão citados os principais itens da interface da Unity:

- **Scene (cena):** É uma representação do mundo tridimensional simulada pelo motor de jogos, nessa aba são realizadas as edições na representação 3D do jogo;
- **Hierarchy (hierarquia):** Apresenta todos os Game Objects presentes na cena;
- **Project (projeto):** essa aba mostra a pasta no computador onde são guardados todos os arquivos do jogo como: imagens, sons, modelos 3D, arquivos de script, entre outros;
- **Inspector (inspetor):** Lista os componentes do Game Object que está selecionado e permite ao usuário editá-los;
- **Toolbar (barra de ferramentas):** Barra composta pelos controles de manipulação de cena, controles do jogo, menu de edição de camadas (layers), menu de layout e acesso à conta Unity.

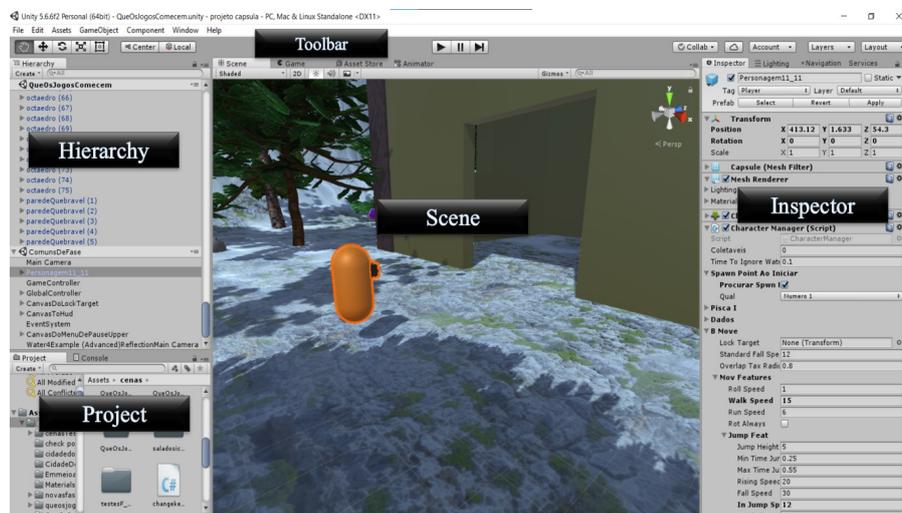


Figura 8: Interface da Unity 3D

Fonte: Produção própria com auxílio do Unity 3D

6 Documento de projeto do jogo (GDD) e Projeto de jogo

Antes de iniciar a criação de um jogo, são necessários alguns passos importante que auxilia o desenvolvedor a se manter fiel as ideias dos produtores. Esses passos são descritos no documento de projeto do jogo.

O GDD é um documento escrito pelo desenvolvedor, o qual é base para a construção do jogo. Esse documento apresenta as características do jogo, desde informações básicas, personagens, cenários, sons, até informações mais detalhadas e particulares. Como esse documento não é fixo, ele pode ser expandido, com o surgimento de novas ideias, e editado, caso seja encontrada alguma limitação da ideia original.

Os documentos de projeto de jogo apresentam uma estrutura encadeada de diversos elementos do jogo, sendo eles: o conceito do jogo; as mecânicas; as interfaces com usuário; os elementos; a descrição de personagens; o enredo e a história; sons e música; o detalhamento de fases, entre outros elementos. Através disso, é possível descrever o que um jogo deve ser. Visto isso, iniciamos com o projeto do nosso jogo.

O projeto trata-se de um jogo do gênero aventura com habilidades desbloqueáveis, sua jogabilidade se baseia no jogador atravessar uma área com obstáculos e inimigos até encontrar o portal que o leva para a fase seguinte.

No protótipo do jogo foram realizadas as implementações da movimentação do personagem no mundo 3D, suas ações de ataque e algumas habilidades desbloqueáveis. Além disso, foi realizada a programação de um pacote de algoritmos responsáveis pelo funcionamento do jogo. Os principais algoritmos criados foram os de movimentação, sistema de gerenciamento de cenas, câmera, recuperação de vida, coleta de moedas e movimentação dos inimigos. No script apresentado na Figura 9, descreve-se a ação de coletar uma moeda. Este script é anexado aos objetos moeda dentro do jogo. No script, encontra-se a função `OnTriggerEnter`, a qual é ativada quando o jogador entra em contato com a moeda. Dentro desta função, na linha 22, o valor da moeda é adicionado à quantidade total de moedas coletadas. Essa mensagem é importante para o script responsável pela Interface de Usuário, que exibe ao jogador a quantidade de moedas que ele possui. Ao final da função, é chamado o comando `Destroy(gameObject)`, removendo assim a moeda coletada da cena do jogo.

```
1 using System.Collections;
2 using System.Collections.Generic;
3 using UnityEngine;
4 using FayvitMessageAgregator;
5 using ProjetoCapsula3D.Managers;
6
7 public class moedas : MonoBehaviour {
8
9     // use this for initialization
10    void Start () {
11
12    }
13
14    // Update is called once per frame
15    void Update () {
16
17    }
18    private void OnTriggerEnter(Collider a)
19    {
20        if (a.gameObject.CompareTag("Player"))
21        {
22            a.GetComponent<CharacterManager>().coletaveis++;
23            MessageAgregator<MsGetCollectable>.Publish(new MsGetCollectable()
24            {
25
26                totalcollectable = a.GetComponent<CharacterManager>().coletaveis
27            });
28            Debug.Log("Você pegou um coletável");
29            Destroy(gameObject);
30        }
31    }
32 }
33 }
```

Figura 9: Script de programação da moeda

Fonte: Produção própria com auxílio do *Visual Studio*

Conclusões

Nesse artigo foram descritos alguns dos estudos realizados para a criação de um pacote de algoritmos responsáveis pelo funcionamento de um jogo digital e aspectos da aplicação desses algoritmos em um projeto de jogo. Ao final do projeto, criamos um jogo funcional como aplicação do nosso pacote de algoritmos.

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Estadual Do Oeste do Paraná pela oportunidade de realizar esse projeto e ao docente Flavio Roberto Dias Silva por me orientar e me auxiliar durante meus estudos nesse período.

Referências

PERREIRA, Silvio do Lago. **Algoritmos e Lógica de Programação em C: uma abordagem didática**. São Paulo: Érica, 2010.

Pesquisa Game Brasil 2022. <https://materiais.pesquisagamebrasil.com.br/2022-painel-gratuito-pgb22>. Acesso em: 24 mar. 2024.

Unity Technologies (2024)(A). Unity 3D User Manual. <http://docs.unity3d.com/Manual/index.html>. Acesso em: 24 mar. 2024.

Unity Technologies (2024)(B). Unity 3D Online Tutorials. <https://learn.unity.com/>. Acesso em: Acesso em: 24 mar. 2024.

Existência e unicidade de solução para um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

Ruan Pablo Pfeffer Gallio
UNIOESTE
ruangallio1@gmail.com

Resumo: O estudo de soluções para sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com condições iniciais é fundamental para diversos ramos da matemática e da ciência, como a modelagem de fenômenos físicos, biológicos e sociais. Assim, apresentamos e demonstramos um teorema que garante a existência e unicidade de soluções para tais sistemas, a fim de fortalecer a confiabilidade dos modelos matemáticos utilizados.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; método de Picard.

1 Introdução

Neste trabalho demonstraremos, sem o apelo a teoremas da teoria de espaços de Banach e de contrações, a existência e unicidade de solução para um sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com condições iniciais, o qual é representado por

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), & x_1(t_0) = y_1 \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), & x_2(t_0) = y_2 \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), & x_n(t_0) = y_n \end{cases} \quad (1)$$

onde $f_1, f_2, \dots, f_n : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções conhecidas e (y_1, y_2, \dots, y_n) é o dado inicial.

Nosso interesse em estudar sistemas de EDOs com o formato (1) é devido a sua forma generalizada de diversos problemas práticos como, por exemplo, o modelo SIR, caso particular com três equações. Tal modelo é amplamente utilizado no estudo do desenvolvimento de uma epidemia (MURRAY, 1993), em que separa a população em três grupos de diferentes estágios de uma doença. Assim, cada uma das funções x_i representa o número de indivíduos em tal grupo em dado momento.

Dessa forma, notamos a importância da existência e unicidade de solução de tais sistemas: com isso, modelos reais, como o SIR, valem ser estudados e aplicados.

2 Teorema de existência e unicidade

Teorema 1 (Existência). *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e sejam $f_1, \dots, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em t e Lipschitz contínuas em x_1, x_2, \dots, x_n . Então existe $\varepsilon > 0$ e alguma n -upla de funções (x_1, \dots, x_n) que satisfazem (1) em um intervalo $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.*

Prova. Para demonstrar a existência de solução, utilizaremos uma técnica conhecida como Método Iterativo de Picard como descrito em Collatz (1983), a qual consiste em construir uma sequência de equações integrais para cada uma das equações do sistema que converge uniformemente para a solução do problema.

Inicialmente, definimos como solução do problema (1) uma n-upla de funções (x_1, \dots, x_n) tais que

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1 + \int_{t_0}^t f_1(s, x_1, x_2, \dots, x_n) ds, \\ x_2(t) = y_2 + \int_{t_0}^t f_2(s, x_1, x_2, \dots, x_n) ds, \\ \vdots \\ x_n(t) = y_n + \int_{t_0}^t f_n(s, x_1, x_2, \dots, x_n) ds. \end{cases} \quad (2)$$

Para aplicar o método de Picard, definimos a sequência de funções $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ com a seguinte relação de recorrência

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = y_1 + \int_{t_0}^t f_1(s, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) ds, \\ x_2^{(k+1)} = y_2 + \int_{t_0}^t f_2(s, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) ds, \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = y_n + \int_{t_0}^t f_n(s, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) ds, \end{cases} \quad (3)$$

onde o passo inicial é dado por $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Note que, caso exista $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^{(\bar{k})} = x_i^{(\bar{k}+1)}, \forall i \in 1, 2, \dots, n$, então temos

$$x_i^{(\bar{k}+1)} = y_i + \int_{t_0}^t f_{i+1}(s, x_1^{(\bar{k}+1)}, \dots, x_n^{(\bar{k}+1)}) ds.$$

Denotando $x_i^{(\bar{k}+1)}$ apenas como x_i , teremos que x_i é uma solução definida em (2).

Doravante, subtraindo termos sucessivos de (3) para certo $i \in 1, \dots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} & x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \\ &= \int_{t_0}^t f_i(s, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - f_i(s, x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) ds. \end{aligned}$$

Logo, tomando o módulo, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f_i(s, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - f_i(s, x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})| ds, \end{aligned} \quad (4)$$

no entanto, como f_i é Lipschitz contínua em x_i , existe $L_i \in \mathbb{R}$ onde podemos tomar

$$\begin{aligned} & |f_i(t, x_1^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t)) - f_i(t, x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})| \\ &\leq L(|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}| + |x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}| + \dots + |x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)}|). \end{aligned} \quad (5)$$

Realizando a desigualdade (5) para equação do sistema e tomando $L = \max L_i, i \in 1, 2, \dots, n$, denotamos por $\delta_n(t)$ a seguinte relação:

$$\delta_k(t) = \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|. \quad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (4), obtemos

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq L \int_{t_0}^t \delta_k(s) ds, \quad (7)$$

onde realizamos a soma em $i \in 1, 2, \dots, n$ em (7), em que surge a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| &\leq \sum_{i=1}^n L \int_{t_0}^t \delta_n(s) ds. \\ \delta_{k+1}(t) &\leq nL \int_{t_0}^t \delta_k(s) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Note que, a partir de (8), podemos mostrar que

$$\delta_k(t) \leq \frac{nM(nL)^{k-1}|t - t_0|^k}{k!}, \quad (9)$$

onde M é o maior valor em $\{\max f_1, \max f_2, \dots, \max f_n\}$, o qual, como $f_i, i \in 1, 2, \dots, n$ são contínuas em um conjunto compacto, o teorema do valor extremo nos garante que possuem ponto de máximo. Provaremos tal relação por indução em k .

Para $k = 1$, observe que

$$x_i^{(1)} - x_i^{(0)} = \int_{t_0}^t f_i(s, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) ds + y_0 - y_0.$$

Logo, aplicando o módulo de ambos os lados e tomando $M \geq \max f_i$ obtemos

$$|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| \leq M|t - t_0|, \quad (10)$$

onde, ao somar sobre $i \in 1, 2, \dots, n$ em (10), nos resulta em

$$\delta_1(t) \leq nM|t - t_0|.$$

Dessa forma, está provado para o caso inicial e, ao aplicar a hipótese de indução em (8), temos que

$$\begin{aligned} \delta_{k+1}(t) &\leq nL \int_{t_0}^t \delta_k(s) ds \\ &\leq nL \int_{t_0}^t \frac{nM(nL)^{k-1}|s - t_0|^k}{k!} ds, \end{aligned}$$

assim, resolvendo a integral,

$$\delta_{k+1}(t) \leq \frac{nM(nL)^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, provamos a relação (9).

Tomando então os elementos da sequência para uma função x_i

$$x_i^{(k)} = y_i + X_i^{(k)}, \quad (11)$$

onde

$$X_i^{(k)} = \sum_{j=1}^k (x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)})$$

e aplicando a desigualdade triangular em (11), temos que

$$x_i^{(k)} \leq |y_i| + \sum_{j=1}^k |x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)}|. \quad (12)$$

Portanto, como $\delta_j(t)$ é $|x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)}|$ somado de termos positivos,

$$|y_i| + \sum_{j=1}^k |x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)}| \leq |y_i| + \sum_{j=1}^k \delta_j(t). \quad (13)$$

Dessa forma, substituindo (9) em (13),

$$\sum_{j=1}^k |x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)}| \leq \sum_{j=1}^k \frac{nM(nL)^{j-1}|t - t_0|^j}{j!}. \quad (14)$$

Finalmente, seja S a série definida por

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{nM(nL)^{j-1}|t - t_0|^j}{j!},$$

a qual, pelo teste da razão, converge absolutamente e $X_i = \lim_{k \rightarrow \infty} X_i^{(k)}$. Ao tomar o limite $k \rightarrow \infty$ em (14), obtemos que

$$|X_i| \leq S \leq |S|. \quad (15)$$

Definimos então a série numérica

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{nM(nL)^{j-1}\varepsilon^j}{j!},$$

que também converge absolutamente. Observe que, como em I , $|t - t_0| \leq \varepsilon \implies |S| \leq |P|$. Dessa forma, por (15), temos que $|X_i| \leq |S| \leq |P|$, assim o Teste M de Weirstrass nos garante que as série de funções $|X_i|$ convergem uniformemente em I .

Aplicando, então, o limite de $k \rightarrow \infty$ na definição da relação de recorrência, (3), obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k+1)} = y_i + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f_i(s, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) ds,$$

em que, pela convergência uniforme de X_i , podemos passar o limite para dentro da integral e, como f_i é contínua, para cada uma das variáveis. Portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k+1)} = y_i + \int_{t_0}^t f_i(s, \lim_{k \rightarrow \infty} x_1^{(k)}, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)}) ds,$$

logo,

$$x_i = y_i + \int_{t_0}^t f_i(s, x_1, \dots, x_n) ds \quad (16)$$

em que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$ para cada $i \in 1, 2, \dots, n$.

Assim, como definido em (2), por (16) temos que, dado i , existe solução para cada equação no problema proposto. \square

Dessa forma, dada a existência de solução, focaremos em demonstrar sua unicidade:

Teorema 2 (Unicidade). *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e sejam $f_1, \dots, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em t e Lipschitz contínuas em x_1, x_2, \dots, x_n . Então o sistema proposto em (1) possui solução única.*

Prova. Suponhamos inicialmente que existam duas n-uplas de funções que solucionem (1):

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} z'_1(t) = f_1(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \\ z'_2(t) = f_2(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \\ \vdots \\ z'_n(t) = f_n(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{bmatrix}.$$

Daqui, definimos uma função φ_i como $\varphi_i = x_i - z_i$. Logo, $\varphi'_i = x'_i - z'_i$, donde temos que

$$\varphi_i = \int_{t_0}^t [f_i(s, x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(s, z_1, z_2, \dots, z_n)] ds. \quad (17)$$

Ao tomar o módulo em ambos os lados, obtemos a desigualdade

$$|\varphi_i| \leq \int_{t_0}^t |f_i(s, x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(s, z_1, z_2, \dots, z_n)| ds,$$

onde a condição de Lipschitz nos garante que podemos tomar $L_i \in \mathbb{R}$ onde

$$|\varphi_i(s)| \leq L_i \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n |x_i(s) - z_i(s)| ds,$$

em que, novamente, denotamos por $L = \max\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$, resultando em

$$|\varphi_i(s)| \leq L \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n |\varphi_i(s)| ds. \quad (18)$$

Seja, então, $\psi(t)$ tal que

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n |\varphi_i(t)|. \quad (19)$$

Assim, somando sobre (18) de $i = 1$ até n e simplificando, obtemos que

$$\psi(t) \leq nL \int_{t_0}^t \psi(s) ds. \quad (20)$$

Em seguida, definimos uma função $U(t)$ como $U(x) = \int_{t_0}^t \psi(s) ds$. Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo, temos como resultado

$$U'(t) + \psi(t_0) = \psi(t). \quad (21)$$

Substituindo, então, (20) e a definição de $U(t)$ em (21), resulta em

$$\begin{aligned} U'(t) + \psi(t_0) &\leq nLU(y) \\ U'(t) - nLU(t) &\leq -\psi(t_0). \end{aligned} \quad (22)$$

Nesse ponto, note que

$$\psi(t_0) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t_0) = 0,$$

pela definição em (17) e que, portanto $U(t_0) = 0$ e $U(t) \geq 0$ para todo $t > t_0$. Assim, utilizando o fator integrante e^{nLt} na equação diferencial ordinária (22), obtemos

$$(e^{nLt}U(t))' \leq 0$$

e portanto,

$$e^{nLt}U(t) \leq 0.$$

Assim, como $e^{nLt} > 0$ para todo t , obrigatoriamente $U(t) \leq 0$, mas como U é não-negativa, temos que $U(t) = 0$ com $t \geq t_0$. Logo, $U'(t) = 0$, substituindo então $U'(t)$ por (21) e $\psi(t_0) = 0$, obtemos

$$U'(t) = \psi(t) = \sum_{i=1}^n |\varphi_i| = 0,$$

donde, pela definição de φ_i ,

$$\sum_{i=1}^n |x_i - z_i| = 0.$$

Portanto, temos que $x_i - z_i = 0 \implies x_i = z_i$, para todo $i \in 1, 2, \dots, n$. □

Diante do exposto, torna-se clara a preferência do uso de tais sistemas de EDOs para a modelagem de situações reais, isso pois, sobre hipóteses razoáveis, temos a garantia que tal sistema pode gerar resultados plausíveis.

3 Referências

COLLATZ, Lothar. **Differential Equations: An introduction with applications**. Chichester: John Wiley & Sons, 1983.

MURRAY, James Dickson. **Mathematical Biology: I. An introduction**. Nova York: Springer, 1993.

Um breve estudo sobre Otimização Topológica e suas aplicações

David Hapner Barzotto¹
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
dhbarzotto@hotmail.com

Simone Aparecida Miloca
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
smiloca@gmail.com

Paulo Domingos Conejo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pconejo33@gmail.com

Resumo: A Otimização Topológica é um estudo que visa utilizar métodos de otimização, para encontrar e validar as melhores topologias que uma peça estrutural pode possuir, onde seu foco principal é, minimizar sua flexibilidade restringindo seu volume. Logo, a ideia é que a estrutura analisada possua a máxima rigidez com o menor uso de material possível. Com isso, este trabalho trata brevemente da teoria da otimização topológica com a aplicação do método de otimização implementado na rotina `fmincon` do `scilab`, e utilizando o Método SIMP para distribuição de material em uma viga isostática.

Palavras-chave: Otimização Topológica; Método SIMP; Viga Isostática.

1 Introdução

Otimização é uma área da matemática que se preocupa em encontrar os pontos de mínimo e máximo da função, sendo eles locais ou globais dependendo da complexidade do problema. De acordo com Luenberger e Ye (2016) existem diversos tipos de problemas que podem ser analisados, como problemas irrestritos e problemas restritos. Karas e Ribeiro (2010) formalmente apresentam que, otimização consiste em encontrar pontos de mínimo e máximo de uma função real f sobre um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, escrito como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } x \in \Omega, \end{aligned}$$

com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções, em geral, diferenciáveis.

Dessa maneira, pode-se escrever o problema de otimização como

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0. \end{aligned}$$

¹Estudante do 5º ano de Engenharia Civil

Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dizemos que o problema é irrestrito, e caso contrário, restrito.

A otimização se encontra em uma área de intensa e extensiva pesquisa na engenharia conhecida como Otimização Topológica. Zhu *et al.* (2021) afirmam que a Otimização Topológica é um avançado método de projeto estrutural, em que a ideia é obter a configuração ótima da estrutura com base na distribuição de material relacionada com as condições de cargas aplicadas, performance e restrições.

A Otimização Topológica está voltada à obtenção da estrutura mais rígida possível e sujeita a restrições, como por exemplo, o volume máximo de material (Senne, 2009; Sigmund, 1994). A partir disso, a estrutura é submetida a um conjunto de forças, e restrita a um domínio que é dividido em elementos, em que cada elemento é associado a uma variável que indica se contém ou não material.

2 O Problema de Otimização Topológica

Sigmund (1994) descreve que, a Otimização Topológica é um método computacional desenvolvido originalmente com o objetivo de obter uma estrutura mais rígida possível satisfazendo certas condições, por exemplo, uma quantidade máxima de material. A estrutura a ser projetada deve estar contida em um domínio Ω , sujeita a aplicações de forças externas e à imposição de condições de contorno (apoios) responsáveis pela estaticidade da estrutura.

Cada um dos pontos desse domínio Ω pode ser vazio ou sólido. Contudo, considerando termos computacionais, é extremamente complicado fazer com que cada ponto do domínio assuma apenas essas duas configurações. Por isso, para simplificar a resolução do problema, é permitido que tais pontos assumam estágios intermediários entre vazio e sólido.

A rigidez de uma estrutura está associada ao conceito de *flexibilidade média*, de tal forma que a estrutura mais rígida corresponde àquela que apresenta menor flexibilidade. Portanto, a formulação matemática de um problema de Otimização Topológica estrutural terá como objetivo minimizar a flexibilidade média da estrutura, atendendo às restrições de volume do material e garantindo que o corpo esteja em equilíbrio estático (Senne, 2009).

2.1 Método SIMP

Bendsøe (1989) apresenta que, durante a resolução do problema de Otimização Topológica, é preciso decidir em quais pontos do domínio Ω haverá material. Dessa maneira, a topologia ótima pode ser representada por um função discreta $\chi(x)$, definida em cada ponto $x \in \Omega$ como

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_D, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega/\Omega_D, \end{cases} \quad (1)$$

em que, $\Omega_D \subset \Omega$ é a região da estrutura onde há presença de material.

Formalmente, o uso da função discreta dada pela Equação (1), torna mal condicionado o problema numérico a ser resolvido, devido a mudança brusca do valor das variáveis de projeto. Uma alternativa para evitá-lo é permitir que as variáveis de projeto assumam valores intermediários entre 0 e 1, substituindo a função discreta (1) por um função contínua $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ que represente a densidade do material em cada ponto $x \in \Omega$. A introdução dessa função ρ pode ser feita de maneira conveniente utilizando o método das densidades proposto por Bendsøe (1989) denominado *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP).

Ao considerar uma função contínua ρ para descrever a distribuição de material em Ω , torna-se possível a existência de regiões com densidades intermediárias, ou seja, densidades cujos valores pertencem ao intervalo $]0,1[$. O uso da função ρ permite encontrar um solução para o problema de otimização topológica, mas dificulta a interpretação física da topologia ótima encontrada para a estrutura, já que não será utilizado um material diferente em cada ponto da estrutura para representar um valor de ρ entre 0 e 1. Assim, para evitar tal problema, Bendsøe (1989) introduziu o Método das Densidades, ou *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP), em que, no lugar de ρ , utiliza-se ρ^p para controlar a distribuição de material, sendo $p > 1$ um parâmetro de penalização responsável pela diminuição da ocorrência das densidades intermediárias.

A Figura 1 ilustra o comportamento das densidades penalizadas com base no aumento do fator p . Nota-se que a medida que o valor p aumenta, as densidades tendem a aproximar-se de 0.

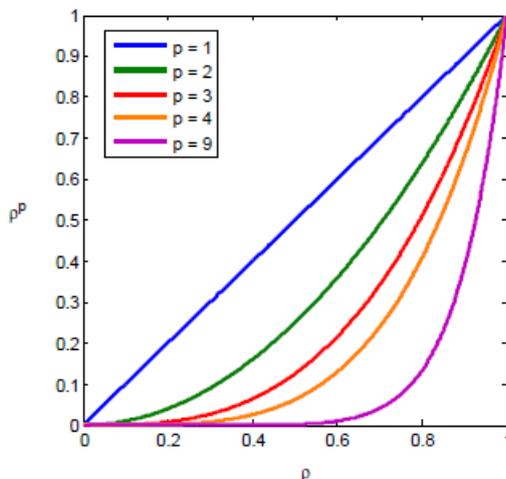


Figura 1: Efeito do aumento do fator de penalização p do método SIMP sobre as densidades.
Fonte: Senne (2009).

Rietz (2001) afirma que, quando a penalização das densidades é excessiva, ou seja, quanto mais alto for o valor de p , o problema que antes era contínuo fica cada vez mais próximo de um problema discreto, o que acaba gerando instabilidade numérica oriunda da variação brusca dos valores das densidades.

2.2 Formulação do Problema

No método SIMP, o domínio Ω é discretizado em pequenos elementos retangulares. Com cada elemento finito discretizador, assume-se que as propriedades do material são constantes e isotrópicas e, sua densidade é variável. O SIMP penaliza as densidades intermediárias adotando menores rigidezes, a fim de melhorar padrões binários na topologia (Wang e Zhang, 2016).

Considerando estruturas feitas de apenas um material e vazias, tem-se a básica suposição de relação entre o tensor de rigidez $\mathbf{E}(x)$ e a densidade relativa do elemento x dada por

$$\mathbf{E}(x) = (x)^p \mathbf{E}_p > 1, \quad (2)$$

com \mathbf{E}_p o tensor de rigidez de um elemento sólido. Baseado na suposição da Formulação (2), o problema de Otimização Topológica para o método SIMP em que a ideia é minimizar a flexibilidade, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \mathbf{U}^T \mathbf{K}(x^p) \mathbf{U} \\ &\text{sujeito a} && \mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U} \\ &&& \frac{V(x)}{V_0} = v \\ &&& 0 < x_{min} \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (3)$$

onde x denota o vetor das variáveis de projeto, \mathbf{F} é o vetor força global, $\mathbf{K}(x^p)$ denota a matriz de rigidez global calculada com o método SIMP, \mathbf{U} sendo o vetor de deslocamentos global, V é o volume do material, V_0 é o volume do domínio do projeto e v é a fração do volume prescrito (Wang e Zhang, 2016).

3 Método dos Elementos Finitos

De acordo com Teodoro (2023), o Método dos Elementos Finitos (MEF) foi desenvolvido inicialmente por Courant (1943), no entanto, a expressão "elementos finitos" surgiu com Clough (1960). Tal método utiliza a divisão do domínio de integração, contínuo, em um número determinado e limitado de subdomínios (elementos finitos), sendo uma alternativa para resolver equações diferenciais relacionadas a problemas físicos envolvendo geometrias complexas (Abe, 2019; Assan, 2020; Bernardo, 2021).

O MEF inicia-se com a discretização do domínio Ω em subdomínios, em que, tal conjunto de subdomínios é definido como malha. A geração da malha pode ser composta por diferentes elementos, como triângulos e quadrados para elementos bidimensionais e, tetraedros e cubos para elementos tridimensionais.

A escolha da quantidade de elementos que formarão a malha do domínio discretizado Ω^h depende da precisão exigida para a solução aproximada e da capacidade computacional disponível. Em geral, uma malha mais fina, ou seja, discretizada em vários subdomínios, apresenta uma aproximação mais precisa, contudo, possui um custo computacional elevado. Em diversos problemas, é necessário gerar uma malha não uniforme, aplicando um refinamento nas áreas do domínio onde o grau de precisão deve ser mais elevado (Senne, 2009).

Resumidamente, o MEF trata de discretizar o modelo em elementos, onde cada nó do elemento possui graus de liberdade. Tais graus de liberdade são referentes a mobilidade do nó, como rotação e translação no eixo. Com isso, é possível encontrar seus deslocamentos, bem como forças e tensões referentes ao modelo de estudo.

Tratando-se da viga isostática a ser estudada, a viga clássica de Messerschmitt-Bölkow-Blohm (MBB), apresentada na Figura 2, a ideia é discretizar em elementos finitos, em que com base no modelo SIMP, deve-se retirar uma porcentagem de material para encontrar a topologia ótima.

Para isto, deve-se resolver o sistema de equações que representam o modelo físico da viga, como

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (4)$$

onde \mathbf{F} representa o vetor de forças, \mathbf{K} representa a matriz de rigidez do material, sendo ela rigidez elástica \mathbf{E} e rigidez tangencial \mathbf{G} , e \mathbf{U} representa o vetor de deslocamentos, em que este último é a incógnita do sistema.

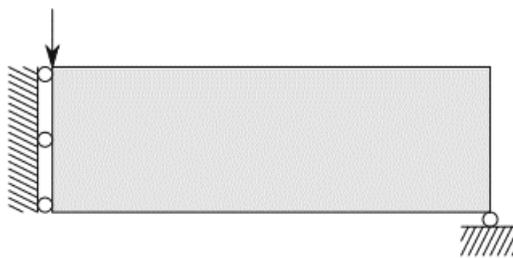


Figura 2: Modelo de viga isostática implementada.

Fonte: Andreassen *et al.* (2011).

4 Tabuleiro de Xadrez e Filtro

Tendo o sistema de elementos finitos resolvido, o próximo passo é resolver o Tabuleiro de Xadrez. De acordo com Sigmund (1994), o tabuleiro de xadrez é definido como uma região de elementos vazios e sólidos alternados, dispostos em forma de um tabuleiro. Ademais, o autor comenta que essa "porosidade" não deve ser entendida como uma estrutura ótima, sendo que ela está diretamente relacionada com as instabilidades numéricas devido a modelagem dos elementos.

Sigmund (1994) menciona que existem diferentes maneiras de abordar o problema do tabuleiro de xadrez. Em seu trabalho, o autor comenta sobre a utilização de métodos de processamento de imagens para redução de ruídos. Senne (2009) utiliza-se desses conceitos, caracterizando o chamado filtro.

Brevemente, filtros são operadores matemáticos, mais especificamente um produto de convolução entre uma função e a função das densidades (Bourdin, 2001). A ideia é que o filtro atua em uma vizinhança de um elemento com um círculo de raio mínimo, alterando suas

características.

Neste trabalho, utiliza-se o filtro do vetor gradiente da função objetivo, proposto por Sigmund (2001). Tal modelo é descrito pela substituição dos componentes do gradiente $\partial f/\partial x_i$, realizado como

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i \sum_{j \in B_i} \widehat{H}_{ij}} \sum_{j \in B_i} \widehat{H}_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

onde,

$$\widehat{H}_{ij} = \begin{cases} r_{min} - s_{ij}, & \text{se } j \in B_i \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6)$$

em que as variáveis são, n que é o número de elementos discretizado pelo MEF, f que é a função objetivo, B_i que é um círculo de raio r_{min} localizado no centro da viga i , s_{ij} que é a distância euclidiana entre os elementos i e j , sendo que quanto mais próximo um elemento j está de seu elemento central i maior é a atuação do filtro. Ressalta-se que \widehat{H}_{ij} é um parâmetro que depende exclusivamente das posições relativas entre os elementos, sendo, portanto, constante ao longo das iterações.

5 Metodologia

Para a resolução do problema da viga isostática, foi realizada uma implementação na linguagem de programação Scilab. A ideia, diferentemente de Andreassen *et al.* (2011) que utilizou o critério de otimalidade, e de Senne (2009) que usou o método das assíntotas móveis, foi utilizar um método de otimização.

A implementação consta do uso de elementos finitos em que se resolve o sistema de equações pelo método de Cholesky, bem como da resolução pelo método SIMP. Para realizar a otimização, utilizou-se a bibliotecas *fmincon* 1.0.3 que trata de restrições multivariáveis não lineares, implementando o método de pontos interiores. O algoritmo implementado pode ser entendido pelo fluxograma apresentado na Figura 3.

Os dois experimentos realizados, que foram baseados nos de Andreassen *et al.* (2011), consideraram dois tamanhos de malha diferentes, sendo o primeiro de 60×20 elementos e o segundo de 150×50 elementos. A restrição de volume para cada um foi de 50%, a penalidade foi $p = 3$. Já o raio mínimo do filtro, foi definido sendo 0.04 do valor de elementos no eixo x , assim, para a primeira viga tem-se 2.4 e para a segunda 6.

Os modelos foram realizados em um computador com AMD Ryzen 7 4800 H *with* Radeon Graphics 2.90 GHz, 16 GB de RAM e Windows 11 Home.

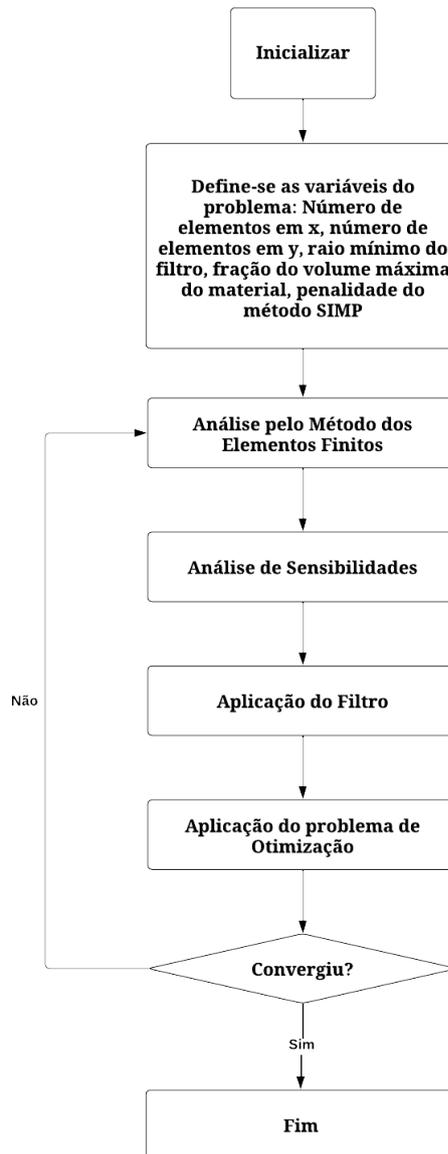


Figura 3: Fluxograma do algoritmo implementado.

Fonte: Os Autores.

6 Resultados

Para o primeiro experimento, tem-se o apresentado na Figura 4. A função objetivo atingiu um valor de 246.59 em 188 iterações e em 105 segundos. Ao comparar o resultado com o de Andreassen *et al.* (2011), o valor obtido neste trabalho foi 5,22% maior.

Considerando o segundo experimento, é apresentado na Figura 5 o resultado. A função objetivo em 727 segundos e em 288 iterações, obteve um valor de 246.59, sendo idêntico ao do primeiro experimento. Em contrapartida, o modelo de Andreassen *et al.* (2011) obteve um valor de 235.73, o que representa que o experimento deste trabalho foi 4,40% superior.

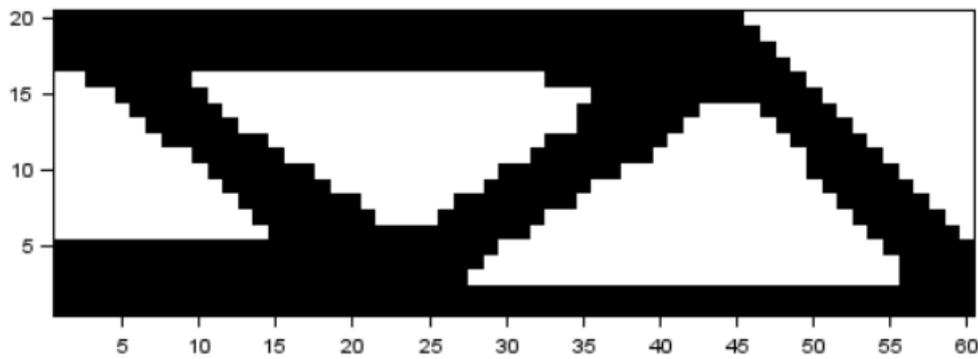


Figura 4: Modelo de 60×20 elementos e raio 2.4.

Fonte: Os Autores.

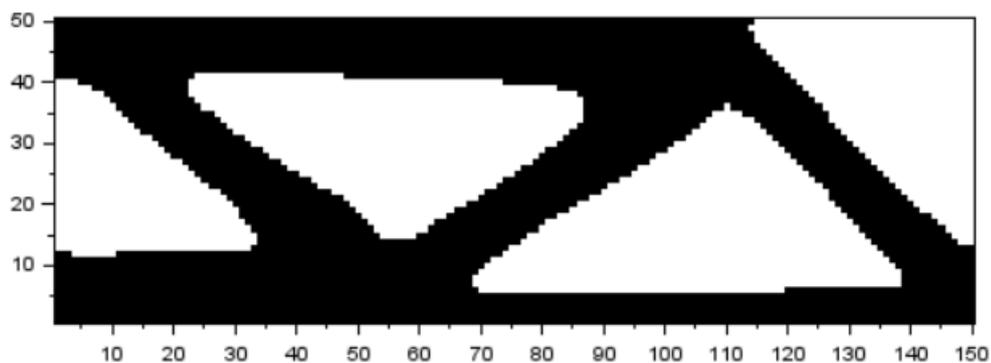


Figura 5: Modelo de 150×50 elementos e raio 6.

Fonte: Os Autores.

Com base nos resultados, percebe-se que, com o aumento da malha de elementos finitos, melhor discretizado fica o domínio de projeto. Contudo, como descrito por Senne (2009), ao elevar o tamanho da malha, o que gera uma malha mais refinada, piora o gasto computacional. Isto pode ser percebido pelo fato de, a diferença de tempo entre o primeiro e o segundo experimento, além do fato de o primeiro experimento consumir 275 MB de RAM e o segundo experimento consumir 505 MB.

Complementa-se, que o trabalho de Andreassen *et al.* (2011) realizou mais um experimento, considerando uma viga de 300×100 elementos. Contudo, ao tentar implementar tal modelo, o programa desenvolvido não foi capaz de resolver o sistema de equações lineares, pois a matriz rigidez possui tamanho de (60802×60802) , sendo incapaz de ser resolvido pelo computador utilizado. Ressalta-se que os modelos anteriores possuíam matriz de rigidez com tamanho de (2562×2562) e (15402×15402) , respectivamente.

Conclusões

Diante deste trabalho, pode-se concluir que a Otimização Topológica é um vasto campo de estudo e aplicação, podendo possuir diversas variações de modelos com foco na resolução de problemas, como apresentados nos estudos de Bendsøe (1989), Senne (2009), Andreassen *et al.* (2011) e Wang e Zhang (2015).

Além disso, percebe-se que o código desenvolvido apresenta uma boa capacidade de resolução do problema da viga isostática utilizando o método dos pontos interiores, pois leva a pequenas diferenças aos resultados encontrados pelo trabalho de Andreassen *et al.* (2011), que utilizou o método heurístico conhecido por Critério de Otimalidade.

Proposta para trabalhos futuros

Com vista na implementação deseja-se melhorar o código, visto que este ainda está em fase de desenvolvimento, implementando critérios de paradas, contagem de tempo e de iteração precisas, além de expandir os modelos de filtros e criar uma interface gráfica.

E, visando a parte de pesquisa, aprimorar os problemas, expandindo para vigas engastadas, vigas em L, vigas com furos, além de focar na implantação de um problema em três dimensões.

Agradecimentos

Tendo em vista que se trata de uma pesquisa voluntária, o discente agradece aos seus orientadores, Professora Simone e Professor Paulo, pelas explicações e conversas tidas durante esse período de pesquisa.

Referências

ABE, I. P. **Simulação numérica de reforço e reabilitação de vigas de concreto armado**. 2019. Dissertação de Mestrado (Escola de Engenharia de São Carlos - USP), 2019.

ANDREASSEN, E., CLAUSEN, A., SCHEVENELS, M., LAZAROV, B. S., SIGMUND, O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 1, p. 1-16, 2011.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. São Paulo: Ed. Da UNICAMP, 2020.

BENDSØE, M. **Optimal shape design as a material distribution problem**. Structural

Optimization n. 1, 1989, 193-202.

BERNARDO C. C. L. C. G. **Enriquecimento da cinemática em elementos finitos de porticos planos laminados para a regularização das tensões cisalhantes em análise geometricamente não linear.** 2021. Dissertação de Mestrado (Escola de Engenharia de São Carlos - USP), 2021.

BOURDIN, B. Filters in topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 9, 2001, p. 2143-2158

COURANT. R. **Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations.** Bull. Amer. Math. Soc. v. 49, n. 1, 1943, p. 1-23.

CLOUGH, R. W. The finite element method in plane stress analysis. In: **Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computational**, Pittsburgh Pa. 1960.

KARAS, E. W., RIBEIRO, A. A. **Um curso de otimização.** Repositório Unicamp. Acesso em: 23 de março de 2024. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/sandra/MS629/handouts/livro28jul.pdf>.

LUENBERGER, D. G., YE, Y. (2016). **Linear and Nonlinear Programming** 4ed. Springer, Switzerland.

RIETZ, A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 21, 2001, p. 159-163.

SENNE, T. A. **Otimização topológica de mecanismos flexíveis.** Dissertação de Mestrado (Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação Unicamp), 2009.

SIGMUND, O. **Design of material structures using topology optimization.** Tese de Doutorado (Technical University of Denmark), 1994.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, 2001, p. 120-127.

TEODORO, C. P. **Análise numérica da probabilidade de falha de uma estrutura composta por elementos de pórtico sob efeito de corrosão por carbonatação.** Dissertação de Mestrado (Escola de Engenharia de São Carlos - USP), 2023.

WANG, N. F., ZHANG, X. M. A Solid Isotropic Material with Parallel Penalization Method for Structural Topology Optimization with Multiple Materials. **Anais IEEE Xplore**, 2016.

ZHU, J., ZHOU, H., WANG, C., ZHOU, L., YUAN, S., ZHANG, W. A review of topology optimization for additive manufacturing: Status and Challenges. **Chines Journal os Aeronautics**, 2021.

Otimização de portfólios com modelo de Markowitz

Gabriel Rodrigues dos Santos¹
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
gabriel.rds2003@gmail.com

Paulo Domingos Conejo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pconejo33@gmail.com

Resumo: Otimização de portfólio facilita a seleção de portfólios em uma situação de mercado volátil. Neste trabalho, empregamos o modelo de Markowitz para distribuição de recursos em carteiras de investimentos.

Palavras-chave: Otimização; Portfólio.

1 Introdução

A Otimização é a área da Matemática que trata de problemas cujo interesse consiste em encontrar pontos de máximo ou de mínimo de funções. Um problema de otimização consiste em minimizar ou maximizar uma determinada função, f , denominada função objetivo, sujeita a determinadas condições, denominadas restrições (RIBEIRO; KARAS, 2014). É usualmente escrito na forma a seguir

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Quando Ω , denominado conjunto viável é o espaço n -dimensional, o problema de otimização é dito irrestrito.

Notando que $-\min(-f) = \max(f)$, podemos dizer que um problema de maximização é equivalente a um problema de minimização: maximizar $f(x)$ equivale a minimizar $-f(x)$. Também vale notar que o problema de simultaneamente otimizar duas funções $f(x)$ e $g(x)$ pode ser modelado como a otimização da função $f(x) + g(x)$. De forma similar, maximizar $f(x)$ enquanto minimiza $g(x)$ pode ser modelado como minimizar $-f(x) + g(x)$. Uma adição comum a problemas de otimização com múltiplas funções é atribuir um peso diferente a cada função, por exemplo

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -f(x) + w \cdot g(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in \Omega \end{aligned} \tag{2}$$

onde w define o peso de $g(x)$ em relação a $f(x)$.

Neste trabalho temos interesse em resolver um problema do tipo (2), que é o modelo proposto por Markowitz (1952) e que deu origem a série de pesquisas e avanços na área de otimização de portfólios (GUNJAN; BHATTACHARYYA, 2022).

¹Estudante do 3º ano de Ciência da Computação

2 Modelo de Markowitz

Um problema no qual podemos aplicar otimização matemática é o do portfólio de investimentos. Segundo Markowitz (1952), seleção de um portfólio consiste em dois estágios: estimar a performance futura de certas ações, e em seguida, realizar as escolhas de investimento. O fator principal na escolha de uma carteira é maximizar o retorno esperado enquanto minimiza o risco. Após estimar o retorno esperado, o problema consiste, efetivamente em considerar uma seleção de n investimentos, cada um com uma estimativa de retorno esperado R_i . O objetivo é distribuir um valor total S , alocando uma fração X_i de S a cada investimento, de modo a maximizar o retorno enquanto minimiza o risco.

Um problema de portfólio consiste em minimizar risco e maximizar retorno em função de um valor investido X_i em cada ação i , ou seja,

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -\text{Retorno}(X) + w \cdot \text{Risco}(X) \\ \text{sujeito a} \quad & X_i \geq 0 \text{ e } \sum_i X_i = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Consideramos como informação inicial uma amostra $A_i = \{a_{i1}, \dots, a_{iT}\}$ de T taxas de retorno de cada ação i , tomadas em um certo período de tempo. A Tabela 1 mostra uma seleção de 8 ações, $i = 1, \dots, 8$, e seus valores de retorno a_{it} , com $t = 1, \dots, 22$ amostras.

Ano	US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold
1973	1,075	0,942	0,852	0,815	0,698	1,023	0,851	1,677
1974	1,084	1,020	0,735	0,716	0,662	1,002	0,768	1,722
1975	1,061	1,056	1,371	1,385	1,318	1,123	1,354	0,760
1976	1,052	1,175	1,236	1,266	1,280	1,156	1,025	0,960
1977	1,055	1,002	0,926	0,974	1,093	1,030	1,181	1,200
1978	1,077	0,982	1,064	1,093	1,146	1,012	1,326	1,295
1979	1,109	0,978	1,184	1,256	1,307	1,023	1,048	2,212
1980	1,127	0,947	1,323	1,337	1,367	1,031	1,226	1,296
1981	1,156	1,003	0,949	0,963	0,990	1,073	0,977	0,688
1982	1,117	1,465	1,215	1,187	1,213	1,311	0,981	1,084
1983	1,092	0,985	1,224	1,235	1,217	1,080	1,237	0,872
1984	1,103	1,159	1,061	1,030	0,903	1,150	1,074	0,825
1985	1,080	1,366	1,316	1,326	1,333	1,213	1,562	1,006
1986	1,063	1,309	1,186	1,161	1,086	1,156	1,694	1,216
1987	1,061	0,925	1,052	1,023	0,959	1,023	1,246	1,244
1988	1,071	1,086	1,165	1,179	1,165	1,076	1,283	0,861
1989	1,087	1,212	1,316	1,292	1,204	1,142	1,105	0,977
1990	1,080	1,054	0,968	0,938	0,830	1,083	0,766	0,922
1991	1,057	1,193	1,304	1,342	1,594	1,161	1,121	0,958
1992	1,036	1,079	1,076	1,090	1,174	1,076	0,878	0,926
1993	1,031	1,217	1,100	1,113	1,162	1,110	1,326	1,146
1994	1,045	0,889	1,012	0,999	0,968	0,965	1,078	0,990

Tabela 1: Retorno por dólar de cada um de oito investimentos. \$1 investido em EAFE em Janeiro de 1981, valia \$0,977 em Dezembro. Adaptado e traduzido de Vanderbei (2014). Para cada investimento i , a_{i1} é seu retorno em 1973, e a_{i22} seu retorno em 1994, com 22 amostras.

2.1 Estimativa de Retorno e Risco

A primeira e mais simples abordagem para estimativa do retorno é a média aritmética. Poderia ser tomado como retorno esperado R_i

$$\mu(A_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T a_{it} \quad (4)$$

a média das amostras de taxa de retorno do investimento i . A Tabela 2 apresenta a média aritmética dos retornos da Tabela 1.

	US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold
$\mu(A_i)$	1,078	1,093	1,120	1,124	1,121	1,092	1,141	1,129

Tabela 2: Média aritmética dos retornos de cada investimento.

Um problema levantado por Vanderbei (2014) é a relevância de retornos mais antigos: certamente o retorno de um investimento em 1973 é menos relevante que o retorno em 1994. Para isso, é proposto o uso de uma média ponderada, onde retornos mais antigos têm peso menor, atribuindo um peso p^{T-t} a cada retorno a_{it} , na forma

$$\mu_p(A_i) = \frac{\sum_{t=1}^T p^{T-t} a_{it}}{\sum_{t=1}^T p^{T-t}} \quad (5)$$

onde p é alguma constante $0 < p < 1$, chamada fator de desconto. Quanto menor p , menos relevantes são os retornos mais antigos.

A Tabela 3 apresenta as médias aritméticas ponderadas dos retornos da Tabela 1, para vários valores de p .

p	US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold
0,5	1,043	1,027	1,066	1,065	1,083	1,036	1,112	1,017
0,7	1,050	1,072	1,099	1,099	1,122	1,066	1,113	1,011
0,9	1,069	1,103	1,128	1,129	1,136	1,092	1,144	1,053
1,0	1,078	1,093	1,120	1,124	1,121	1,092	1,141	1,129

Tabela 3: Média aritmética ponderada dos retornos para diferentes valores de p . Note que para $p = 1, 0$, todos os pesos são iguais e a média ponderada equivale a média simples.

Um segundo problema levantado é com o uso de somas para as médias. Se um investimento exibiu uma taxa de retorno de 2,0 seguido de uma taxa 0,5, segundo a média aritmética, o retorno médio foi de $\frac{1}{2}(2,0 + 0,5) = 1,25$, porém o retorno por real investido nesse período de tempo seria 1,00, visto que $1,00 \cdot 2,0 \cdot 0,5 = 1,00$. Com isso, é fácil chegar à conclusão que algum tipo de média geométrica seria mais precisa. Com retornos 2,0 e 0,5, a média geométrica $(2,0 \cdot 0,5)^{\frac{1}{2}} = 1$. Vanderbei (2014) propõe a média geométrica ponderada como retorno esperado de um investimento

$$R_i = \exp \left(\frac{\sum_{t=1}^T p^{T-t} \ln a_{it}}{\sum_{t=1}^T p^{T-t}} \right) \quad (6)$$

com o mesmo peso p^{T-t} atribuído a cada amostra. A Tabela 4 apresenta as médias geométricas ponderadas das amostras apresentadas na Tabela 1 para diferentes valores de p .

p	US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold
0,5	1,043	1,017	1,063	1,061	1,071	1,033	1,101	1,014
0,7	1,050	1,063	1,094	1,093	1,106	1,063	1,096	1,005
0,9	1,068	1,093	1,120	1,120	1,117	1,089	1,122	1,029
1,0	1,078	1,083	1,107	1,109	1,098	1,089	1,118	1,085

Tabela 4: Média geométrica ponderada dos retornos para diferentes valores de p .

Com isso, temos uma forma de representar a primeira parte do problema: o retorno esperado de um portfólio é a soma dos produtos das frações X_i investidas em cada investimento i ,

$$\text{Retorno}(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot R_i \quad (7)$$

com seu retorno esperado R_i igual à média geométrica ponderada de seus retornos anteriores.

Definimos o risco de uma carteira em função de X como a variância da soma ponderada de variáveis aleatórias, tomando X como o conjunto de pesos e os retornos anteriores de cada investimento i como amostras das variáveis aleatórias

$$\text{Risco}(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i \cdot X_j \cdot \text{Cov}(A_i, A_j) \quad (8)$$

definindo $\text{Cov}(A_i, A_j)$ como a média aritmética ponderada dos produtos dos desvios das amostras em relação ao retorno esperado,

$$\text{Cov}(A_i, A_j) = \mu_p [(A_i - R_i) \cdot (A_j - R_j)] \quad (9)$$

empregando o mesmo valor de p .

Finalmente, podemos escrever a definição do problema de otimização de portfólios por extenso:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & - \sum_{i=1}^n X_i \cdot R_i + w \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i \cdot X_j \cdot \mu_p [(A_i - R_i) \cdot (A_j - R_j)] \\ \text{sujeito a} \quad & X_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_i X_i = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Com dois parâmetros de livre escolha: o fator de desconto p , que determinará a importância de retornos mais antigos, e o peso w , que representa o peso do risco em relação ao retorno estimado. Quanto menor p , menos relevantes são as amostras antigas, e quanto menor w , mais risco pode ser tomado na escolha da carteira.

3 Resultados

O modelo foi implementado e testes foram realizados em ambiente *Python 3.10.12*, com biblioteca *SciPy 1.8.0*. O método de otimização escolhido foi SLSQP, ou Programação

Quadrática Sequencial, e, utilizando fator de desconto $p = 0,9$, foram obtidos resultados similares aos apresentados por Vanderbei (2014). A Tabela 5 apresenta carteiras viáveis para diferentes valores de w .

w	US 3-Month T-Bills	US Gov. Long Bonds	S&P 500	Wilshire 5000	NASDAQ Composite	Lehman Bros. Corp. Bonds	EAFE	Gold	Retorno	Risco
0,0							1,000		1,120	0,052
0,1			0,306	0,274			0,420		1,120	0,023
1,0			0,877				0,123		1,120	0,018
2,0	0,039		0,548			0,323	0,090		1,110	0,010
4,0	0,494		0,258			0,187	0,061		1,090	0,003
8,0	0,714		0,117			0,123	0,046		1,080	0,001
1024,0	0,934				0,015	0,022	0,022	0,007	1,070	0,001

Tabela 5: Valor investido em cada carteira viável, para diferentes valores de w . Campos vazios representam \$0 investido.

4 Conclusão

Diante deste trabalho, podemos concluir que métodos de otimização podem ajudar na tomada de decisões referente a distribuição de recursos em carteiras de investimento. Como apresentado nos estudos de Gunjan e Bhattacharyya (2022), o campo de pesquisa é vasto, e diversas técnicas e algoritmos mais sofisticados se mostram úteis na otimização de portfólios.

Referências

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 77-91, mar. 1952. DOI <https://doi.org/10.2307/2975974>. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2975974>. Acesso em: 15 abr. 2024.

RIBEIRO, Ademir A.; KARAS, Elizabeth W. **Otimização contínua: Aspectos teóricos e computacionais**. Cengage Learning Brasil, 2014. E-book. ISBN 9788522120024. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522120024/>. Acesso em: 19 abr. 2024.

VANDERBEI, Robert J. **Linear Programming: Foundations and Extensions**. 4. ed. [S. l.]: Springer, 2014. 414 p. v. 196. ISBN 0884-8289.

GUNJAN, Abhishek; BHATTACHARYYA, Siddhartha. **A brief review of portfolio optimization techniques**. Artificial Intelligence Review, [S. l.], v. 56, p. 3847-3886, 15 set. 2022. DOI <https://doi.org/10.1007/s10462-022-10273-7>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10462-022-10273-7>. Acesso em: 19 abr. 2024.

Introdução ao desenvolvimento de jogos com a unity game engine

Gabriel Pereira¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
gabrielcarmempereira@gmail.com

Flavio Roberto Dias Silva²

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
frdsilva@yahoo.com.br

Resumo: Este artigo tem o intuito de apresentar de forma introdutória o uso da ferramenta *Unity*, desde sua interface, até as propriedades dos objetos utilizados para a criação de um jogo. Há também neste artigo, um tutorial passo a passo para a criação de um jogo simples, demonstrando a aplicação prática dos conteúdos abordados.

Palavras-chave: *Unity*; motor de jogos; desenvolvimento de jogos.

1. Introdução

A medida com que a tecnologia avança, fica cada vez mais fácil e acessível começar a aprender o desenvolvimento de jogos. Programas como a *Unity*, estão se tornando cada vez mais intuitivos, e assim facilitando a entrada de quem sempre gostou de jogos, porém nunca teve nenhuma experiência como desenvolvedor.

Este artigo apresentará uma visão geral dos principais elementos da *Unity*, uma *game engine* focada na criação de jogos 3D, e discutirá suas características e funcionalidades. A interface da *Unity* será o ponto de partida deste artigo. Depois iremos entender as propriedades dos objetos utilizados para a criação de um jogo e discutir como a *Unity* apresenta-se como uma ferramenta de grande potencial para desenvolvedores de jogos, com um passo a passo da criação de um jogo simples.

2. *Unity*

A *Unity* é uma *game engine* que possibilita a criação de jogos 2D e 3D, tendo suporte a linguagem C# para desenvolver *scripts*. Ela começou a ser comercialmente utilizada em 8 de junho de 2005 na versão 1.0, apenas para o sistema MacOS. Atualmente está fornecendo suporte para Windows, MacOS e Linux (Ubuntu e CentOS), na versão 2023. A *Unity* passou por algumas modificações na numeração de suas versões.

Após a versão 1.0 vieram outras como a 2.0, 3.0, 4.0 e 5.0. Porém, em 2017 a *Unity Technologies* decidiu mudar o modo com que é dado o nome das versões, fazendo com que as versões da *Unity* recebessem o a numeração de acordo com o ano que elas foram lançadas, como 2017, 2018, 2019 e assim sucessivamente até chegar na versão atual, a 2023.2.18f1. Contudo, a *Unity Technologies* já registrou a documentação da próxima versão como sendo a Unity 6.0, o que indica que a numeração de versões voltará a seguir o antigo padrão.

Os pilares fundamentais do desenvolvimento de jogos em *Unity* são as *Scenes* (Cenas), os *GameObjects* (Objetos de jogo) e os *Components* (Componentes). A junção desses elementos é o que dá vida ao jogo. O estudo sobre a *engine unity* teve como base a documentação oficial, que pode ser consultada em (UNITY TECHNOLOGIES, 2023).

A seguir veremos os principais elementos da *engine Unity*, onde nela um jogo é programado com base em três coisas essenciais: as cenas, que contêm os *GameObjects*, e os componentes, que podem ser anexados aos *GameObjects*. Mas para conseguir utilizar a *engine*, é importante saber sobre sua interface, que também será explicada, assim como os principais componentes que podem ser usados na criação de um jogo.

2.1. Visão geral dos principais elementos

2.1.1. *Scenes*

Uma scene (cena) é um espaço tridimensional para inserir, posicionar, rotacionar e reescalar objetos. Cenas são usadas para criar fases, menus dentre outras coisas. Um jogo simples pode ser feito em apenas uma cena, porém algo mais complexo pode ter quantas cenas forem necessárias. Um jogo normalmente é composto por várias cenas, que são carregadas durante a execução do jogo, e descarregadas conforme não são mais utilizadas.

2.1.2. *GameObjects*

O conceito de *GameObject* é muito importante na *Unity*. Todos os objetos presentes em uma cena são *GameObjects*, e eles servem de receptáculo para os componentes.

2.1.3. *Components*

Os components (componentes) são o que dão propósito aos *GameObjects*, pois com eles anexados, o objeto adquire determinadas propriedades que podem ser editadas e definem um comportamento específico. Um *GameObject* recém-criado, terá apenas o componente *Transform*, que será explicado mais a diante.

2.2. Interface

A interface da *game engine Unity* é bastante customizável, dos diferentes painéis que podem ser exibidos na interface, seis se destacam pela importância.

2.2.1. *Scene*

Na janela *scene* é onde se constrói o jogo, lá pode ser visualizado como está ficando a cena que estiver aberta, assim como pode ser modificada esta cena, como foi dito anteriormente.

2.2.2. *Hierarchy*

Na aba *hierarchy* estarão listados todos os *GameObjects* que estão presentes na cena, sendo possível criá-los e modificá-los.

2.2.3. *Game*

Ao apertar no botão “*Play*” no topo da tela, a *Unity* carregará a cena que estiver aberta, no modo jogo. Na janela *game* será possível jogar e verificar como o jogo está ficando, na visão do jogador.

2.2.4. *Project*

Na janela *Project* são mostrados os arquivos do seu projeto, e novos arquivos devem ser adicionados lá para serem utilizados. Os arquivos mostrados na janela *Project*, são arquivos do computador na qual a *Unity* está instalada, referentes ao projeto que estiver aberto. Dentre os arquivos poderão ter cenas, modelos 3D, scripts, animações, imagens, sons etc.

2.2.5. *Console*

Em *console*, aparecem notificações de avisos ou erros sobre algo do projeto, sendo muito importante para identificar algo que não está funcionando, ou que pode gerar algum problema.

2.2.6. *Inspector*

Ao selecionar algum *GameObject*, será possível visualizar na aba *inspector* quais componentes estão anexados ao objeto, adicionar novos ou modificar seus parâmetros.

2.3. Principais componentes

Como visto anteriormente, componentes são peças fundamentais na Unity. Dentre todos os componentes existentes, alguns se destacam por serem muito usados, como:

2.3.1. *Transform*

Transform é o único componente que já vem atrelado a um *GameObject*, ele guarda a posição, rotação, escala e estado parental de um objeto. Não é possível ter um *GameObject* sem um componente *Transform*. A posição, rotação e escala são guardadas em variáveis x, y e z, sendo a posição guardada em coordenadas do espaço tridimensional, a rotação é medida em graus, e a escala vem como padrão em 1, para um objeto no seu tamanho normal, caso queira dobrar o objeto de tamanho, é possível fazer isto apenas mudando as variáveis x, y e z para 2. E por último, o estado parental guarda informações sobre o componente *Transform* do objeto pai, caso ele exista, se não existir, as medidas serão calculadas de acordo com o espaço mundial. Logo, se um objeto que seja pai de outro mudar de posição, seu filho o acompanhará, o mesmo acontece em relação a rotação e escala. Para tornar um objeto filho de outro, basta selecionar o objeto filho na janela *hierarchy*, e arrastá-lo para o objeto pai.

2.3.2. *Rigidbody*

É um componente que permite que o *GameObject* aja sobre o controle da física, podendo receber forças para que o objeto se mova de forma realista. Um *GameObject* deve conter um *Rigidbody* para ser influenciado pela gravidade, ou por forças adicionais. Dentro do componente *Rigidbody* na janela *Inspector*, é possível ver e alterar algumas propriedades, como massa, arrasto angular, usar gravidade, congelar rotação e posição, entre vários outros.

2.3.3. *Collider*

Collider (colisores) são componentes que a *Unity* usa para lidar com a colisão entre objetos. Eles definem a forma de um objeto para fins de colisão física. Colisores são invisíveis, e um objeto não precisa ter a forma exata de um colisor, um cubo pode ter um colisor em formato esférico, porém fisicamente o cubo teria a capacidade de rolar, o que seria um comportamento atípico. Nem sempre objetos precisam de um colisor do exato formato do objeto. Por exemplo, se um jogo se passa em uma floresta com centenas de árvores, seria muito custoso computacionalmente cada árvore ter um colisor no exato formato dela, incluindo o tronco e centenas de folhas. Nesses casos pode ser usado um colisor primitivo (que são os colisores mais simples) em formato de capsula, no tronco da árvore, assim o jogador não atravessa o tronco e nem perceberá que a colisão está sendo feita de um modo mais simples.

2.3.4. *Character Controller*

Character Controller é usado para o controle de jogadores em terceira ou primeira pessoa, e não faz o uso da física do *Rigidbody*. É simplesmente um colisor em forma de cápsula que pode se movimentar em alguma direção, a partir de um *script*.

2.3.5. *Camera*

As câmeras permitem que o jogador consiga ver o jogo, pois elas capturam o mundo da cena e exibem na tela. Uma cena pode ter infinitas câmeras, sendo possível alternar entre elas, mover de posição, ou simplesmente ser acopladas ao personagem do jogador, para que ele veja o que está fazendo.

2.3.6. *Scripts*

Scripts são componentes totalmente personalizáveis. Após criar um *script* anexado a um *GameObject*, pode-se abri-lo e programar qualquer comportamento que desejar, na linguagem C#. Por exemplo, um personagem pode ter um *script* chamado “atirar”, e dentro desse *script* é escrito que ao ser pressionado o botão esquerdo do mouse, uma esfera será instanciada a partir do personagem, e será gerada sobre ela uma força, fazendo com que a esfera seja disparada para onde o personagem está direcionado.

2.3.7. *Light*

Clicando com o botão direito na janela *Hierarchy*, e clicando em “*Light*”, pode-se criar vários tipos de luzes, que são *GameObjects* com o componente *Light*. Uma delas é a *Directional Light*, que simula a luz do sol ou uma fonte de luz distante. A posição deste objeto não importa, apenas a direção da luz, por isso todos os objetos são iluminados de maneira igual na cena.

2.3.8. *Audio Source*

O *Audio Source* permite que um objeto emita sons, músicas ou qualquer tipo de áudio. É importante lembrar, que para isto funcionar, é necessário ter um outro componente chamado *Audio Listener* dentro de algum objeto na cena, pois sem ele, não será possível escutar nenhum som.

2.3.9. *Animator*

Animator é o componente responsável por atribuir animações a um *GameObject*, como fazer um personagem andar e pular. Para funcionar, o *Animator* precisa de um *Animator Controller*, que define qual clipe de animação deve ser usado, em cada momento específico.

2.3.10. *Particle System*

O *Particle System* (Sistema de Partículas) permite criar efeitos, simulando o comportamento de entidades fluidas como líquidos, nuvens e chamas. São basicamente geradas e animadas várias imagens 2D que formam as partículas.

3. Criando um jogo

Para criar um jogo simples, utilizando os conceitos abordados, primeiro é necessário instalar a *Unity*. O programa *Unity hub* pode ser baixado acessando a página da web <https://unity.com/pt/download>, ele serve para gerenciar os projetos criados na *Unity*.

Abrindo o *Unity Hub*, haverá uma janela chamada “*Installs*”, nela é possível instalar alguma versão do editor *Unity*. Com uma versão instalada, indo na janela “*Projects*”, terá um botão escrito “*New Project*”, que ao clicar nele pode-se escolher algum *template* de jogo, ou seja uma base de jogo. Escolhendo a base 3D, e a versão do Editor, o usuário pode criar o projeto clicando no botão “*Create Project*”.

Após criado, o projeto começara a carregar. Quando carregado, seguiremos os seguintes passos:

- Vá a janela “*Hierarchy*”.
- Clique com o botão direito em um espaço vazio.
- Selecione “*3D Object*”.
- Clique em “*Cube*”.
- Renomeie ele para “chão”.

Seguindo estes passos, haverá um cubo na cena, ele será o chão, porém precisa ser maior. Para fazer isto:

- Clique no *GameObject Cube* em *Hierarchy*.
- Vá até a janela *Inspector*, e encontre o componente *Transform*.
- Em “*Scale*”, modifique as variáveis x e z para o valor 50.

Isto redimensionará o cubo, que agora terá 50 unidades de largura e de comprimento. Com o chão pronto, é preciso ter um personagem controlável. Para isso será criado um *script*, da seguinte maneira:

- Na janela *Project*, abra a pasta “*Assets*”.
- Na pasta, clique com o botão direito e selecione “*Create*”.
- Escolha “*C# script*”.

Este arquivo será responsável pelo comportamento do personagem. Com um duplo clique no arquivo, ele será aberto em alguma ferramenta de edição de código. O software *Visual Studio* é recomendado. Com o *script* aberto, percebe-se que já há

conteúdo escrito nele. Há uma classe pública, com o mesmo nome do arquivo, e dentro desta classe existem dois métodos, *Start* e *Update*.

O método *Start* é chamado pela *Unity* antes do início do jogo, ou seja, antes da função *Update* ser chamada pela primeira vez. É ideal para colocar funções que só precisam ser chamadas uma vez durante a execução do jogo.

Já o método *Update* será o local para colocar funções que podem ser chamadas a qualquer momento do jogo, ou que precisam ser executadas a todo momento.

Escrevendo um simples *script* de movimentação:

```
1  using System.Collections;
2  using System.Collections.Generic;
3  using UnityEngine;
4
5  public class NewBehaviourScript : MonoBehaviour
6  {
7      public float speed = 5f;
8      public float ySpeed = -9.8f;
9      CharacterController cc;
10
11     // Start is called before the first frame update
12     void Start()
13     {
14         cc = GetComponent<CharacterController>();
15     }
16
17     // Update is called once per frame
18     void Update()
19     {
20         float horizontal = Input.GetAxis("Horizontal");
21         float vertical = Input.GetAxis("Vertical");
22
23         Vector3 direction = new Vector3(horizontal, ySpeed, vertical);
24
25         cc.Move(direction * speed * Time.deltaTime);
26     }
27 }
```

Figura 1: Script de Movimentação

Fonte: Produção própria

Agora, é preciso um *GameObject* para anexarmos o *Script*, será a “*Main Camera*”. Clicando nela na janela *Hierarchy*, as informações sobre os componentes dela aparecerão na janela *Inspector*, lá é possível clicar em “*Add Component*”, pesquisar pelo nome do *script* criado (que caso não tenha sido alterado, terá o nome de “*NewBehaviourScript.cs*”), dar um duplo clique nele, e assim ele estará anexado a câmera. Com o *script*, só é preciso de um *Character Controller*, que pode ser anexado do mesmo modo, apenas pesquisado por “*Character Controller*”. Para garan-

tir que o “personagem” não caia diretamente do chão criado anteriormente, é interessante colocar a posição da *Main Camera* em 0 para x e z, e em 1 para y. Por fim será salvo o projeto com o atalho Ctrl + s, e apertado o botão de “Play” no topo da tela. Agora é possível testar a movimentação do personagem pelo chão, com as teclas w, a, s d, porém como não há paredes, ele pode cair da plataforma.

O jogo está muito simples, iremos incrementar um sistema de disparos para poder acertar algo. Primeiramente, vamos fazer alguns alvos. Primeiro será criado um material, para dar cor aos objetos, seguindo os seguintes passos:

- Clique em *Project*.
- Na pasta *Assets*, Clique com o botão direito.
- Clique em *Create*.
- Escolha *Material*.
- Renomeie o *Material* como “alvo”.
- Clique no material.
- Na janela *inspector*, há uma barra branca, indicando a cor do *Material*, clique nela.
- Escolha a cor vermelha.

Com a cor pronta, agora é preciso do alvo em si, para fazer isso, crie um cubo, e com ele selecionado arraste o material na janela *Inspector*, assim o cubo se tornará vermelho. Além disso, adicione o componente *Rigidbody* ao cubo, para ele poder ser influenciado pela gravidade. Duplique o cubo quantas vezes quiser, clicando nele e apertando o atalho Ctrl + d. Agora temos vários cubos ocupando o mesmo espaço, para arrumar isto, clique em um cubo pela janela *Hierarchy*, pressione a tecla w, assim o cubo selecionado poderá ser arrastado pelo *gizmo*, que é representado por três setas, “puxe”, a seta verde para cima, para empilhar os cubos. Faça isto com todos os cubos criados, até obter uma pilha de cubos. Se a pilha não estiver posicionada em cima do chão, crie um *GameObject* selecionando *Create empty* em *Hierarchy*, renomeie ele como “alvos”, ele será o objeto pai de todos os cubos. Selecione todos os cubos na janela *Hierarchy* segurando a tecla Ctrl e clicando em um por um, e arraste para dentro do *GameObject* alvos. Agora é possível mover todos os cubos ao mesmo tempo, selecionando o objeto “alvos”, apertando w, e movendo ele com as setas.

O jogo agora tem alvos para serem derrubados, porém faltam algo para ser atirado neles. Crie uma esfera e coloque o *Material* criado anexado a ela, assim como o componente *Rigidbody*. Agora arraste o *GameObject* dela para a janela *Project*, dentro da pasta *Assets*. Assim é criado um *Prefab*. *Prefabs* são objetos pré-fabrica-

dos que podem ser usados para serem instanciados mais tarde. Delete a esfera que está na cena, ela não é mais necessária.

O próximo passo é criar um *script* para atirar as esferas. Crie um *script*, renomeie ele como “atirar.cs”, e anexe ele ao objeto *Main Camera*. Abra o *script* e escreva o código:

```
1 using System.Collections;
2 using System.Collections.Generic;
3 using UnityEngine;
4
5 public class atirar : MonoBehaviour
6 {
7     public Transform bala;
8     float distance = 1.0f;
9
10    // Start is called before the first frame update
11    void Start()
12    {
13    }
14
15    // Update is called once per frame
16    void Update()
17    {
18
19        if(Input.GetKeyDown(KeyCode.Space)){
20            Vector3 spawnPosition = transform.position + transform.forward * distance;
21            Instantiate(bala, spawnPosition, Quaternion.identity);
22        }
23
24    }
25
26 }
```

Figura 2: Script de instanciação

Fonte: Produção própria

Após escrever, vá no componente atirar.cs e arraste o *Prefab* da esfera para o campo “bala”. Feito isso, falta que a esfera se mova quando ela for instanciada, é preciso gerar uma força que empurre ela para frente. Para fazer isto, crie um *script* chamado “bala.cs” e digite o seguinte código:

```
1  using System.Collections;
2  using System.Collections.Generic;
3  using UnityEngine;
4
5  public class bala : MonoBehaviour
6  {
7      public float speed = 20f;
8
9      // Start is called before the first frame update
10     void Start()
11     {
12         Rigidbody rb = GetComponent<Rigidbody>();
13         rb.AddForce(transform.forward * speed, ForceMode.Impulse);
14     }
15
16     // Update is called once per frame
17     void Update()
18     {
19     }
20 }
21
```

Figura 3: Script de disparo

Fonte: Produção própria

Com o código salvo, arraste o *script* para dentro do *Prefab* da esfera, que foi criado anteriormente, assim o comportamento da esfera será influenciado pelo *script*.

Por fim, posicione o “personagem” (*Main Camera*) na frente da pilha de blocos, salve o projeto e aperte em “*Play*”. Agora é possível controlar o personagem com as teclas w, a, s, d, além de atirar esferas pressionando a tecla espaço. Mire com a movimentação do personagem e tente derrubar a pilha de blocos.

Estes conceitos básicos abordados na criação deste jogo extremamente simples, formam a base para se desenvolver jogos muito mais complexos na *engine Unity*, que é uma ferramenta poderosa e flexível para criar jogos dos menores e rápidos, aos mais longos, com recursos mais avançados, cheios de conteúdo, com gráficos realistas, física mais complexa e até mesmo utilizar Inteligências Artificiais. A ideia deste protótipo de jogo foi inspirada pelo livro (GOLDSTONE, 2009).

Conclusões

A *Unity* é uma ferramenta poderosa para a criação de jogos, pois é fácil aprender o básico, o que ajuda muito iniciantes na área de programação de jogos, mas suas funções podem ir muito além, dependendo da necessidade do desenvolvedor. Por-

tanto, a *Unity* é uma boa escolha para aqueles que querem ingressar no desenvolvimento de jogos, devido a sua simplicidade e poder gráfico.

Referências

GOLDSTONE, Will. **Unity 3.x Game Development Essentials**: Game development with C# and Javascript. Birmingham: Packt Publishing Ltd, 2009.

UNITY USER MANUAL 2022.3 (LTS). **Unity Documentation**, 2023. Disponível em:

<https://docs.unity3d.com/Manual/index.html>. Acesso em: 5 de abril de 2023.

Fenômenos aleatórios discretos e alguns modelos probabilísticos

Alexsandro A. A. de Freitas
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
alexsandro.freitas@unioeste.br

Alessandra dos Santos
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
alessandra.santos23@unioeste.br

Resumo: Este artigo apresenta uma revisão bibliográfica de modelos discretos de distribuição de probabilidade, dentre eles: Bernoulli, Binomial, Poisson e Skellam. Cada modelo é detalhado por meio de exemplos e são discutidas propriedades fundamentais, como esperança e variância, destacando algumas de suas aplicações práticas. Além disso, são fornecidas implementações em R para facilitar a compreensão e aplicação dos modelos.

Palavras-chave: Estatística; Esperança; Probabilidade.

1 Introdução

De acordo com Viali (2020), a noção de probabilidade emerge dos antigos jogos de dados, como o Tali ou o “jogo do osso”, praticados com astrálagos - artefatos que precedem os dados modernos, feitos de ossos de animais e possuíam quatro faces distintas. Por meio destes artefatos, apostas e tentativas de prever o futuro eram feitas.

Hoje em dia, a teoria das probabilidades é uma ferramenta fundamental em diversas áreas do conhecimento, desde a física e a estatística até a economia e a biologia. Segundo Teixeira e Morgado (2011) ela proporciona um arcabouço matemático para entender e quantificar a incerteza em eventos aleatórios. Adicionalmente, ela é a base de importantes métodos de inferência estatística (TRIOLA, 2011).

Dentro desse vasto campo, as distribuições de probabilidade desempenham um papel crucial, fornecendo modelos matemáticos que descrevem o comportamento de variáveis aleatórias em estudo. Ferreira (2009) lembra que conhecer os modelos e seus aspectos, intrínsecos e extrínsecos, permite ao investigador científico ter uma visão clara da forma como usá-los adequadamente; além disso, ajuda no processo de escolha do modelo mais adequado para se estudar um fenômeno e qual se aproxima mais da situação real de investigação.

Uma distribuição pouco conhecida, porém extremamente útil em diversos contextos, é a distribuição de Skellam. Segundo Santos (2019), ela é utilizada em situações que envolvem a diferença entre contagens de eventos independentes.

Neste trabalho, faremos uma investigação sobre modelos de distribuição de probabilidade discretos, como Bernoulli, Binomial, Poisson e Skellam, explorando seu embasamento teórico, suas aplicações e seus papéis na análise de eventos discrepantes.

Por fim, apresentaremos implementações computacionais em linguagem R para cada distribuição de probabilidade apresentada, com o intuito de fornecer uma compreensão mais prática e aplicada das distribuições de probabilidade discutidas.

2 Materiais e métodos

Os materiais utilizados durante o estudo foram materiais bibliográficos relacionados com o trabalho em questão.

Como metodologia, foram construídos exemplos didáticos assumindo eventos independentes com probabilidade de sucesso (p) igual a 20%; realização de até 10 eventos (n); médias iguais a 2 e 1 ($\lambda = \lambda_1$ e λ_2 , respectivamente).

Os cálculos e gráficos das probabilidades foram desenvolvidos no software R (R Core Team, 2023) e a programação é apresentada no texto.

3 Discussão - Modelos discretos de probabilidade

A probabilidade é um ramo da matemática dedicado ao estudo de eventos imprevisíveis ou aleatórios (LIPSCHUTZ, 1993). Por exemplo, ao lançar uma moeda em uma competição, é certo que ela cairá, mas não se pode garantir com precisão qual face estará voltada para cima. Assim, os resultados do fenômeno podem ser representados por uma variável aleatória, aqui denominada de X . Logo, se assumirmos que X é o resultado ao lançar uma moeda. Então, $X = \text{cara}$ ou $X = \text{coroa}$.

De acordo com Faretto (2022), os modelos probabilísticos simplificam a representação dos dados ao mesmo tempo em que revelam suas propriedades essenciais. Ao analisar a distribuição de probabilidade associada a uma variável aleatória, é possível obter informações sobre suas características centrais e sua dispersão, como a média e a variância. Dessa forma, é viável alcançar uma compreensão mais aprofundada da variável de interesse e de todo o processo em questão.

Nos modelos discretos de probabilidade, a variável em estudo é uma variável aleatória discreta. Essa tem um número finito de valores (resultados possíveis) ou uma quantidade enumerável. Sua média é entendida como um valor esperado no modelo e é calculado como: $E(X) = \sum_x x.P(X = x)$, dado que x são os possíveis resultados apresentados pelo fenômeno e $P(X = x)$ é a probabilidade. Já a variância é calculada como: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$, sendo $E(X^2) = \sum_x x^2.P(X = x)$ (TRIOLA, 2011).

A seguir são apresentados alguns modelos discretos.

3.1 Distribuição de Bernoulli

Segundo Maciel (2023), experimentos que admitem apenas desfechos, sucesso e falha, e são conhecidos como Arranjo de Bernoulli. O sucesso é o que se procura identificar, por exemplo, ao observar se há defeitos em itens. Se um item selecionado aleatoriamente apresenta defeito, isso seria considerado um resultado de “sucesso” (embora não indique algo necessariamente positivo). Outros exemplos podem ser se uma venda ocorre ou não; se um cliente é solvente ou inadimplente; se a cura para uma determinada doença será obtida.

Por convenção, o resultado de não interesse, falha, é indicado com $X = 0$. Já nos resultados de sucesso tem-se $X = 1$. Logo, por definição, tem-se que a função de probabilidade da distribuição de Bernoulli é dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{para } X = 1 \text{ (sucesso)} \\ q = 1 - p & \text{para } X = 0 \text{ (fracasso)} \end{cases}$$

em que p corresponde a probabilidade de sucesso e q é a probabilidade de fracasso. Esse modelo também pode ser escrito como:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \text{ tal que } x = \{0, 1\}.$$

A Figura 1 ilustra a distribuição dado que $p = 0,2$. Note que a probabilidade do fracasso é maior ($q = 0,8 = 80\%$).

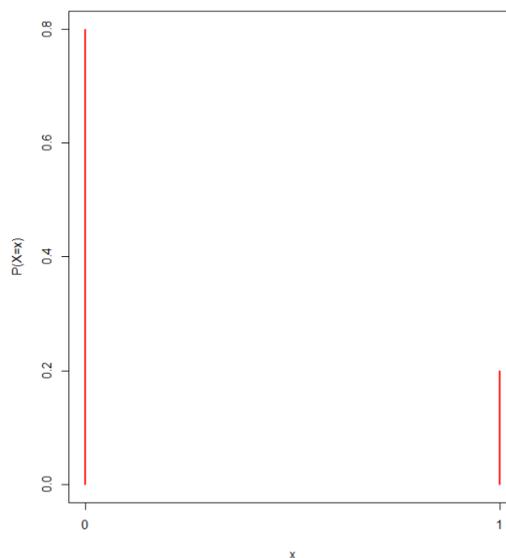


Figura 1: Distribuição de Bernoulli assumindo $p=20\%$.

Na distribuição de Bernoulli, a variável X pode ser representada como $X \sim Ber(p)$, sendo que a média é $E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) = P(X = 1) = p$ e a variância é $Var(X) = p - p^2 = p.q$.

3.2 Distribuição Binomial

Segundo Silva (2023), a distribuição binomial representa a probabilidade do número de sucessos resultantes de uma quantidade específica de tentativas, sendo caracterizada por ter um espaço amostral finito. Cada tentativa tem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) e os eventos são independentes. Assim, esse modelo também pode ser apresentado como n eventos de Bernoulli.

Por exemplo: em cinco clientes atendidos, quatro efetuarem a compra; em 1.000 peças fabricadas o resultado da situação da produção (defeito ou não das peças); número de caras obtidas ao lançar uma moeda honesta 3 vezes.

Em casos com menor número de situações (eventos de Bernoulli), é viável apresentar os resultados por meio da árvore de possibilidades. Assim, se o interesse for analisar o número de caras obtidas em três lançamentos de uma moeda não viciada (X). Então, note pela Figura 2 que $x = 0, 1, 2, 3$. Logo, assumindo que os eventos são independentes e a moeda é não viciada, tem-se que $P(\text{Cara}) = P(\text{Coroa}) = 1/2$. Portanto: $P(\text{Cara, Cara, Coroa}) = P(\text{Cara, Coroa, Cara}) = P(\text{Coroa, Cara, Cara}) = P(\text{Coroa}) \cdot P(\text{Cara}) \cdot P(\text{Cara}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^3$. Consequentemente, $P(X = 2) = P([\text{Cara, Cara, Coroa}] \text{ ou } [\text{Cara, Coroa, Cara}] \text{ ou } [\text{Coroa, Cara, Cara}]) = P(\text{Cara, Cara, Coroa}) + P(\text{Cara, Coroa, Cara}) + P(\text{Coroa, Cara, Cara}) = 3 \cdot P(\text{Coroa}) \cdot P(\text{Cara})^2 = 3 \cdot (\frac{1}{2})^3$

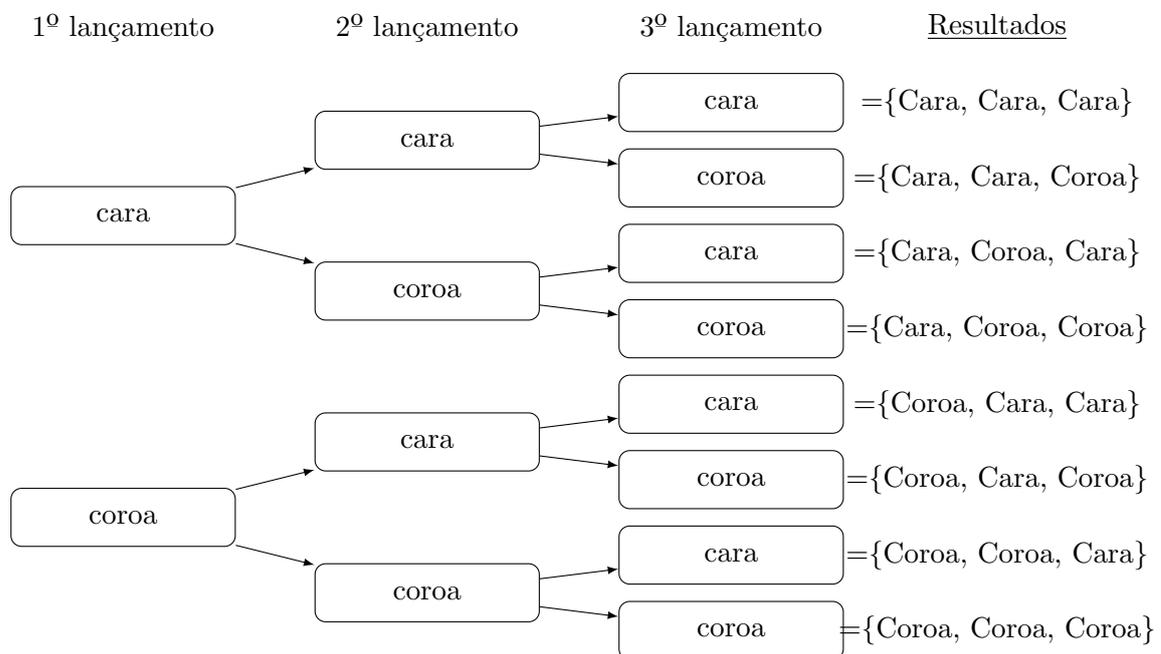


Figura 2: Fluxograma apresentando a árvore de possibilidades ao lançar três vezes uma moeda.

Neste caso, o modelo probabilístico é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Distribuição de probabilidade do evento $X =$ quantidade de caras obtidas no lançamento de três moedas não viciadas.

X	$P(X = x)$
0	$[P(\text{Coroa})]^3 = (\frac{1}{2})^3$
1	$3 \cdot [P(\text{Coroa})]^2 \cdot P(\text{Cara}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^3$
2	$3 \cdot P(\text{Coroa}) \cdot [P(\text{Cara})]^2 = 3 \cdot (\frac{1}{2})^3$
3	$[P(\text{Cara})]^3 = (\frac{1}{2})^3$

Generalizando, a função de probabilidade da distribuição binomial é definida como:

$$P(X = x) = C_p^n \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

em que p é a probabilidade de sucesso, q é a probabilidade de fracasso, n é o número de tentativas e x é a quantidade de sucessos observada nas n tentativas, ou seja, $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Logo, se realizarmos 10 vezes um experimento independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso igual a 20%, obteremos os resultados apresentados na Figura 3. Note que o resultado que tem maior probabilidade de ocorrer é o $X = 2$, mas todos os valores de 0 a 10 apresentam algum resultado, mesmo que próximo a 0 ($P(X = 10) = 0, 2^{10}$).

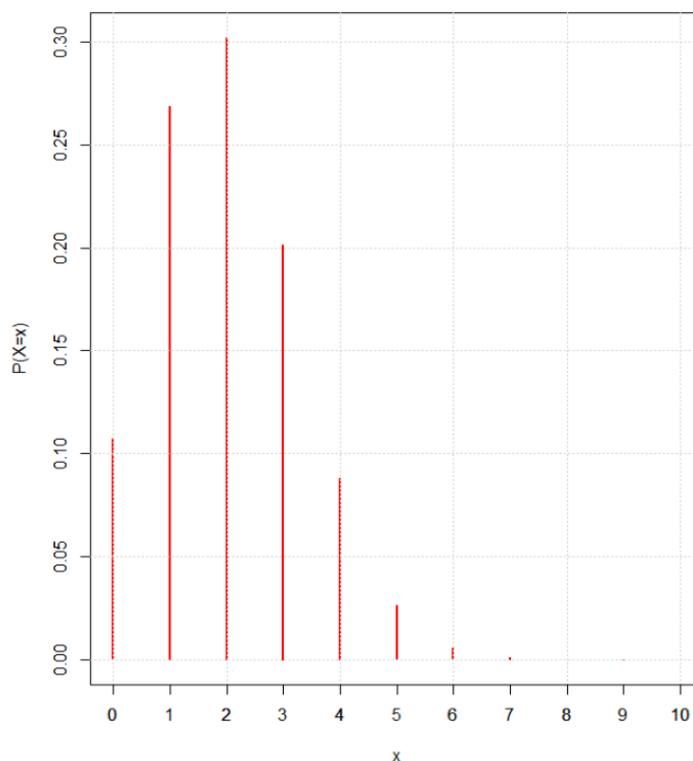


Figura 3: Distribuição Binomial para $p=20\%$.

Para uma distribuição binomial genérica, temos que o valor esperado $E(X) = n \cdot p$. Já a variância será $n \cdot p \cdot q$. Logo, no caso apresentado na Figura 3, $E(X) = 10 \cdot 0,2 = 2$ e $Var(X) =$

10.0, 2.0, 8 = 1, 6.

Uma implementação no R para gerar o gráfico da distribuição binomial é:

```
1 # Definir o número de ensaios
2 n <- 10
3
4 # Definir a probabilidade de sucesso
5 p <- 0.2
6
7 # Calcular as probabilidades para diferentes valores de x
8 x <- 0:n
9 probabilidades <- dbinom(x, size = n, prob = p)
10
11 # Plotar o gráfico da distribuição binomial
12 plot(x, probabilidades, type = "h", lwd = 2, col = "red", xlab = "x",
13       ylab = "P(X=x)")
14
15 # Adicionar linhas de grade para facilitar a visualização
16 grid()
17
18 # Adicionar números de x no eixo x
19 axis(1, at = x, labels = x)
```

3.3 Distribuição de Poisson

Conforme destacado por Crespo (2002), a distribuição de Poisson modela eventos aleatórios que ocorrem a uma taxa média conhecida; porém de maneira independente. Esta mostra-se particularmente útil em situações nas quais há interesse em contabilizar o número de eventos que ocorrem dentro de um intervalo específico de tempo ou espaço. Conforme destacado por Silva (2023), essa distribuição tem aplicações em contextos diversos, como concentração de bactérias em uma placa de petri, número de brotos por explante, número de plantas de uma determinada espécie por área, entre outros.

O parâmetro crucial é representado por λ , que expressa a taxa média de ocorrência dos elementos em consideração. A distribuição oferece a probabilidade de se observar exatamente x elementos, tal que $x \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, informa sobre a probabilidade de ocorrerem precisamente x elementos quando a expectativa média é de λ elementos.

A função de probabilidade da distribuição de Poisson é dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{para } x \geq 0 \text{ tal que } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

em que λ corresponde a taxa média de ocorrência do sucesso.

Assumindo que, em um banco, entram em média dois clientes a cada minuto. Logo, considera-se $\lambda = 2$ clientes/ minuto (mesma média do modelo binomial). Note, na Figura 4, que

a chance de aparecerem mais que 2 clientes por minuto diminui, ao ponto de que $P(X = 10)$ seja raro, mas pode ocorrer; assim como valores ainda maiores que 10. Logo, neste caso, os resultados mais esperados são entre 1 e 2 clientes por minuto. Conseqüentemente, a empresa pode se organizar melhor quanto ao número de profissionais para atender a demanda dos clientes.

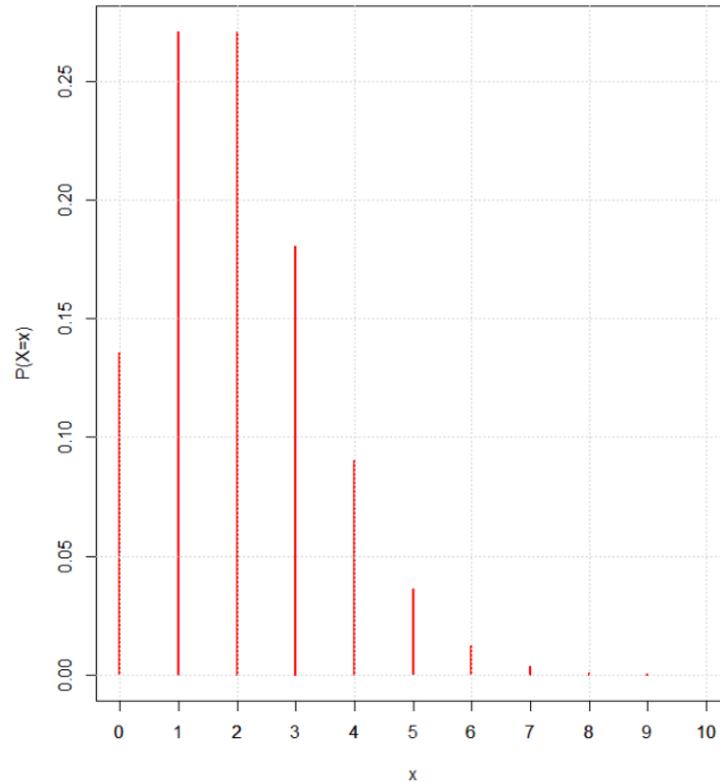


Figura 4: Distribuição de Poisson para $\lambda = 2$.

Como características desta distribuição, tem-se que o valor esperado e a variância são iguais a λ . Uma implementação no R para a distribuição de Poisson:

```
1 # Definir o número de ensaios
2 n <- 10
3
4 # Definir lambda
5 lambda <- 2
6
7 # Calcular as probabilidades para diferentes valores de x
8 x <- 0:n
9 probabilidades <- dpois(x, lambda)
10
11 # Plotar o gráfico da distribuição de Poisson
12 plot(x, probabilidades, type = "h", lwd = 2, col = "red", xlab = "x",
13       ylab = "P(X=x)")
14 # Adicionar linhas de grade para facilitar a visualização
15 grid()
16
```

```
17 # Adicionar números de x no eixo x
18 axis(1, at = x, labels = x)
```

Distribuição de Skellam

A Lei de Skellam descreve a distribuição de probabilidade discreta que reflete a diferença entre duas variáveis aleatórias independentes, representadas por X_1 e X_2 , cada uma seguindo uma distribuição de Poisson com parâmetros λ_1 e λ_2 , respectivamente (SKELLAM, 1946). Essa função desempenha um papel crucial na compreensão e modelagem de situações em que a diferença entre duas contagens aleatórias é de interesse ($D = X_1 - X_2$). Exemplos: diferença entre o número de vendas de duas lojas que vendem os mesmos produtos; a chance de um time de futebol ganhar uma partida - diferença do número de gols entre os dois times; entre outros.

Assim, como a lei de Skellam correlaciona duas leis de Poisson, temos:

$$f(d; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(d+x; \lambda_1) f(x; \lambda_2) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x=\max(0,-d)}^{\infty} \frac{\lambda_1^{d+x} \lambda_2^x}{x!(d+x)!} \quad (1)$$

Conforme mencionado, a distribuição de Poisson se aplica a eventos que envolvem a contagem de ocorrências inteiras e positivas. Portanto, ao lidarmos com somas que incluem fatoriais de termos negativos, consideramos esses termos como tendo um valor de zero, conforme ilustrado no somatório da Equação 1, logo:

$$\frac{f(d; \lambda_1, \lambda_2)}{f(-d; \lambda_1, \lambda_2)} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^d$$

De onde,

$$f(d; \lambda_1, \lambda_2) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{d}{2}} I_{|d|}(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$$

onde $I_{|d|}$ é a função de Bessel modificada de ordem $|d|$.

Considerando $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, a Figura 5 apresenta os resultados probabilísticos assumindo $D = X_1 - X_2$. Note que a maior probabilidade ocorre em $D = 1$, isso se deve porque em média é esperado que aconteça 2 em X_1 e 1 em X_2 .

Conforme descrito por Hwang (2007), para a distribuição Skellam, a média e a variância são calculadas em termos dos parâmetros das distribuições de Poisson que estão sendo comparados. Ou seja, A média da distribuição Skellam é dada pela diferença entre os parâmetros das distribuições de Poisson ($\lambda_1 - \lambda_2$). Já variância σ^2 da distribuição Skellam é dada pela soma dos parâmetros das distribuições de Poisson ($\lambda_1 + \lambda_2$).

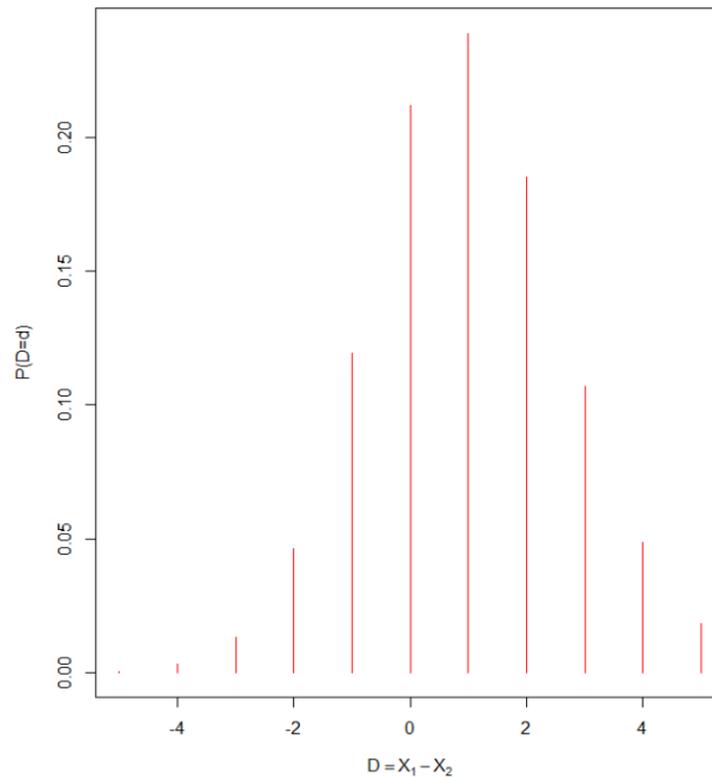


Figura 5: Distribuição de Skellam para $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$.

Uma implementação no R para a distribuição de Skellam:

```
1 # Instale o pacote VGAM se ainda não estiver instalado
2 # install.packages("VGAM")
3
4 # Carregue o pacote VGAM
5 library(VGAM)
6
7 # Parametros da distribuição de Skellam
8 mu1 <- 2
9 mu2 <- 1
10 d_values <- -5:5
11
12 # Calcula a probabilidade para cada valor de d
13 skellam_prob <- dskellam(d_values, mu1, mu2)
14
15 # Cria o gráfico
16 plot(d_values, skellam_prob, type = "h",
17       xlab = expression(D == X[1]-X[2]), ylab = "P(D=d)", col = "red")
18
19 # Adiciona os pontos
20 points(d_values, skellam_prob, pch = 16, col = "red")
21
22 # Adiciona rótulos
23 text(d_values, skellam_prob, labels = round(skellam_prob, 3), pos = 3,
```

```
col = "red")
```

4 Considerações finais

A revisão bibliográfica realizada neste artigo destaca a teoria e algumas aplicações de alguns modelos de distribuição de probabilidade discretos. É evidente que cada modelo possui suas próprias propriedades distintivas, desde a simplicidade do modelo Bernoulli até a flexibilidade do modelo Skellam em lidar com dados de contagem correlacionados. A compreensão dessas propriedades, juntamente com a esperança e a variância, é fundamental para uma aplicação eficaz desses modelos em análises estatísticas.

As implementações em R, fornecidas neste artigo, permitem que o leitor aplique esses modelos em seus próprios conjuntos de dados. No entanto, é importante lembrar que a interpretação dos resultados também requer um entendimento sólido do contexto específico do problema em questão.

Espera-se que este trabalho seja útil e proporcione uma boa compreensão sobre análise de dados e estatística, fornecendo suporte para o entendimento e uso dos modelos de distribuição de probabilidade discretos.

Referências

- CRESPO, Antônio Arnot. **Estatística Fácil**. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2002.
- FERREIRA, D. Furtado. **Estatística Básica**. 2^a. ed. Lavras: UFLA, 2009.
- HWANG, Youngbae. 2007, Takamatsu. Color edge detection using the Skellam distribution as a sensor noise model. Takamatsu: Ieee, 2007. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4421310>. Acesso em: 11 abr. 2024.
- LIPSCHUTZ, Seymour. **Probabilidade**. 4. ed. São Paulo: Makron Books, 1993. 261 p.
- MACIEL, Fernanda. **Distribuição de Bernoulli**. Disponível em: <https://blog.prof.fernandamaciel.com.br/distribuicao-de-bernoulli/>. Acesso em: 05 abr. 2024.
- R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2023. disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 10 set. 2023.
- SKELLAM, J. G. The Frequency Distribution of the Difference Between Two Poisson Variates Belonging to Different Populations. **Journal Of The Royal Statistical Society**, [S.L.], v. 109, n. 3, p. 296, 1946. JSTOR. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2981372>. Acesso em: 03 out. 2023.
- SILVA, Anderson Rodrigo da. Distribuições de Probabilidade. In: SILVA, Anderson Rodrigo da. Estatística decodificada. São Paulo: Blucher, 2023. p. 38-42.

TEIXEIRA, Ralph Costa; MORGADO, Augusto César. O que é probabilidade? In: TEIXEIRA, Ralph Costa; MORGADO, Augusto César. Introdução à Teoria da Probabilidade. Niteroi: Uff, 2011. p. 3. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/ralphteixeira/wp-content/uploads/sites/129/2017/09/probbook.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2024.

TRIOLA, Mario F. Introdução à estatística. 2011. 10^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 696 p.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria das probabilidades. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 16, p. 143-153, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2008v8n16143-153. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177>. Acesso em: 6 set. 2023.

Integral Riemann e Integral Cauchy no ensino de análise

Pedro Pablo Durand Lazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
ppdurandlazo@gmail.com

Resumo: Neste artigo serão expostos alguns resultados do estudo das diversas posições com respeito ao tema de integração na perspectiva de sua apresentação na disciplina de Análise nos cursos de graduação. Se relata os resultados do estudo de algumas das recentes apresentações da integral em diversos textos de Análise, tanto no âmbito local quanto no exterior. Se discute a possibilidade e a oportunidade de substituir a Integral de Riemann pela integral de Cauchy. Se argumenta acerca da alternativa mais conveniente do ponto de vista conceitual e metodológico para desenvolver o tema e, em correspondência a isto, se elabora a proposta de um roteiro e um mapa conceitual que organize de forma lógica os quesitos e o conteúdo do tema na alternativa escolhida.

Palavras-chave: integral Cauchy; integral Riemann; funções reguladas.

Introdução

Nesse trabalho estudamos as diversas posições respeito ao tema de integração na perspectiva de sua apresentação na disciplina de Análise nos cursos de graduação. Na Seção 1, sob o título de *Fundamentação*, se faz uma breve resenha histórica acerca da evolução do conceito de integral e se relatam os resultados correspondentes ao estudo das mais recentes apresentações da integral em diversos textos de Análise tanto no âmbito local quanto no exterior. Na Seção 2, se trata das funções reguladas e da integral Cauchy. A Seção 3, trata da funções Riemann integráveis. Na Seção 4, se faz o comparativo e termina com a eleição da alternativa mais conveniente do ponto de vista conceitual e metodológico para desenvolver o tema. A Seção 5, em correspondência à escolha feita, contém um roteiro e um mapa conceitual que organiza de forma lógica os quesitos e o conteúdo do tema na alternativa escolhida.

1 Fundamentação

Xavier Gourdon (GOURDON, 2020) inicia o capítulo de seu livro de Análise que trata da Integração com a seguinte nota histórica. Aqui descreve as etapas percorridas pelo conceito de integral.

A teoria da integração nasce no cálculo de áreas.

A teoria da integração nasceu com a busca pelo cálculo da área de uma superfície. Arquimedes já sabia avaliar a área de uma superfície delimitada por uma parábola e uma reta. Seus cálculos foram retomados no século IX por estudiosos árabes. Já em 1636, Pierre de Fermat calcula a quadratura das curvas $x \mapsto ax^m$ onde m é um número natural. (GOURDON, 2020, p.123, *tradução nossa.*)

Newton e Leibniz fundam o cálculo infinitesimal.

Durante a segunda metade do século XVII, Newton e Leibniz fundaram o cálculo infinitesimal. Newton calculou a área de uma curva $y = f(x)$ invertendo as operações de derivação (hoje diríamos: usando a noção de primitiva). Por outro lado, Leibniz interpretou áreas como somas de retângulos infinitesimais. (GOURDON, 2020, p.123, *tradução nossa.*)

Cauchy, em 1823, é o primeiro em dar uma definição precisa de integral e logo Riemann, em 1854, desenvolve a teoria da integração.

“Em 1823, Cauchy reuniu seus resultados e foi o primeiro a dar uma definição precisa da integral. Foi sobretudo Riemann quem, em 1854, desenvolveu a teoria da integração. Ele define sua integral usando as famosas ‘somas de Riemann’.”(GOURDON, 2020, p.123, (tradução nossa)

Neste ponto é interessante observar o relato de Bourbaki (BOURBAKI, 1976) que a seguir citamos

No que diz respeito à integração, a obra de Cauchy representa um regresso às saudáveis tradições da antiguidade e da primeira metade do século XVII, mas com base em meios técnicos ainda insuficientes. A integral definida, $[\dots]$, volta a ser a noção primordial. Cauchy adota definitivamente a notação $\int_a^b f(x)dx$ proposta por Fourier (em vez do desajeitado $\int f(x)dx \left[\begin{matrix} x = b \\ x = a \end{matrix} \right]$ algumas vezes usado por Euler), e para defini-la, ele retorna ao método “exaustivo”, ou como diríamos hoje às “somas de Riemann” (que seria melhor chamar de somas arquimedianas ou somas eudoxianas). (BOURBAKI, 1976, p.272, *tradução nossa*)

Um grande progresso na teoria da integração é devido a Lebesgue que aplicando os desenvolvimentos da teoria da medida realizados por Borel consegue enriquecer o conceito de integral.

Finalmente, Lebesgue, em sua tese de 1902, apresentou ideias revolucionárias sobre o conceito de integral. Ele esclareceu muitas das dificuldades das discussões do século XIX e forneceu uma estrutura geral simplificada para muitos teoremas, enquanto a teoria de Riemann multiplicou suposições e condições restritivas. (GOURDON, 2020, p.123, *tradução nossa*)

De maneira a se ter uma ideia geral acerca de como se deu este desenvolvimento, é ilustrativo citar o relato histórico feito por Bourbaki (BOURBAKI, 1976). Este, de forma magistral, nos resenha com grande clareza e concisão o trabalho realizado por Lebesgue para definir a integral.

Em sua tese, Lebesgue começa a desenvolver e precisar as breves indicações de E. Borel; à imitação de Peano-Jordan, a “medida exterior” de um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}$ é definido como o extremo inferior das medidas dos conjuntos abertos que contêm A ; depois, se I é um intervalo que contém A , a “medida interna” de A é a diferença entre as medidas exteriores de I e de $I - A$; Deste modo obtém-se uma noção de “conjunto mensurável” que apenas difere da definição “construtiva” inicial do Borel pelo fato de acrescentar uma parte de um conjunto de medida nula no sentido de Borel. Esta definição estende-se imediatamente aos espaços \mathbb{R}^n . (BOURBAKI, 1976, p.306, *tradução nossa*)

A definição de integral dada por Lebesgue estende a integral de Riemann às funções para as quais estariam definidas um conjunto de medida nula. Para quem pretende realizar uma primeira

aproximação ao conceito de integral no sentido Lebesgue, sem ter que, previamente, estudar com amplitude e profundidade a teoria da medida, recomendamos a leitura do livro de Luiz Aduato Medeiros e Eliel Amancio de Mello, *A integral de Lebesgue* (MEDEIROS, 1989). Este texto, como eles mencionam, é o resultado de várias tentativas na busca de como “levar ao conhecimento dos estudantes, de modo simples e inteligível, as noções iniciais daquela teoria”, sendo esta uma apresentação razoavelmente simples e idealizada por F. Riesz.

a conceitualização antiga da integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de uma função limitada $y \geq 0$ como “área” limitada pela curva $y = f(x)$, as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, fornecia uma extensão da integral de Riemann a todas as funções f para as que estivera definida a medida do conjunto precedente. (BOURBAKI, 1976, p.306, *tradução nossa*)

Porém, nos diz Bourbaki, que um mérito maior que a extensão da integral de Riemann é o descobrimento do teorema fundamental sobre o passo ao limite na integral.

Mas a originalidade de Lebesgue não reside tanto na ideia desta extensão como na sua descoberta do teorema fundamental sobre o passo ao limite na integral assim concebida, teorema que aparece como consequência de ser a medida completamente aditiva; Lebesgue se dá conta imediatamente de sua importância e faz dele a pedra angular da exposição didática de sua teoria que realizou em 1904 em suas famosas “*Lições sobre a integração e a busca de funções primitivas*” (BOURBAKI, 1976, p.306, *tradução nossa*)

Conforme isto, podemos notar que em seu desenvolvimento o conceito de integral atravessa as seguintes etapas:

1. cálculo de áreas (Arquimedes),
2. noção de primitiva (Newton) e somas de retângulos infinitesimais (Leibniz),
3. definição precisa de integral (Integral de Cauchy), definição de integral por somas de Riemann (Integral de Riemann),
4. Integral de Lebesgue.

As primeiras corresponderam ao Cálculo e a partir de Cauchy, de alguma forma, corresponderam à Análise.

O programa de estudos do curso de Licenciatura em Matemáticas contempla a disciplina de Análise Real. Entende-se que sua presença na etapa final da formação tem por objetivo fundamental, desde a perspectiva da Matemática, os conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral ministradas nas etapas anteriores.

Os leitores que tenho em mente são alunos com conhecimento equivalente a dois períodos letivos de Cálculo, de modo a terem familiaridade com as ideias de derivada e integral em seus aspectos mais elementares [...]. Espero, além disso, que eles tenham uma noção razoavelmente clara do que seja uma demonstração matemática. (LIMA, 1997)

A integral de Riemann forma parte da disciplina de Análise Real. Existem renomados matemáticos que questionam sua presença e propõem outras alternativas. Neste sentido temos o comentário a tal respeito que faz Dieudonné (DIEUDONNÉ, 1966):

Por fim, o leitor provavelmente notará a ausência conspícua de um assunto que há muito é homenageado nos cursos de Cálculo: “a integral de Riemann”. É bastante claro para todos os matemáticos que esta teoria tem agora a importância de um exercício moderadamente interessante na teoria geral da medida e da integração. Apenas um sentido fortemente conservador da tradição acadêmica a deixou congelada como um capítulo notável dos programas muito depois de que transcorreu o momento histórico em que teve verdadeiro significado. (DIEUDONNÉ, 1966, p. 146, *tradução nossa*)

Em seguida faz a sugestão de limitar o processo de integração, para um nível elemental da Análise, às *funções reguladas*¹ chamada *integral de Cauchy*.

Claro, é perfeitamente viável limitar o processo de integração a uma categoria de funções que seja grande o suficiente para todos os propósitos da Análise elemental (no nível deste curso), mas perto o suficiente das funções contínuas para dispensar qualquer consideração extraída de teoria da medida; foi isso que fizemos definindo apenas a integral de funções reguladas (às vezes chamada de “integral de Cauchy”). (DIEUDONNÉ, 1960, p. 142, *tradução nossa*)

Dieudonné nos indica que para realizar estudos mais avançados que requeiram ferramentas mais potentes, não pode se desconsiderar o conhecimento da integral de Lebesgue.

“Quando um instrumento mais poderoso é necessário, não é possível parar no meio do caminho e devemos recorrer à teoria geral da integração (‘Lebesgue’) que é o único que representa um progresso efetivo”. (DIEUDONNÉ, 1966, p. 146, *tradução nossa*)

Uma opinião a respeito da substituição da integral de Riemann pela integral de Cauchy, talvez um tanto provocada pela de Dieudonné neste tema, é a dada por Berberian (BERBERIAN, 1979) que a seguir citamos;

1. Introdução. De início, tenho a intenção de dizer que permaneço um “leal a Riemann”: peso por peso, o círculo de ideias de Riemann não pode ser superado por seu valor instrucional para o aluno iniciante da análise. Consequentemente, eu não iria tão longe a ponto de sugerir que a teoria das funções reguladas substitua a integral de Riemann no início do curso de graduação em análise; no entanto, em um curso de pós-graduação em variáveis reais, a teoria das funções reguladas pode ser uma alternativa interessante para uma revisão rotineira da integral de Riemann; e é, de certa forma, um prelúdio mais instrutivo para a teoria de Lebesgue, como espero persuadir o leitor nesta breve “anatomia comparativa” das teorias de integração. (BERBERIAN, 1979, *tradução nossa*)

Podemos destacar que, a diferença de Dieudonné, Berberian nos diz que *o círculo de ideias de Riemann não pode ser superado por seu valor instrucional para o aluno iniciante da análise*. Em seguida, nos diz que ele não sugere esta substituição *no início do curso de graduação em análise*. Em todo caso, a apresentação da teoria das funções reguladas poderia ser feita *em um curso de pós-graduação*. Como pode se ver, esta é uma posição mais

¹A versão em espanhol da editora Reverté fala de *funciones débilmente regulares* (funções fracamente reguladas). Na dúvida citamos a versão original em inglês

conservadora, porém não menos válida para tê-la em conta sobre todo quando se trata de uma discussão do conteúdo da disciplina de Análise nos cursos de graduação como o que motiva este trabalho. Seguindo esta linha de ideias, VILORIA e CADENAS (2003) propõem a substituição da integral de Riemann pela de Cauchy. O caminho a ser percorrido na apresentação do tema tem como ponto inicial a *integração de funções escada* e suas propriedades até chegar à *integração de funções reguladas*.

A teoria das funções reguladas pode substituir o ensino da integral de Riemann nas carreiras de Matemática. Apresentamos a integral de Cauchy como uma alternativa elegante à integral de Riemann. A partir da formalização da teoria de integração das funções escada (sem dúvida intuitiva), transferimos as propriedades fundamentais para a classe das funções reguladas (que só possuem descontinuidades do primeiro tipo). Limitamos o processo de integração a uma categoria de funções próxima o suficiente daquela das funções contínuas e ampla o suficiente para conter os tipos de funções requeridas, do ponto de vista pragmático. (VILORIA e CADENAS, 2003, *tradução nossa*)

Destacamos, por ser revelante ao propósito deste trabalho, a indicação de que deve-se tomar como ponto de partida a integração de funções escada.

2 Funções reguladas. Integral de Cauchy

2.1 Roteiro seguindo Diudonné

Funções reguladas

1. Definição de função escada

Seja I um intervalo de \mathbb{R} com origem a e extremidade b (a , b ou ambos podem ser infinitos), F um espaço de Banach. Diz-se que uma função de I em F é uma função *escalonada* se existe uma sequência finita crescente $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de pontos de aderência de I em \mathbb{R} tal que $x_0 = a$, $x_n = b$, e que f seja constante em cada um dos intervalos $]x_i, x_{i+1}[$ ($0 \leq i \leq n - 1$). [· · ·]. (DIEUDONNÉ, 1966, p. 143, *tradução nossa*)

Segundo esta definição, uma função escada $\phi : [a, b] \mapsto F$ será determinada por: uma sequência $x = (x_k)$ estritamente crescente de $n + 1$ pontos de $[a, b]$ tal que $a = x_1$ e $x_{n+1} = b$, uma sequência $\lambda = (\lambda_i) \in F^n$ e uma sequência $\mu = (\mu_i) \in F^{n+1}$ tais que

$$\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \lambda_i & t \in]x_i, x_{i+1}[\quad (1 \leq i \leq n) \\ \mu_i & t = x_i \quad (1 \leq i \leq n + 1) \end{cases} \quad (1)$$

2. Definição de função regulada ²

“Uma função f de I em \mathbb{R} é uma **função regulada** se tem limites laterais em cada ponto de I . É claro que qualquer função escada é regulada”. (DIEUDONNÉ, 1960, p. 139, *tradução nossa*)

²Na versão em espanhol diz-se **Funciones débilmente regulares**

3. Teorema de caracterização de funções reguladas por funções escada

“(7.6.1) Para que uma função f de um intervalo compacto $I = [a, b]$ em F seja uma função fracamente regular, é condição necessária e suficiente que f seja o limite de uma sequência uniformemente convergente de funções escalonadas”. (DIEUDONNÉ, 1966, p. 143, tradução nossa)

É possível enunciar de uma forma equivalente o teorema de caracterização anterior.

“Outra forma de formular (7.6.1) é dizendo que o conjunto de funções fracamente regulares é fechado em $\mathcal{B}_F(E)$ e que o conjunto de funções escalonadas é denso no conjunto de funções fracamente regulares”. (DIEUDONNÉ, 1966, p. 144, tradução nossa)

4. Exemplos importantes de funções fracamente regulares

“(7.6.2) Toda aplicação contínua de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ em um espaço de Banach é fracamente regular; assim como toda aplicação monótona de I para \mathbb{R} ”. (DIEUDONNÉ, 1966, p. 144, tradução nossa)

Primitivas e integrais

1. Definição de primitiva

7. Primitivas e integrais

Seja f uma aplicação de um intervalo I em um espaço de Banach F . Se diz que uma aplicação contínua g de I em F é uma primitiva de f em I quando existe um conjunto enumerável $D \subset I$ tal que, para cada $\xi \in I - D$, g é diferenciável em ξ e $g'(\xi) = f(\xi)$.

(8.7.1) Se g_1, g_2 são duas primitivas de f , então $g_1 - g_2$ é constante em I . (DIEUDONNÉ, 1966, p. 162, tradução nossa)

2. Definição de integral

Se g é uma primitiva qualquer de uma função regulada f , a diferença $g(\beta) - g(\alpha)$, para dois pontos quaisquer de I , é independente de qual seja a primitiva g particular que se considere, devido a (8.7.1); tal diferença se expressa por

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi$ e se denomina **integral de f entre α e β** . (DIEUDONNÉ, 1960, p. 161, tradução nossa, grifo nosso)

2.2 Roteiro seguindo Vilorio e Cadenas

definiremos a integral de Cauchy para uma função regulada como o limite de uma sequência, de integrais de funções escadas, que converge uniformemente para a dita função. A partir disso, mostraremos todas as propriedades usuais de uma integral, tornando a Teoria da Integração mais natural, já que se baseia no conhecimento simples e intuitivo da integral de uma função degrau. As propriedades da integral de Cauchy são transferidas das propriedades das funções degrau. (VILORIA e CADENAS, 2003, tradução nossa)

Anotemos aqui a definição, simples e intuitiva, da integral de uma função escada: Seja $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função escada determinada pelas sequências x , λ e μ . Define-se a integral de ϕ

entre a e b (ou em $[a, b]$) como sendo $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x_{i+1} - x_i)$. Denota-se por $\int_a^b \phi(t)dt$. Logo,

$$\int_a^b \phi(t)dt \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_{i+1} - x_i) \quad (2)$$

Observe-se que esta integral não depende dos valores que a função ϕ toma nos pontos extremos dos subintervalos, isto é, não depende de μ .

Funções reguladas

1. Definição de funções reguladas

2 Funções Reguladas

Definição 1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \mapsto \mathbb{R}$ é chamada regulada se para cada $x \in I$ existe

$$f(x-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \quad y \quad f(x+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

(VILORIA e CADENAS, 2003, *tradução nossa*)

Levando em conta o fato de que a função valor absoluto define uma norma em \mathbb{R} , junto com sua métrica associada, e que munido desta norma é um espaço completo, temos que \mathbb{R} é espaço Banach. Tomando $F = \mathbb{R}$ na definição de função regulada dada por Dieudonné, podemos concluir que esta definição de função $f : I \mapsto \mathbb{R}$ regulada é um caso particular de função $f : I \mapsto F$, com F Banach, regulada.

2. Funções contínuas são reguladas. Funções reguladas são limitadas

Da definição segue-se que toda função contínua é regulada. Toda função regulada é limitada e também o conjunto

$$G[a, b] = \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, f \text{ regulada}\}$$

é um espaço de Banach. Além disso, se f é de variação limitada, então f é regulada. (VILORIA e CADENAS, 2003, *tradução nossa*)

Denotando por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}([a, b])$ o espaço das funções definidas em $[a, b]$ limitadas, temos

$$C([a, b]) \subset G[a, b] \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}([a, b])$$

3. Caracterização das funções reguladas como limites de seqüências de funções escada.

Lema 1. Uma função $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ é regulada se e somente se existe uma seqüência de funções $(\varphi_n) \subset E[a, b]$ tal que

$$\varphi_n \rightrightarrows f \text{ em } [a, b]$$

(ou seja, (φ_n) converge uniformemente para f em $[a, b]$), onde

$$E[a, b] = \{\varphi : [a, b] \mapsto \mathbb{R} : \varphi \text{ é uma função escada}\}.$$

(VILORIA e CADENAS, 2003, *tradução nossa*)

O Lema anterior nos diz que o conjunto de funções escada é denso no espaço das funções reguladas. O conjunto dos pontos de descontinuidade da função regulada é enumerável.

“Por outro lado, como consequência do resultado anterior, obtemos que se f é uma função regulada, então o conjunto de pontos onde f é descontínuo é enumerável”. (VILORIA e CADENAS, 2003, tradução nossa)

Para definir a integral de uma função regulada deve primeiro definir-se a integral de uma função escada. Isto deve ser feita de forma óbvia. (2)

3. Integral das Funções Reguladas

Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função regulada tal que $\phi_n \rightrightarrows f$ em $[a, b]$, onde $(\phi_n) \subset E[a, b]$. Então

- (a) A sequência $\left(\int_a^b \phi_n(t) dt \right)$ é de Cauchy.
- (b) Suponha que $(\varphi_n) \subset E[a, b]$ e que $\phi_n \rightrightarrows f$ em $[a, b]$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos

$$|\phi_n(t) - \varphi_n(t)| < \epsilon \quad \forall t \in [a, b].$$

(c)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(t) dt$$

A partir disso podemos definir, sem ambiguidade, a integral de uma função regulada. (VILORIA e CADENAS, 2003, tradução nossa)

Definição 2. A integral da função regulada f sobre $[a, b]$ é definida por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n(t) dt$$

onde $(\phi_n) \subset E[a, b]$ e satisfaz $\phi_n \rightrightarrows f$ sobre $[a, b]$. Neste caso dizemos que f é integrável e denotamos sua integral por $\int_a^b f(t) dt$. (VILORIA e CADENAS, 2003, tradução nossa)

3 Função integrável no sentido de Riemann

As somas de Riemann são a base da construção da Integral de funções Riemann integráveis.

Seja $[a, b]$ um intervalo compacto. Por partição de $[a, b]$ entendemos uma sequência finita $P = \{t_j\}_0^n$ tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Seja f uma função de valor real limitada arbitrária em $[a, b]$. Para cada partição P definimos

$$S_P f = \sum_1^n M_j(t_j - t_{j-1}), \quad s_P f = \sum_1^n m_j(t_j - t_{j-1})$$

onde M_j e m_j são supremos e mínimos de f em $[t_{j-1}, t_j]$. Então nós definimos

$$\bar{I}_a^b(f) = \inf_P S_P f, \quad \underline{I}_a^b(f) = \sup_P s_P f$$

onde o ínfimo e o supremo são tomados sobre todas as partições P .

Se $\bar{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(f)$, seu valor comum é a **integral de Riemann** $\int_a^b f(x)dx$, e f é chamada **Riemann integrável**. (FOLLAND, 1999, *tradução nossa*)

O seguinte teorema (FOLLAND, 1999) dá a relação entre a integral de Riemann e a integral de Lebesgue e caracteriza as funções Riemann integráveis como aquelas cujos conjuntos de descontinuidades possuem medida zero segundo Lebesgue.

2.28 Teorema. Seja f uma função limitada de valor real em $[a, b]$.

- a. Se f é integrável por Riemann, então f é Lebesgue mensurável (e portanto integrável em $[a, b]$ visto que é limitada) e $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm$.
- b. f é Riemann integrável se, e somente se $\{x \in [a, b] : f \text{ descontínua em } x\}$ tem medida de Lebesgue zero.

(FOLLAND, 1999, *tradução nossa*)

Porém existem outras ferramentas que poderíamos usar. Nesta direção temos o uso de funções escada como na abordagem anunciado por Gourion (1971, p. 181):

Na primeira seção definimos e damos propriedades de uma **função integrável no sentido de Riemann em um segmento** $[a, b]$ usando **funções escada** definidas em $[a, b]$. (\dots). As funções escada constituem a ferramenta simples e precisa que usaremos ao longo do capítulo, tanto para questões teóricas quanto para aplicações práticas. (GOURIÃO, 1971, *tradução nossa, grifo nosso*)

De forma análoga, no livro de Cálculo de Apostol (APOSTOL, 2001), encontramos a apresentação do conceito de integral de funções tomando como ponto de partida a integral de uma função escada.

O conceito de integral será primeiro definido para funções escada, e então a integral de funções escada será usada para formular a definição de integral para funções mais gerais. Para realizar este programa, é necessário dar uma definição analítica do que se entende por uma função escada, o que é facilmente alcançado referindo-se ao conceito de partição, que é discutido abaixo. (APÓSTOL, 2001, *tradução nossa*)

Esta forma de abordagem também é feita por Smith-Albretch (SMITH & ALBRETCH, 1966):

“Antes de dar a definição geral de integral $\int_a^b f(x)dx$, onde $f : [a, b] \mapsto E^1$, é útil discutir as funções escada”. (SMITH & ALBRETCH, 1966, p. 123, *tradução nossa*)

4 Integral de Riemann ou Integral de Cauchy?

De todo o anterior podemos observar:

- (a) Tanto a proposta de Dieudonné como a de Vilorio-Cadenas se basam nas funções escada.
- (b) Ambos usam o fato da densidade do conjunto das funções escada no espaço das funções fracamente regulares ou reguladas.

- (i) No caso Diuedonné se define primeiro a **primitiva** como uma função g contínua e derivável com derivada f . Enuncia-se a propriedade de que a diferença de primitivas é constante, donde resulta que esta diferença independe da primitiva particular que se considere e se define como a **integral**.
 - (ii) No caso Viloria-Cadenas, definida a integral de uma função escada e , fazendo uso da caracterização das funções reguladas pela convergência uniforme de sequências de funções escadas, se define a integral como limite da sequência de integrais dos termos desta sequência.
- (c) No referente à integral no sentido Riemann, podemos observar duas formas de apresentação:
- (i) Se define a **soma de Riemann** com respeito a uma **descomposição do intervalo de definição da função**. Se determinam as somas superiores e as somas inferiores. Sendo estas somas limitadas se toma o ínfimo das somas superiores (respectivamente, supremo das somas inferiores) respeito as descomposições, definindo-se assim a **integral superior** (respectivamente, a **integral inferior**) da função. Se diz que a função é Riemann integrável quando a integral superior e a integral inferior coincidem e o valor comum é a integral no sentido Riemann da função.
 - (ii) Se caracterizam as funções limitadas por enquadramento mediante funções escada. Se define a integral de uma função escada. Se determinam os conjuntos de integrais de funções escada que enquadram superiormente e o das integrais de funções escada que enquadram inferiormente à função. Estes conjuntos são limitados inferiormente um deles e o outro superiormente. Se o supremo de um é igual ao ínfimo do outro, a função se diz **integrável no sentido Riemann** e o valor comum é a **integral Riemann da função**.
- (d) Pode-se observar que as quatro alternativas são viáveis, pois os pré-requisitos são dados em capítulos prévios. A escolha pode depender do gosto ou das preferência do Professor. Porém, para enquadrar-se nos programas de estudos atuais, a despeito da opinião de Deidonné e coincidindo em parte com Berberian, poderíamos optar por uma apresentação de integral no sentido Riemann.
- (e) Das duas opções de apresentação da integral Riemann, a segunda, que se vale das funções escada pode ser a mais recomendável pois, na opinião de alguns autores, é mais simples, rigorosa e “elegante”.
- (f) Uma vez feita a escolha, nada impede abordar também as outras alternativas de forma sucinta, seja como observações ou como exercícios.

5 Roteiro. Mapa conceptual

Como foi observado anteriormente e pelas razões dadas em (d) optaremos por uma apresentação da integral no sentido Riemann. Das duas formas de fazer isto optaremos pela segunda, isto é, aquela que usa as funções escada ((c)-(ii)). Desenvolvemos o tema seguindo

no fundamental os textos de Gourion (GOURION, 1971) e de Smith-Albretch (SMITH & ALBRETCH, 1966).

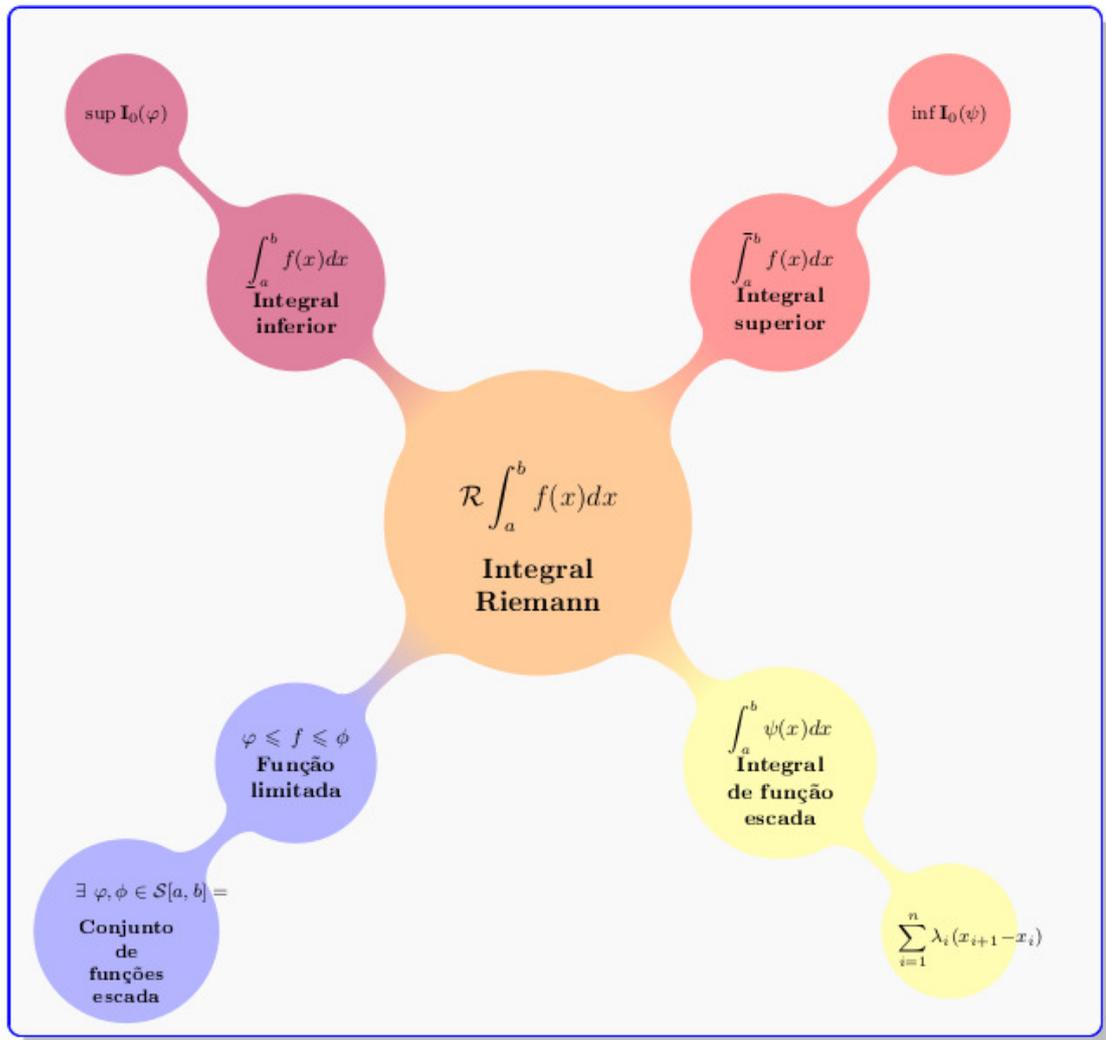


Figura 1: Mapa conceitual da Integral no sentido Riemann

Com esta finalidade, trataremos o tema segundo o seguinte roteiro:

1. Definição e exemplos de funções escada.
2. Definição e exemplos de integral de funções escada.
3. Propriedades da integral das funções escada.
4. Determinação de funções limitadas por enquadramento por funções escada.
5. Definição de dois **conjuntos de integrais de funções escada**:

$$\mathbf{I}_0(\varphi) = \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi \in \mathcal{S}[a, b] \text{ e } \varphi \leqq f \right\} \text{ e } \mathbf{I}_0(\psi) = \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \psi \in \mathcal{S}[a, b] \text{ e } f \leqq \psi \right\}$$

6. Se definem a **integral inferior** de f , $\int_a^b f(x)dx$, como sendo $\sup \mathbf{I}_0(\varphi)$. Analogamente, define-se a **integral superior** de f , $\int_a^{\bar{b}} f(x)dx$, como sendo $\inf \mathbf{I}_0(\psi)$
7. Se os conjuntos constituem uma dupla de partes adjacentes de \mathbb{R} , isto é, se $\sup \mathbf{I}_0(\varphi) = \inf \mathbf{I}_0(\psi)$, podemos definir este valor comum como a **integral Riemann** de f .

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

8. Se transferem as propriedades das integrais de funções escada às integrais de funções Riemann integráveis.
9. Apresenta-se a noção de **primitiva**. Se desenvolvem a existência e o cálculo de primitivas.

Referências

- APOSTOL, M. CALCULUS VOLUMEN I Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Segunda edición. EDITORIAL REVERTE S. A. Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas -México, 2001.
- BERBERIAN, S. K. Regulated Functions: Bourbaki's alternative to the Riemann integral. The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979), pp. 208-211.
- BOURBAKI, N. Elementos de historia de la matemática. Alianza Editorial. Madrid, 1976.
- DIEUDONNÉ, J. Fundamentos de Análisis Moderno. Editorial Reverté: España, 1966.
- DIEUDONNÉ, J. Foundations of Modern Analysis. Academic Press. New York and London, 1960.
- FOLLAND, G. Real Analysis -Modern Techniques and Their Applications. John Wiley & Sons, Inc. USA, 1999.
- GOURION, M. Mathémaiques Terminal CDE Tome 2 Analyse. Fernand Nathan: Paris, 1971.
- GOURDON, X. Les Maths en tête, Mathématiques pour M': ANALYSE. 3^e Ed, Ellipse: Paris, 2020.
- LIMA, E.L. Análise Real. Volume 1. 3^a Edição. IMPA (Coleção Matemática Universitária): Rio de Janeiro, 1997.
- MEDEIROS, L.A. and Mello de E.A. Integral de Lebesgue. Universidade Federal do Rio de Janeiro - Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 1989.
- SMITH, A.; ALBRECHT, W. Fundamental Concepts of Analysis. Prentice-Hall: USA, 1966.
- VILORIA, N. and CADENAS, R. Integral de Cauchy: Alternativa a la Integral de Riemann. Divulgaciones Matemáticas Vol. 11 No. 1(2003), pp. 49-53.

O uso dos jogos no ensino da Matemática

Theo Fernando Bonfim da Luz
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
theofernandobdaluz@gmail.com

Luiza Stunder
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
luiza.stunder@hotmail.com

Márcio Vinícius Rocha Miranda
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Raianny Vitória Zerneh
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Resumo: O uso de jogos no ensino da matemática constitui uma tendência de educação chamada “gameificação”, que vem ganhando muito espaço dentro do ensino nos últimos anos. O objetivo dessa prática é aplicar técnicas e dinâmicas lúdicas para enriquecer o contexto do ensino-aprendizagem, normalmente com jogos completamente novos ou modificações de jogos já conhecidos. O presente artigo tem o objetivo de estudar a psicologia do jogo para a perspectiva do aluno, à luz de ideias de estudiosos do meio. Ademais, houve uma experiência prática durante a realização do PROMAT do ano civil de 2023 onde foi possível relacionar o que aconteceu nessa prática com as ideias anteriormente descritas. Apesar do jogo normalmente ser associado com crianças e a tenra idade, ele constitui um forte elemento de ensino alternativo onde coloca os alunos como protagonistas da aula.

Palavras-chave: jogo; tendências em educação matemática; gameificação.

1 Introdução

A intersecção entre a Psicologia do Jogo e o ensino da Matemática revela-se como uma área de pesquisa fundamental diante dos desafios encontrados no processo educacional. A dificuldade em despertar o interesse dos alunos por conteúdos considerados maçantes e complexos, especialmente no caso da Matemática, é uma realidade amplamente reconhecida (Lacnallo e Mori, 2016). A naturalização da ideia de que a Matemática é uma disciplina difícil contribui para a formação de barreiras que impedem a aprendizagem, conforme observado por esses autores.

Diante desse cenário, Lacanallo e Mori (2016) propõem a utilização do jogo como uma ferramenta para reverter experiências negativas e criar novas abordagens de ensino. No entanto, ressaltam que o jogo, por si só, não é suficiente e defendem a necessidade de uma reestruturação abrangente e dialética do processo de ensino. Essa perspectiva é corroborada pela teoria histórico-cultural, que relaciona o jogo com questões de aprendizagem e desenvolvimento.

Neste contexto, a presente pesquisa explora a natureza psicológica do jogo, destacando a perspectiva de Jean Piaget no ensino da Matemática. Piaget, precursor da teoria construtivista, enfatizou a importância dos jogos, brincadeiras e atividades lúdicas no desenvolvimento e aprendizagem infantil. Sua teoria estrutura-se em processos como assimilação, acomodação e equilíbrio, delineando um percurso de desenvolvimento cognitivo.

A fim de aplicar esses conceitos de forma prática, desenvolvemos uma experiência centrada no jogo de cobras e escadas, alinhado com a proposta de explorar o potencial dos jogos no contexto educacional. A escolha desse jogo específico foi embasada em sua capacidade de engajar os alunos, oferecendo uma abordagem lúdica e interativa para o aprendizado matemático. A adaptação do jogo incluiu questões que exigiam a modelagem de equações e a resolução de sistemas lineares, proporcionando uma oportunidade para o desenvolvimento de habilidades conceituais.

2 A psicologia do jogo e seu impacto no ensino da Matemática

Percebe-se que é bem difícil trazer o interesse dos alunos com conteúdo maçante e explicações longas. Segundo Lacanallo e Mori

É possível identificar nos discursos o quanto a ideia de matemática como uma ciência difícil é naturalizada e inquestionável para muitos. Os alunos expressam o grau de dificuldade diante das tarefas propostas, verbalizam experiências negativas com a disciplina, criando barreiras que as afastam da condição e possibilidade de aprendizagem. (Lacanallo; Mori, 2016, p. 662)

De acordo com Lacanallo e Mori (2016), propor o uso do jogo como meio de reverter essas situações de não aprendizagem é algo considerado aceitável por esses indivíduos, embora seja inicialmente crucial para a construção de novas abordagens de ensino, isso, por si só, não é suficiente. É imperativo buscar uma reestruturação abrangente e dialética do processo de ensino, dessa forma, o jogo será compreendido como um recurso metodológico essencial na organização do ensino de matemática, concebendo-o não como algo isolado das demais questões relacionadas à atividade humana. Lacanallo e Mori (2016, p. 663) ainda enfatiza que “Falar de jogo implica, na perspectiva histórico-cultural, relacioná-lo com questões de aprendizagem e desenvolvimento.”

Os pressupostos da teoria histórico-cultural, a primeira constatação que se faz é que a infância tem um caráter histórico e cada idade tem peculiaridades próprias que se modificam com o decorrer da vida. (Lacanallo; Mori, 2016, p. 663)

Elkonin (1998), que serviu como base teórica de Lacanallo e Mori, analisou a essência que permeia a infância até a adolescência, destacando que a investigação dos aspectos evolutivos do pensamento, linguagem e personalidade, juntamente com as peculiaridades dos processos de aquisição da leitura e escrita, deve ser conectada às questões inerentes à educação e ao ensino. Os trabalhos do autor tornaram-se uma teoria sobre os jogos e Elkonin espera que:

[...] proceder a uma análise crítica e histórica das teorias fundamentais do jogo [...] cujo objetivo principal é revelar a inconsistência do enfoque naturalista do jogo, predominante nas principais teorias propostas em outros países, contrapondo-lhe o enfoque sócio-histórico da origem e desenvolvimento do jogo humano, sem o qual tampouco se pode compreender a sua natureza psicológica. (Elkonin, 1998, p. 9)

Para Lacanallo e Mori (2016), a compreensão das operações mentais necessárias para a formação de conceitos. Ele destaca a autonomia do aluno na realização dessas operações, progredindo desde a orientação inicial até a constituição definitiva da operação mental. Essa abordagem é cuidadosamente incorporada à proposta pedagógica, que reconhece o jogo como uma atividade que não apenas motiva, mas também possibilita a realização dessas operações mentais, promovendo uma verdadeira imersão na formação conceitual.

3 Explorando a natureza psicológica do jogo: uma perspectiva à luz de Jean Piaget para o ensino da Matemática

De acordo com Oliveira e Albrecht (2021), Jean Piaget, um dos precursores da teoria construtivista, dedicou-se a desbravar os intrincados caminhos da cognição humana, focalizando especialmente o desenvolvimento infantil. Desde o nascimento até a fase adulta, Piaget delineou um percurso marcado por processos fundamentais: assimilação, acomodação e equilíbrio, que constituem a essência da construção do conhecimento. Sua observação aguçada levou-o a notar padrões comuns de erros entre crianças da mesma faixa etária, catalisando a elaboração de uma teoria estruturada em quatro períodos cruciais. Segundo os autores:

Piaget e sua teoria do construtivismo de desenvolvimento intelectual e as fases do desenvolvimento, teve uma grande contribuição para a educação, em especial no Brasil, a partir da década de 1980, o qual criou condições de se pensar no processo de ensino-aprendizado do aluno, o qual levou professores a planejarem atividades adequadas para a sua faixa etária e fase do desenvolvimento de cada criança. (Oliveira; Albrecht, 2021, p. 5)

De acordo com Oliveira e Albrecht, Piaget conferiu uma significativa importância aos jogos, brincadeiras e atividades lúdicas no processo de desenvolvimento e aprendizagem. Para ele, “o conceito de jogo envolvia a ação de brincar, sendo uma atividade intrinsecamente ligada à infância e de fundamental importância para o desenvolvimento e aprendizado da criança. Piaget categorizou o jogo em três tipos distintos: o jogo simbólico, o de regra e o de exercício.” (citado por Oliveira e Albrecht 2021, p. 06).

Ainda por Oliveira e Albrecht, os jogos de exercício caracterizam-se como atividades na primeira infância, em que o bebê manipula objetos por meio de ações repetitivas, visando seu próprio prazer. Entre os 2 e 4 anos, emergem os jogos simbólicos, marcados pelo faz de conta, nos quais a criança utiliza a imaginação para representar situações e comportamentos. Essa fase revela-se de importância crucial, pois é nela que a criança desenvolve habilidades fundamentais, como a leitura e a escrita.

Segundo Piaget, conforme citado por Oliveira e Albrecht (2021, p. 06) “através dos jogos de regras, as atividades lúdicas atingem um caráter educativos, tanto na formação psicomotora, como também na formação da personalidade da criança”. Para Oliveira e Albrecht, Piaget entendia o jogo com algo do dia a dia, por conta disso a assimilação é natural.

Ao longo de sua extensa obra sobre jogos e brincadeiras, Piaget define o jogo como algo natural, ao próprio da criança, do seu dia a dia, mas que não são apenas um meio de diversão e entretenimento, mas sim um tempo de um aprendizado e desenvolvimento intelectual. Quando as crianças jogam eles assimilam e podem transformar a sua realidade. O professor quando proporciona atividades lúdicas através de jogos e brincadeiras está desenvolvendo no aluno o seu conhecimento, seu caráter e sua forma de se relacionar com outras pessoas. (Oliveira; Albrecht, 2021, p. 6)

4 Experiência prática

Durante o PROMAT, programa do colegiado do curso de Licenciatura em Matemática que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino com práticas que são direcionadas aos estudantes que buscam acesso aos cursos superiores, tornou-se claro já na primeira aula que práticas tradicionais de ensino não bastavam. Na busca por estratégias inovadoras para o ensino da matemática, recorreremos constantemente ao uso do jogo e do lúdico como forma de ensino. Dentre os vários jogos aplicados ao decorrer de dez sábados, destaca-se um: o jogo de cobras e escadas. Este jogo foi escolhido devido à sua capacidade de engajar os alunos, proporcionando uma abordagem lúdica e interativa para o aprendizado matemático. A escolha do jogo está alinhada com a proposta de explorar o potencial dos jogos no contexto educacional.

O objetivo principal desta experiência foi investigar como o jogo de cobras e escadas poderia favorecer a formação do pensamento teórico dos alunos no âmbito matemático. Buscamos criar um ambiente dinâmico que estimulasse o desenvolvimento de habilidades conceituais, especialmente na modelagem e resolução de equações, além de proporcionar uma oportunidade para aprimorar a capacidade matemática dos participantes.

Segundo Grando, esse objetivo caracteriza um dos sete momentos de intervenção pedagógica.

Intervenção pedagógica verbal: Depois dos três momentos anteriores, os alunos passam a jogar agora contando com a intervenção propriamente dita. Trata-se das intervenções que são realizadas verbalmente, pelo orientador da ação, durante o movimento do jogo. Este momento caracteriza-se pelos ques-

tionamentos e observações realizadas pelo orientador da ação a fim de provocar os alunos para a realização das análises de suas jogadas (previsão de jogo, análise de possíveis jogadas a serem realizadas, constatação de “jogadas erradas” realizadas anteriormente etc.). Neste momento, a atenção está voltada para os procedimentos criados pelos sujeitos na resolução dos problemas de jogo, buscando relacionar este processo à conceitualização matemática. (Grando, 2007, p. 4)

O jogo de cobras e escadas foi escolhido por sua versatilidade e capacidade de integração com os conceitos matemáticos. Optamos por adaptar o jogo, incorporando questões que exigiam a modelagem de equações e resolução de sistemas lineares, o conteúdo que estávamos trabalhando com a turma no momento. Esta adaptação foi realizada com o objetivo de criar uma experiência que atendesse aos objetivos educacionais propostos.

A experiência foi conduzida em grupos de quatro alunos, cada um recebendo um tabuleiro, cartões e dados. A dinâmica do jogo foi explicada, e os alunos foram encorajados a trabalhar colaborativamente. A presença de quatro estagiários permitiu um suporte individualizado, garantindo que cada grupo recebesse a atenção necessária.

Conforme Macedo e citado por Grando:

A discussão desencadeada a partir de uma situação de jogo, mediada por um profissional, vai além da experiência e possibilita a transposição das aquisições para outros contextos. Isto significa considerar que as atitudes adquiridas no contexto de jogo tendem a tornar-se propriedade do aluno, podendo ser generalizadas para outros âmbitos, em especial, para as situações de sala de aula. (Macedo, 2000, p. 23)

Durante a atividade, observamos um envolvimento significativo dos alunos, evidenciado pelo uso efetivo de mapas mentais e anotações do quadro para modelagem e resolução de equações. Surgiram dúvidas, especialmente nas questões que exigiam a formulação de equações e a resolução de sistemas lineares, indicando áreas que poderiam ser mais exploradas em futuras atividades.



Figura 1: Alunos brincando com o jogo das escadas e serpentes

Fonte: acervo dos estagiários

Ao analisar os resultados à luz das teorias de Piaget (1978) e Elkonin (1998), podemos destacar como o jogo de cobras e escadas se tornou uma ferramenta pedagógica que promoveu o desenvolvimento cognitivo dos alunos, proporcionando uma abordagem prática e dinâmica para a aprendizagem matemática.

Conclusões

Em síntese, a aplicação de jogos no ensino da matemática emerge como uma estratégia pedagógica enriquecedora e transformadora. Ao considerar as contribuições de renomados teóricos, como Piaget e Elkonin, percebemos que os jogos não são meramente instrumentos manipuláveis, mas sim um elemento intrínseco ao desenvolvimento cognitivo e cultural dos alunos.

A compreensão do jogo como atividade lúdica transcende a mera diversão, ganhando relevância na formação da cultura e na criação de representações mentais. O uso do jogo na educação matemática não é apenas uma estratégia para tornar o aprendizado mais atraente, mas também uma ferramenta que permite aos alunos assimilar, transformar e criar um conhecimento sólido. A análise prática da experiência com o jogo de cobras e escadas revelou um envolvimento significativo dos alunos, destacando a eficácia do jogo como uma abordagem dinâmica para o ensino de conceitos matemáticos.

Diante disso, a proposta de integração dos jogos no processo de ensino mostra-se promissora, contribuindo não apenas para o desenvolvimento cognitivo, mas também para a formação de habilidades conceituais e a superação das barreiras percebidas em relação à matemática. No entanto, é crucial reconhecer que o uso eficaz dos jogos requer uma abordagem pedagógica abrangente, considerando o contexto cultural, a diversidade de aprendizes e a integração cuidadosa com os objetivos educacionais.

Assim, ao explorar a complexidade da atividade lúdica e sua influência na formação cultural, este estudo propõe uma reflexão mais profunda sobre o papel transformador dos jogos no ensino da matemática, destacando sua capacidade de transcender a dicotomia entre jogo e trabalho. Ao reconhecer o potencial dos jogos como instrumentos pedagógicos valiosos, esperamos contribuir para uma abordagem mais inovadora e eficaz no ensino da matemática, promovendo uma verdadeira imersão na formação conceitual dos alunos.

Referências bibliográficas

ELKONIN, D. B. *Psicologia do jogo*. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

GRANDO, Regina Célia. **O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação). Campinas, SP, FE/ UNICAMP, 1995, 175p.

GRANDO, Regina Célia. **Concepções Quanto ao Uso de Jogos no Ensino da Matemática**. Disponível em: CONCEPÇÕES QUANTO AO USO DE JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA (usp.br). Acesso em 18. Out de 2023.

LACANALLO, Luciana Figueiredo; MORI, Nerli Nonato Ribeiro. **“Psiu, estou jogando!!”**: o jogo no ensino da Matemática. Disponível em: Vista do “Psiu, estou jogando!!”: o jogo no ensino da Matemática (pucpr.br). Acesso em 17. Out de 2023.

OLIVEIRA, Denise Neumann; ALBRECHT, Ana Rosa Massolin. **Uso de Jogos e Brincadeiras para o Desenvolvimento e Aprendizagem**. Disponível em: <https://repositorio.uninter.com/bitstream/handle/1/746/USODEJ~1.PDF?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 18. Out de 2023

Estatística descritiva: uma experiência no primeiro ano do Ensino Médio

Milena Maciel Romão
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
milena.romao@unioeste.br

Stephany Amanda Parteka
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
stephany.parteka@unioeste.br

Pamela Gonçalves
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pamela.goncalves@unioeste.br

Resumo: Neste trabalho abordamos os desafios que envolvem o ensino da estatística descritiva no ambiente escolar, especialmente no Ensino Médio. A geração atual, conhecida como geração Z, é imediatista e superficial e isso impacta diretamente nas relações interpessoais e na educação. Dessa forma, se torna ainda mais complexo adotar tendências metodológicas como a Investigação Matemática em sala de aula. Sob esse olhar, relatamos nossa experiência ao abordar metodologias distintas em duas turmas do primeiro ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Estatística; Investigação Matemática; Geração Z.

1 Introdução

A fase escolar se configura como um período de extrema relevância na trajetória do indivíduo, representando uma fase crucial para a assimilação de conhecimentos significativos e pertinentes à vida. De maneira similar, a abordagem da estatística descritiva no ensino médio desempenha um papel fundamental na formação dos estudantes, fornecendo-lhes habilidades analíticas e críticas essenciais para enfrentar os desafios presentes na sociedade moderna.

Segundo Oliveira e Rosa (2020, p. 3), compreender que a Estatística pode ser um auxílio em várias situações do dia a dia é possível, e esse fenômeno remonta à antiguidade, uma vez que a necessidade de contar, quantificar e recensear sempre esteve presente na experiência humana. No entanto, os educadores enfrentam desafios crescentes ao ensinar a atual geração. Os membros da Geração Z, nascidos entre 1995 e 2010 segundo Souza (2024), cresceram imersos na era digital, revelando uma familiaridade precoce e conforto com tecnologias como smartphones, redes sociais e outras inovações digitais. Esse contexto impôs à esfera educacional a necessidade de se reinventar e manter-se atualizada. Dentro desse cenário, Souza, Romão e Parteka (2023, p. 10), enfatizam que

A geração Z é uma produtora ininterrupta de dados e convive com a superinformação e a desinformação simultaneamente. Isso porque, ao mesmo tempo que tem disponível uma grande quantidade de informações, não se aprofunda em nada. Dessa forma, acostumados com a rapidez do mundo digital, nossos alunos são ansiosos e imediatistas e esse é mais um dos desafios contemporâneos a serem superados pelos docentes da Matemática (Souza; Romão; Parteka, 2023, p.10).

Sob essa perspectiva, o professor em sala de aula deve constantemente buscar analisar e aprender os meios mais eficazes para se conectar com seus alunos, identificando alguns métodos para atingir os objetivos esperados em cada aula.

Certas abordagens exploradas no ensino da matemática possibilitam estimular e motivar os alunos a participarem ativamente do processo de construção do conhecimento, contrapondo a tendência de quererem, muitas vezes, alcançar resultados imediatos, negligenciando etapas importantes. A Investigação Matemática é uma dessas estratégias, oferecendo aos educadores uma abordagem distinta e inovadora que contribui significativamente para a prática educacional.

Os dados foram produzidos no contexto do estágio supervisionado, vinculado à disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado II e ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste/campus Cascavel-PR, realizamos trinta e quatro horas de atividades em uma escola técnica da rede pública estadual do Paraná na mesma cidade.

2 Investigação Matemática

Investigar, do latim, *investigare*. Significa segundo o dicionário Dicio(2009), “Examinar com cuidado, com diligência; aplicar-se na avaliação de; perscrutar: investigar a causa do problema”. Em termos educacionais, o ato de investigar implica em realizar uma pesquisa detalhada, promovendo assim uma aprendizagem mais efetiva e duradoura. Isso ocorre porque permite que o cérebro processe de maneira clara as informações aprendidas no momento da investigação. Na matemática não é diferente. Segundo Braumann (2002, p.5)

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar fazendo erros e aprendendo com eles (Braumann, 2005, p.5).

Em concordância com Braumann, conseguimos observar a importância de implementar a abordagem investigativa na sala de aula, para alcançar alguns resultados muitas vezes impossíveis com o método tradicional. A Investigação Matemática, coloca os alunos como protagonistas no processo de aprendizagem, incentivando-os a explorar,

questionar e construir ativamente o conhecimento matemático. Em contraste com a simples transmissão de informações, o professor assume o papel de facilitador, orientando os alunos em suas próprias descobertas e pesquisas.

Cada pessoa é um ser único, dotado de ideias e conceitos providos de sua própria criação. Na sala de aula não é diferente, cada aluno precisa de um olhar individual, que permita-o prosseguir caminhos desbravadores. Para isso, necessita-se permitir-lhe uma certa liberdade ao desbravar novos caminhos dentro da matemática. Segundo matéria do site Educacional (2022), “Na investigação, o mais importante é justamente o caminho. Esse processo de descoberta é muito amplo e, por mais que o professor tenha determinada intenção com àquela atividade, pode ser surpreendido com a trilha que os alunos percorrerem e com os resultados encontrados”.

Dessa forma, a prática da investigação matemática se configura como uma colaboração entre alunos e professores, estabelecendo e permitindo trajetórias para uma aprendizagem significativa.

Desde a infância as crianças têm um impulso em instigar, explorar e descobrir novas coisas. Isso está enraizado em cada indivíduo e foi o que proporcionou, muitas vezes, que grandes cientistas obtivessem grandes descobertas. Conforme Jucá e Pironel (2022, p. 16) abordam em sua obra

O trabalho com investigação matemática pode contribuir fortemente para a aprendizagem dos alunos em matemática, uma vez que os coloca como investigadores do conhecimento a ser construído, contribuindo não somente para o aumento da autoestima do aluno, mas também para o desenvolvimento das capacidades de se raciocinar em busca de soluções, de comunicar suas ideias e de argumentar matematicamente (Jucá; Pironel, 2022, p. 16).

É essencial considerar os benefícios da investigação matemática no contexto da geração Z, uma vez que oferece uma adaptação favorável ao processo de aprendizagem. Nesse sentido, de acordo com Souza et al (2023, p. 12), o papel do professor consiste em ser um facilitador do conhecimento, estimulando a reflexão diante dos desafios enfrentados e buscando constantemente aprimorar as metodologias e atividades utilizadas no ensino. Desse modo, a prática da investigação matemática não apenas enriquece o ambiente educacional, mas também prepara os alunos para enfrentarem desafios matemáticos, contribuindo para uma compreensão sólida e duradoura dos conceitos.

3 Vivência em sala de aula

Durante a regência do nosso curso de Licenciatura em Matemática, abordamos os conceitos da estatística descritiva em duas turmas do primeiro ano do Ensino Médio técnico, de cursos distintos. Apesar de se tratar do mesmo conteúdo, a metodologia e os exemplos trabalhados não foram os mesmos. Além disso, as turmas possuíam muitas diferenças. Entre as dis-

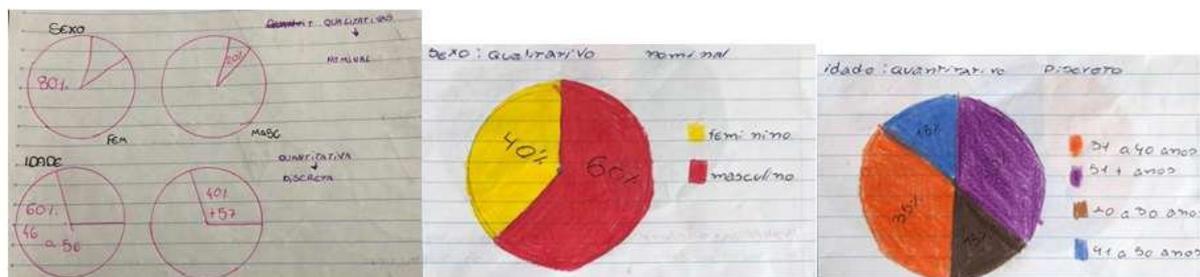
crepâncias podemos destacar o espaço e a localização das salas; a quantidade de estudantes; a predominância de sexo e o comportamento dos alunos.

A fim de preservar à identidade, nominaremos de turma A e turma B. A turma A, predominantemente composta por um público feminino e a turma B, masculino. Em termos metodológicos, trabalhamos de forma tradicional com a turma B e na turma A, mesclamos com a investigação matemática.

Ao longo das aulas, os discentes realizaram vários exercícios. Contudo, desconsiderando a nota dada pela organização do caderno, apenas duas atividades contaram como avaliativas. A partir delas, o desempenho das turmas começou a nos chamar atenção.

A primeira atividade avaliativa foi um trabalho coletivo que tomou como base uma pesquisa realizada anteriormente pelos alunos com funcionários da escola. Para o seu desenvolvimento, os alunos deveriam classificar as variáveis envolvidas na pesquisa e construir um gráfico de setores com os dados coletados. A Figura 1 apresenta alguns dos trabalhos realizados. Note que as informações eram referentes a dados gerais, como sexo e idade, e todos desenvolveram gráficos de setores para representar as respostas.

Figura 1 – Gráficos elaborados pelos alunos para os dados “sexo” e “idade”



Fonte: Arquivo das autoras

Na figura 1, mais à esquerda, temos uma interpretação equivocada do gráfico, pois para uma mesma variável, “sexo”, temos dois gráficos em que os valores correspondentes à 80% e 20%, respectivamente, divergem quanto ao espaço ocupado no gráfico. A imagem central, se aproxima mais do que esperávamos, no entanto não há uma precisão na elaboração. Para a variável quantitativa discreta, mais à direita da figura 1, por ter sido construído com instrumentos manuais, consideramos que apresenta a melhor representação em comparação com os outros gráficos.

Percebemos que, embora a classificação das variáveis estivesse correta, a interpretação dos dados e a elaboração dos gráficos não expressavam a precisão esperada para gráficos de setores. Mesmo sendo um conteúdo já trabalhado previamente (antes de estarmos na regência), os alunos mostraram pouca ou nenhuma preocupação com o rigor necessário à representação gráfica.

A segunda atividade era composta por três questões sobre as medidas de dispersão amplitude, desvio médio, desvio padrão e variância, sendo elas apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Atividade avaliativa

1. A respeito das medidas estatísticas denominadas amplitude e desvio médio, marque V para verdadeiro e F para falso, justificando sua decisão.
- a) () Em estatística, não existem diferenças entre desvio e desvio padrão, exceto pelo nome.
 - b) () A amplitude é uma medida de tendência central usada para encontrar um único valor que representa todos os valores de um conjunto.
 - c) () O desvio é um número relacionado à dispersão total de um conjunto de valores.
 - d) () A amplitude é uma medida de dispersão calculada sobre cada um dos valores de um conjunto de informações.
 - e) () O desvio é uma medida de dispersão calculada sobre cada um dos valores de um conjunto de informações.

2. Durante a coleta de dados de um determinado conjunto, percebeu-se que todos os elementos do conjunto possuíam o mesmo valor. Nessas condições, quanto valerá o desvio padrão desse conjunto? Justifique sua resposta e dê um exemplo.

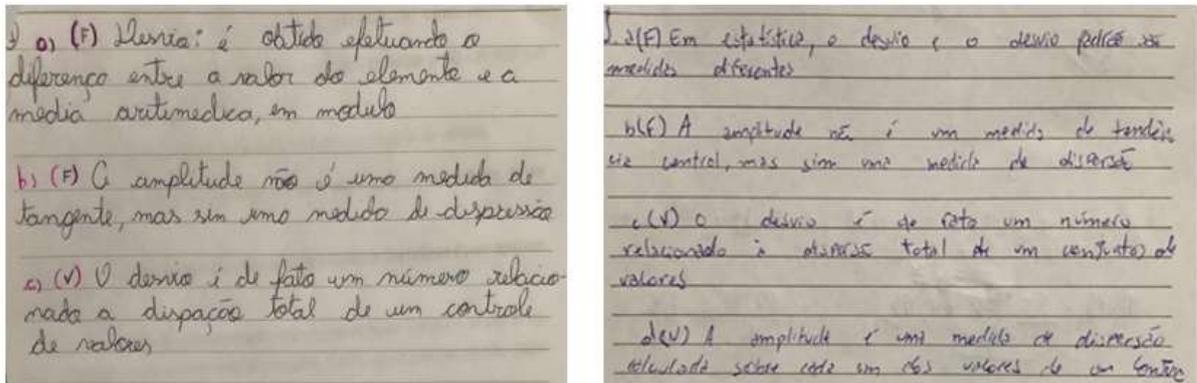
3. As notas obtidas em uma prova da universidade na disciplina de Cálculo foram:

Aluno	Nota
Kárita	9,5
Júlia	8,9
Natália	5,5
Thiago	8,2
Marina	7,4
Mariana	10
Lara	4,3
Gabriela	4,7
Pedro	5,5
Raul	7,2

Analisando a tabela calcule quanto vale, aproximadamente, a amplitude e o desvio padrão dessas notas.

Os alunos foram instruídos a efetuar as resoluções em uma folha separada e entregar às estagiárias. A seguir estão algumas das atividades realizadas.

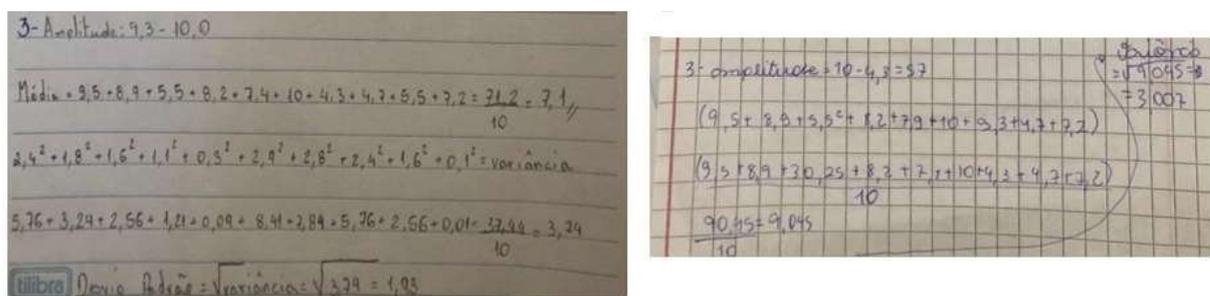
Figura 2 – Trabalhos dos alunos



Fonte: Arquivo das autoras

Na figura 2 temos os exemplos de algumas respostas à primeira questão, aqui, independente da metodologia utilizada, as respostas nem sempre eram condizentes com o questionamento solicitado. Na primeira questão, pedia para verificar a veracidade da afirmação, e caso considerasse falso, deveria apresentar uma justificativa. Para a alternativa “a”, “Em estatística, não existem diferenças entre desvio e desvio padrão, exceto pelo nome”, na imagem à direita, o estudante apenas reescreveu a afirmação, alegando apenas que são diferentes. Na imagem à esquerda, apenas trouxe a definição de um dos conceitos. Ambos os casos, nos causaram estranheza pela ausência de preocupação em satisfazer às condições solicitadas nas questões, o que se perpetuou por quase todas as questões mais teóricas.

Figura 3 – Trabalhos dos alunos



Fonte: Arquivo das autoras

Atribuímos a pouca ou nenhuma preocupação com a completa resolução e/ou qualidade das respostas ao imediatismo predominante nesta geração. Veja na figura 2, a atividade propunha que fosse calculado a amplitude e o desvio padrão, na imagem mais à esquerda, para a amplitude, o aluno apenas “montou a continha” sem expressar a resposta.

Já havíamos constatados que as turmas funcionavam de forma diferente e isso é normal, afinal, cada aluno tem suas especificidades. No entanto, quando realizamos as correções de ambas as atividades avaliativas ficamos surpresas. Uma das turmas se saiu muito melhor do que a outra. Uma possível facilidade ou dificuldade mais evidente para um dos lados? Talvez. Essa dúvida circulou em nossas mentes e optamos por analisar às situações mais a fundo. Após relermos o planejamento das aulas e conversando com nossa orientadora, percebemos que uma das razões poderia ser a metodologia utilizada.

Em uma das turmas (B), a que se saiu melhor, estávamos realizando exemplos similares às atividades avaliativas antes de aplicá-las. Isto é, os alunos reproduziam aquilo que já haviam visto e registrado, um processo claramente mais fácil. Por outro lado, na outra turma (A) procuramos construir o caminho na própria atividade, ou seja, esperávamos que os alunos desenvolvessem suas próprias estratégias, e não apenas reproduzissem o método do professor.

Nesse caso, acreditamos que os alunos não estavam habituados em trabalhar com a Investigação Matemática e apresentavam, também, dificuldades na matemática básica. Por isso o desempenho dessa turma acabou sendo, de modo geral, baixo.

Conclusões

A experiência oportunizada pelo estágio foi mais um confirmativo de que educar na geração Z é um dos maiores desafios a serem superados pelos docentes de Matemática. Como já sabemos, o processo de assimilação e construção do conhecimento é longo e nossos alunos são impacientes. Além disso, estão acostumados a ter uma grande quantidade de informações rápidas disponíveis, sem precisar de muito esforço. Portanto, quando são apresentadas propostas que exigem mais dedicação, persistência e tempo recebemos como resposta desânimo e desistência.

Em ambas as turmas lecionadas durante a regência, trabalhamos o mesmo conteúdo e buscamos proporcionar um ensino dinâmico e significativo. Entretanto, ao utilizar metodologias distintas constatamos que o desempenho de uma turma foi muito superior ao da outra.

Um dos motivos que contribuiu para esse resultado foi a utilização da Investigação Matemática em algumas aulas. Os alunos não estavam acostumados em tecer estratégias e construir um caminho de resolução por si só, mesmo com a tecnologia ao seu favor. Esse tipo de situação confirma a dificuldade da geração atual em construir o conhecimento. Nesse sentido, quando paramos para pensar na outra turma, que por sua vez teve contato com uma me-

metodologia mais “tradicional” e se saiu melhor, nos questionamos se isso também aconteceria caso as metodologias fossem invertidas.

Temos ciência de que, atuando como estagiárias, não pudemos avaliar as respostas e a evolução das turmas para além do estágio. Ainda assim, a experiência adquirida ao longo das aulas nos levou a observar relevantes indicativos de uma mascarada aprendizagem significativa. Esse relato também sugere uma possível direção para o ensino nos próximos anos e deixa algumas dúvidas sobre qual o papel do professor nesse cenário.

Referências

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. D. (Org.). *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. Coimbra: 2002. p. 5-24.

INVESTIGAR. In: **DICIO**, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, c2009. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/investigar/>. Acesso em: 29 abr. 2024.

Investigação Matemática: o que é, qual a importância e como fazer. Educacional, ecossistema de tecnologia e informação, 2022. Disponível em: <https://educacional.com.br/steam/investigacao-matematica-o-que-e-qual-a-importancia-e-como-fazer/#>. Acesso em: 15 dez. 2023.

JUCÁ, Roseneide de Sousa; PIRONEL, Márcio. **Investigação matemática: um caminho para o ensino da matemática**: Mathematical Research a Pathway to Teaching Mathematics. Revista Cocar, [S. l.], n. 14, 2022. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5499>. Acesso em: 13 dez. 2023.

OLIVEIRA, Alyson Fernandes de; ROSA, Dalva Eterna Gonçalves. **A estatística no ensino médio: em busca da contextualização**. Zetetike, Campinas, SP, v. 28, 2020. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8657024>. Acesso em: 13 dez. 2023.

SOUZA, Ana Alice de; ROMÃO, Milena Maciel; PARTEKA, Stephany Amanda, **Geração Imediatista: os desafios no ensino da Matemática**. *Matemática - Unioeste - Campus de Cascavel*, p. 8-16, 2023. Disponível em: <https://dmat-unioeste.mat.br/files/estagios/regencia%20Ana,%20Milena%20e%20Stephany.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2023.

SOUZA, Anthony. **Quando começa a Geração Z?** Tudoep, 23 abr. 2024. Disponível em: <https://www.acidadeon.com/tudoep/tudo-inovacao/quando-comeca-a-geracao-z/>. Acesso em: 29 abr. 2024.

Demonstração da área e perímetro da circunferência por meio de triangulações inscritíveis e circunscritíveis

Alexsandro A. A. de Freitas
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
alexsandro.freitas@unioeste.br

Anderson David Torres da Costa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
anderson.costa@unioeste.br

Milena Maciel Romão
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
milena.romao@unioeste.br

Stephany Amanda Parteka
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
stephany.parteka@unioeste.br

Prof. Dra. Andréia Buttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
andbciani@gmail.com

Resumo: Este trabalho apresenta demonstrações para a área e o perímetro da circunferência utilizando triângulos inscritos e circunscritos. A abordagem geométrica visa proporcionar uma compreensão visual e intuitiva dos conceitos fundamentais envolvidos, revelando a relação entre a geometria do círculo e a fórmula da área e perímetro.

Palavras-chave: Circunferência; cálculo infinitesimal; triangulações.

1 Introdução

Desde o início da civilização, o ser humano tem interesse em calcular áreas e volumes de superfícies. Entre outros motivos, para delimitar um pedaço de terra ou dividi-lo em partes iguais. Devido ao baixo rigor matemático, por um longo período de tempo o cálculo de áreas irregulares, muito pequenas ou muito grandes era dado intuitivamente.

De acordo com Boyer (1974),

Se de uma grandeza qualquer se subtrair uma parte não menor do que sua metade, e do resto se subtrair não menos do que sua metade, e assim se prosseguir, restará ao final, uma grandeza menor do que qualquer grandeza da mesma espécie (Boyer, 1974, p. 67).

A partir dessa ideia surgiu o método da exaustão, através do qual era possível trabalhar de forma finita e precisa no cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

Entretanto, é apenas por volta do século XVII que é desenvolvida uma teoria abrangendo valores infinitos: o cálculo infinitesimal. Segundo Ramos (2016), a teoria do cálculo infinitesimal surge com base em resultados algébricos e geométricos de vários matemáticos, entre eles: Fermat (1601 - 1665 d.C), Barrow (1630 - 1677 d.C), Newton (1643 - 1727 d.C) e Leibniz (1646 - 1716 d.C).

Newton e Leibniz introduziram concepções distintas, mas válidas, para os infinitésimos.

Os infinitésimos de Leibniz estão fortemente associados com a lógica e a metafísica, enquanto que os infinitésimos de Newton apresentam forte motivação e conexão com a física e os fenômenos naturais. (Carvalho; D’ottaviano, 2006, p. 2).

À vista disso, para Oliveira (2016, p. 10), ”A partir dessa invenção, a matemática criativa passou a um plano superior, finalizando a história da matemática elementar.”

Na disciplina optativa Ideias Fundamentais do Cálculo, ministrada pela quinta autora, fomos desafiados e incentivados a demonstrar as fórmulas da área e comprimento da circunferência a partir da definição de integral, a qual envolve o limite de uma soma.

Sob essa perspectiva, apresentamos nesse trabalho as demonstrações da área e do perímetro da circunferência como uma aplicação do cálculo infinitesimal. Descrevemos a ideia intuitiva e realizamos os cálculos utilizando o conceito de limite.

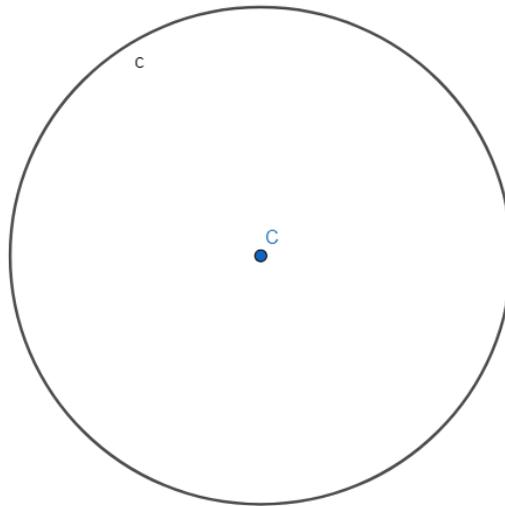
2 Demonstrações

2.1 Área da circunferência por triângulos inscritos

A área da circunferência é um conceito fundamental na geometria, frequentemente representado pela fórmula $A = \pi r^2$, onde “A” é a área e “r” é o raio do círculo. No entanto, entender a origem dessa fórmula pode ser intrigante. Nesta seção, exploraremos uma abordagem visual e geométrica para determinar a fórmula da área do círculo utilizando triangulações inscritas. Ao decompor o círculo em uma série de triângulos, podemos ilustrar de forma clara e intuitiva como a área do círculo emerge dessas construções geométricas.

Para isso, consideremos uma circunferência c com centro C , como na Figura 1.

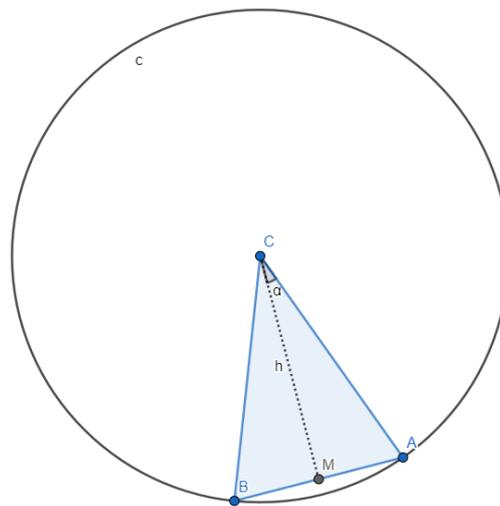
Figura 1: Circunferência centrada em C .



Fonte: Criada pelos autores.

Veja que ao inscrevermos um triângulo isósceles ABC nessa circunferência, obteremos algo do tipo:

Figura 2: Circunferência com um triângulo inscrito.



Fonte: Criada pelos autores.

Onde h é a altura do triângulo, A , B e C são os vértices e M é o ponto médio do segmento \overline{AB} .

Sabemos que a área de um triângulo qualquer de base b e altura h qualquer é dada por:

$$A_{\Delta} = \frac{bh}{2}.$$

Para o triângulo ABC , das relações trigonométricas fundamentais e percebendo que os

segmentos \overline{AC} e \overline{BC} são iguais ao raio r da circunferência, temos que:

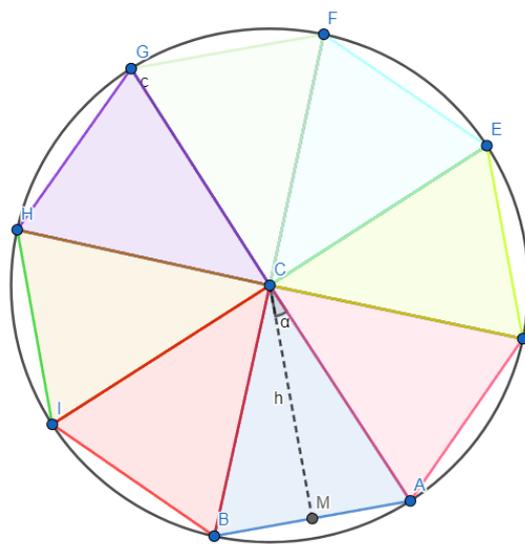
$$\cos(\alpha) = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r \cos(\alpha).$$

Usando o mesmo raciocínio para a base b , chegamos que:

$$b = 2r \sin(\alpha).$$

Perceba o que acontece se inscrevermos mais triângulos na circunferência:

Figura 3: Circunferência com vários triângulos inscritos.



Fonte: Criada pelos autores.

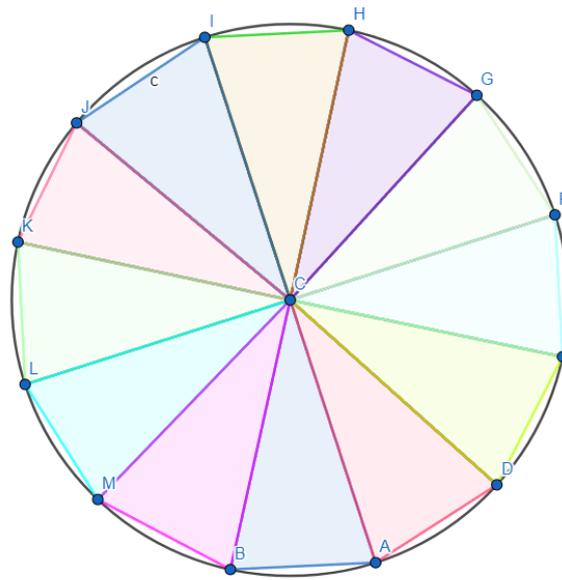
Veja que a área da circunferência é igual a soma das áreas dos triângulos acrescida da soma das áreas que não são cobertas pelos triângulos. Perceba ainda que, como uma circunferência qualquer tem 360° e $360^\circ = 2\pi rad$, podemos escrever o ângulo α como:

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

em que n é número de triângulos inscritos.

Agora, perceba que quanto mais triângulos inscrevemos na circunferência, menor é a soma das áreas não cobertas pelos triângulos e, conseqüentemente, mais próxima a soma das áreas dos triângulos fica da área da circunferência, como podemos ver na Figura 4.

Figura 4: Circunferência com vários triângulos inscritos.



Fonte: Criada pelos autores.

Sendo assim, podemos afirmar que a área A_c da circunferência será dada pela soma das áreas dos triângulos quando tivermos um número n de triângulos tendendo ao infinito. Vejamos,

$$A_c = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{bh}{2} \right)$$

$$A_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(r \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) \left(2r \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)}{2}$$

$$A_c = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)$$

$$A_c = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{1}{n}}$$

Aplicando L'Hôpital

$$A_c = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\sin^2 \left(\frac{\pi}{n^2} \right) \right) \left(-\cos^2 \left(\frac{\pi}{n^2} \right) \right)}{-\frac{1}{n^2}}$$

Simplificando os termos n^2 , colocando π em evidência e em seguida, retirando-o do limite, já que é constante em relação a n , ficamos com:

$$A_c = r^2 \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

Aplicando a relação fundamental da trigonometria: $\sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) = 1$, temos

$$A_c = \pi r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} 1$$

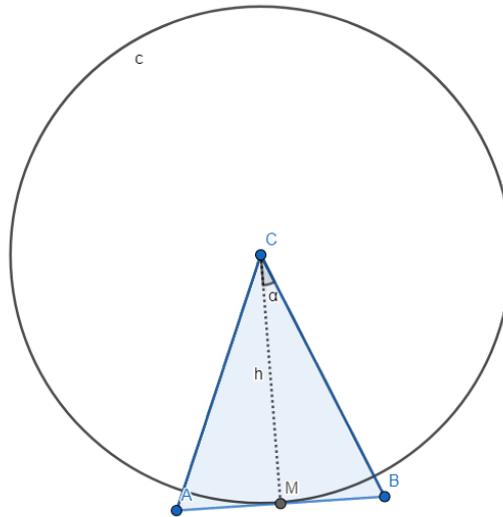
$$A_c = \pi r^2.$$

Concluimos que a conhecida fórmula é de fato a área da circunferência.

2.2 Área da circunferência por triângulos circunscritos

Para a demonstração usando triângulos circunscritos, temos um caso muito parecido com o anterior. Veja, quando circunscrevemos um triângulo isósceles ABC na circunferência c , obtemos algo do tipo:

Figura 5: Circunferência com um triângulo isósceles circunscrito.



Fonte: Criada pelos autores.

Em que h é a altura do triângulo, A , B e C são os vértices e M é o ponto médio do segmento \overline{AB} .

Como vimos, a área de um triângulo qualquer de base b e altura h é:

$$A_{\Delta} = \frac{bh}{2}.$$

Daí,

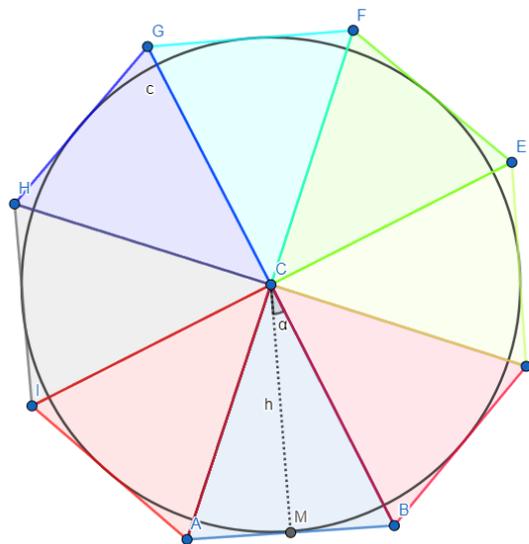
$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{b}{2}}{r} \Rightarrow b = 2r \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

donde,

$$A_{\Delta} = r^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Agora, quando circunscrevemos mais triângulos na circunferência, temos:

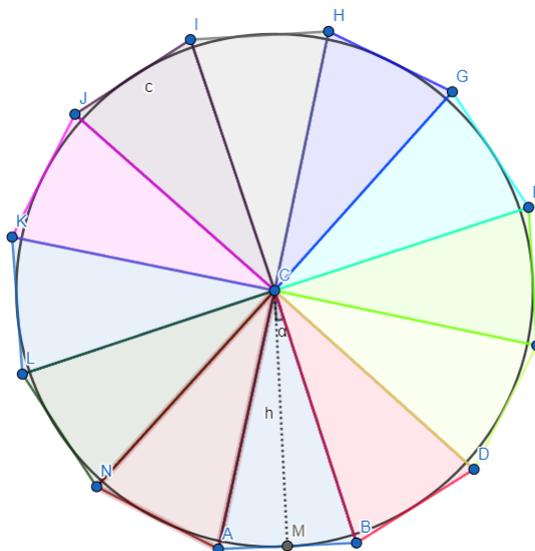
Figura 6: Circunferência com vários triângulo isósceles circunscrito.



Fonte: Criada pelos autores.

Analogamente ao caso dos triângulos inscritos, temos que quanto mais triângulos circunscrevemos, mais próxima a soma das áreas dos triângulos fica da área da circunferência.

Figura 7: Circunferência com vários triângulo isósceles circunscrito.



Fonte: Criada pelos autores.

Então se circunscrevemos um número n suficientemente grande de triângulos, intuimos que a soma das áreas do triângulos será igual ou tão próxima quanto quisermos da área da circunferência.

Veja,

$$A_c = \lim_{n \rightarrow \infty} nr^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$A_c = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$A_c = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Sabemos que $\frac{d}{dx} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ é $\sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Logo, aplicando L' Hôpital

$$A_c = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-\pi}{n^2} \sec^2 \frac{\pi}{n}}{\frac{-1}{n^2}}$$

$$A_c = r^2 \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$A_c = \pi r^2.$$

2.3 Perímetro da circunferência

O perímetro nada mais é do que a medida do contorno de figuras geométricas, obtido por meio da soma dos lados. No caso da circunferência, seu perímetro é dado pela fórmula:

$$C = 2r\pi$$

onde π é uma constante, r o raio da circunferência e C o comprimento do contorno da circunferência.

Para demonstrar que esta fórmula é válida faremos o uso de uma abordagem geométrica, utilizando triângulos inscritos na circunferência.

Observe na Figura 3 que a soma dos lados $BA + AD + DE + EF + FG + GH + HI + IB$ nos dará um valor aproximado do perímetro da circunferência. Com um olhar intuitivo, podemos imaginar que teremos uma melhor aproximação somando os lados dos triângulos se acrescentarmos mais triângulos na circunferência, como na Figura 4.

Para encontrar o valor do lado do triângulo (isósceles), tomaremos o ângulo α da Figura 3. Assim,

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

em que n é o número de triângulos isósceles inscritos na circunferência.

Dessa forma, temos a relação do lado com o ângulo do triângulo:

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{AM}{AC}.$$

Como AC é o raio r , temos que o lado AM vale:

$$AM = r \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Usando a definição de triângulo isósceles, sabemos que a bissetriz CM divide ao meio o lado AB , logo $AB = 2AM$.

Portanto $AB = 2r \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Para determinar o perímetro da circunferência, basta multiplicarmos AB pelo número n de lados dos triângulos isósceles na circunferência. De fato,

$$C = n2r \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Nesse sentido, consideramos a priori um número finito de triângulos. No entanto, utilizando o conceito de limite, podemos expandir a fórmula para abranger um número de triângulos tão grande quanto se queira, de modo a se aproximar mais precisamente do valor do comprimento da circunferência.

De fato,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} n2r \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2r \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$C = 2r \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$C = 2r \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-\pi}{n^2} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{-1}{n^2}}$$

$$C = 2r \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$C = 2\pi r \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$C = 2\pi r.$$

Portanto, temos que o perímetro da circunferência é de fato, a soma dos lados de n triângulos, quando n é suficientemente grande.

3 Considerações finais

Neste trabalho, demonstramos que a área da circunferência pode ser determinada a partir da soma das áreas dos triângulos inscritos, quando n é suficiente grande. De forma similar, calculamos a região utilizando triângulos circunscritos e verificamos que a fórmula coincide.

Ademais, para mostramos que o perímetro da circunferência é obtido pela fórmula $C = 2\pi r$, consideramos a soma dos lados de infinitos triângulos inscritos.

Percebemos assim, a importância do cálculo infinitesimal para realizar demonstrações importantes dentro da Matemática. Além disso, podemos estabelecer comparações com outros resultados, como o Teorema Fundamental do Cálculo. Essa ideia pode ser estendida, também, para outras figuras geométricas, confirmando a validade da fórmula e enriquecendo nossa aprendizagem.

4 Referências bibliográficas

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARVALHO, Tadeu Fernandes de; D'OTTAVIANO, Itala M. Loffredo. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.8, n.1, p.13-43, 2006.

MACEDO, Amanda de Fátima Mello; BACH, Raquel Toledo; LENARDON, Samanta Zanela; CIANI, Andréia Buttner. Um exemplo de matematização. In: **ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - EPREM**. Campo Mourão: Sbem-Paraná, 2014. p. 1-8. Disponível em:
<https://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/MINICURSOS/autores/MCA005.pdf>.
Acesso em: 04 fev. 2024.

OLIVEIRA, Gleidson José Dumont. **A utilização do Cálculo Diferencial e Integral para estender os cálculos de áreas de figuras planas e comprimentos de curvas no plano**. Dissertação de mestrado - Universidade Federal da Paraíba, p. 96, João Pessoa, 2013.

RAMOS, Pedro Lima. Os primórdios do cálculo infinitesimal. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. ISSN 2316-9664, p. 1-11, v. 8, 2016.

Heurísticas para o problema de caminho mínimo visitando nós específicos

Erika Diana Alves de Oliveira
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
diana.2001.alves@gmail.com

Amarildo de Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
amarildo.vicente@gmail.com

Resumo: O problema de caminho mínimo visitando nós específicos é um importante desafio na Otimização Combinatória. Trata-se de um problema em que é necessário sair de um vértice inicial e chegar em um vértice final em um grafo, sendo que entre esse dois pontos há nós que precisam ser visitados. Alguns exemplos de aplicações práticas desse problema são logística de entregas, mapeamento de redes e rotas turísticas. Na literatura existem provas de que este tipo de problema é um NP-Completo, e portanto não existem algoritmos exatos que garantam a solução em um tempo polinomial. Neste trabalho serão abordadas duas heurísticas que apresentam uma solução satisfatória para este problema.

Palavras-chave: Algoritmo de Dijkstra; Caminho mínimo; Rotas com nós obrigatórios.

1 Introdução

O problema de caminho mínimo visitando múltiplos nós, em inglês *Multi-Points Shortest Path Problem*, consiste na busca do menor caminho entre dois vértices, passando por nós específicos. Este problema apresenta um vasto campo de aplicação, como por exemplo, na logística de entregas, na qual o entregador deve escolher a rota mais rápida passando pelos pontos de entrega.

Entretanto, apesar das inúmeras aplicações, Gomes *et al.* (2015) afirma que este problema não tem recebido muita atenção e poucos trabalhos surgiram desde a primeira publicação desenvolvida na área.

De acordo com Vardhan *et al.* (2009) se o conjunto de nós obrigatórios for unitário, então este problema pode ser resolvido usando algoritmos de fluxo máximo com limite inferior, como por exemplo o algoritmo *Edmonds e Karp* que pode ser encontrado em Goldbarg (2000). Entretanto, se o conjunto de nós obrigatórios for maior ou igual a dois tal método não se aplica e não há um algoritmo exato que resolva este problema em tempo polinomial, sendo assim considerado um problema NP-Completo.

Para Goldbarg (2000) problemas deste tipo requerem o uso de Heurísticas, termo derivado do grego "*heuriskein*" que significa descobrir.

Uma heurística é um procedimento algorítmico desenvolvido através de um modelo cognitivo, usualmente através de regras baseadas na experiência dos desenvolvedores. Ao contrário dos métodos exatos, que buscam encontrar uma forma algorítmica de achar uma solução ótima através da combinação ou busca de todas as soluções possíveis, as heurísticas normalmente tendem a apresentar um certo grau de conhecimento acerca do comportamento do problema, gerando um número muito menor de soluções. (CORDENONSI, 2008, p. 31)

Neste trabalho serão abordadas duas heurísticas, a primeira delas, denominada Heurística 1, é baseada no trabalho de Adnan, Abood e Abdulmuhsin (2020), que em resumo aplica o algoritmo Dijkstra diversas vezes até que todos os nós sejam visitados. Já a segunda heurística, chamada de Heurística 2, é fundamentada na força bruta, em que são realizadas todas as possíveis combinações entre os nós obrigatórios, e paralelamente utiliza o algoritmo Dijkstra para encontrar o menor caminho para cada possível rota entre o nó inicial e o nó final. A solução será a rota que apresentar o menor custo e, dependendo do problema, pode haver mais de uma solução.

2 Conceitos Básicos

As definições a seguir foram retiradas dos textos de Goldberg (2000), Rosen (2010) e Netto (2011).

Definição 1. Um grafo é uma estrutura $G = (V, E)$, sendo V o conjunto de vértices ou nós e E o conjunto de arestas.

Definição 2. Um grafo é denominado orientado quando suas arestas possuem uma direção.

Quando as arestas de um grafo são associadas a um valor, este grafo recebe o nome de **grafo valorado ou ponderado**. Dependendo do contexto do problema esses valores podem representar diversas informações, como distâncias, custos, tempos, entre outros. O valor associado a cada aresta é denotado por $w(e)$, sendo e a aresta em questão.

Definição 3. A Matriz de Custo $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ do grafo $G = (V, E)$ é definida da seguinte maneira:

$$c_{ij} = \begin{cases} w(e) & \text{se existe uma aresta } (i, j) \in E \\ 0 & \text{se não existe uma aresta } (i, j) \in E \end{cases}$$

sendo $w(e)$ o custo da aresta $e = (i, j)$.

Definição 4. um *passaio* é uma sequência de vértices, onde cada vértice é conectado, por uma aresta, com o vértice anterior, com exceção do primeiro. Essa família de vértice representa uma rota ou um caminho de um vértice ao outro. Existem diferentes tipos de percursos, os mais comuns são os caminhos, ciclos e circuitos.

Definição 5. Uma *Cadeia de arestas* é uma sequência de arestas, onde todas elas são distintas, isto é, as arestas não se repetem.

Definição 6. Um *Caminho* é uma sequência de arestas em que os nós não se repetem.

O *Comprimento do Caminho* de um grafo não valorado é o número de arestas utilizadas para o trajeto. Já em grafos valorados, esse comprimento é dado pela soma dos pesos ou distância das arestas do percurso.

Definição 7. A *Distância* entre dois vértices $i, j \in V$ de um grafo valorado e não orientado é dada pela seguinte função:

$$d : P_2(V) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \min_{u_{ij} \in V_{ij}} V(u_{ij}) & \text{se } V_{ij} \neq \emptyset \\ \infty & \text{se } V_{ij} = \emptyset \end{cases}$$

onde,

- $P_2(V)$ é o conjunto das combinações dois a dois dos elementos de V .
- u_{ij} é o caminho do vértice i ao vértice j .
- V_{ij} é o conjunto dos caminhos de origem em i e destino j .
- $V(u_{ij})$ é o comprimento do caminho de i a j .

A Matriz de distâncias $D = [d_{ij}]$ de um grafo, é formada pelas distâncias mínimas de todos os pares de vértices. Essa matriz é comumente utilizada em algoritmos de otimização, como por exemplo o Algoritmo Dijkstra, que busca o menor caminho entre dois vértices (GOLDBARG, 2000).

3 Aplicação Prática

Hoje em dia é comum fazer pedidos em supermercados por aplicativos de compras. Um funcionário do estabelecimento, ao receber o pedido, precisa percorrer as seções (como frios e laticínios, higiene e limpeza, hortifrutti, padaria, entre outros) a fim de recolher os produtos de forma eficiente para economizar tempo. Essa estratégia intuitiva pode ser comparada com o problema de caminho mínimo passando por nós específicos.

Para simular esta situação foi construído um grafo baseado no espaço interno de um supermercado fictício, ver Figura 1. Os nós do grafo são pontos escolhidos no corredor de forma a facilitar o acesso aos produtos. As arestas são os corredores e os pesos das arestas são dados pelas distâncias entre os nós.

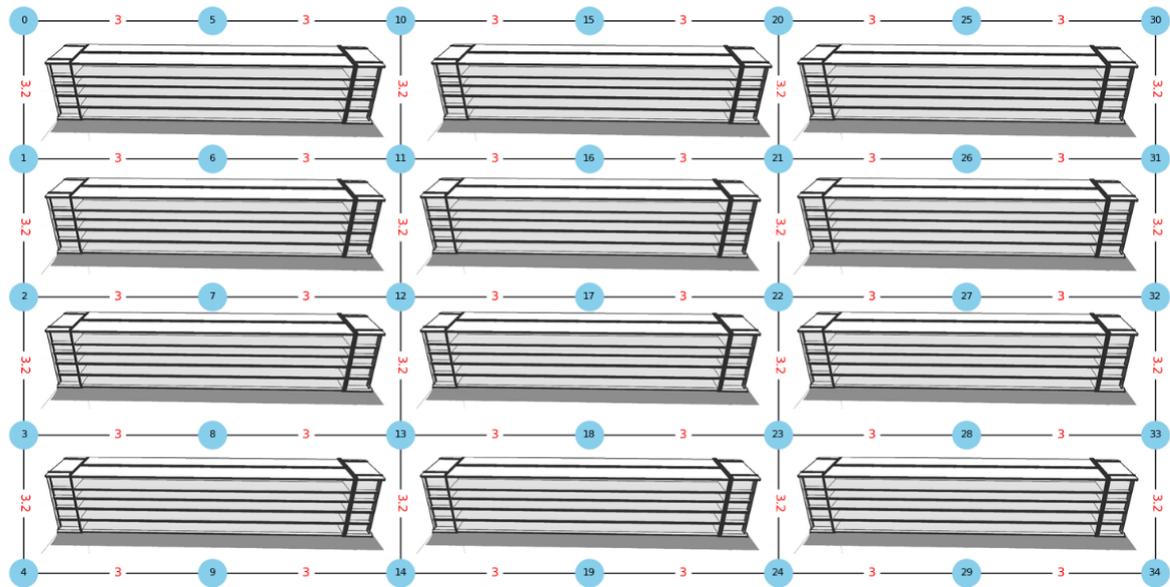


Figura 1: Aplicação prática

Fonte: Autores

4 Heurísticas

Heurística 1

A Heurística 1, baseada no trabalho de Adnan, Abood e Abdulmuhsin (2020), considera um grafo $G(V,E)$ e $A \subset V$ um conjunto de nós obrigatórios. Nessa heurística é aplicado o algoritmo Dijkstra saindo da origem para todos os nós de V . Entre os nós obrigatórios, seleciona-se o nó mais próximo a_1 . Esse vértice é retirado do conjunto de nós obrigatórios e então traça-se a rota da origem até ele. Posteriormente esta rota é adicionada ao caminho final. Então a_1 é considerado como nova origem e esse procedimento é repetido até que todos os nós obrigatórios sejam adicionadas ao caminho.

Heurística 2

A Heurística 2 é conhecida na literatura como heurística de força bruta, sendo citada por Vardhan *et al.* (2009).

Nessa abordagem é aplicado o algoritmo Dijkstra com origem em cada um dos vértices do grafo, para construir a matriz com as distâncias mínimas entre todos os pontos. O elemento (i, j) é dado pelo caminho de menor comprimento entre os nós i e j . O grafo do problema em questão é não orientado e portanto essa é uma matriz simétrica.

Em paralelo são construídas as possíveis combinações entre os nós obrigatórios e nestas combinações são adicionados o nó de origem e o nó final. Por exemplo se $A = (a, b, c)$, i é o vértice inicial e f o vértice final, as possíveis combinações e as rotas com os nós inicial e final

inclusos são:

$$(a, b, c) \rightarrow (i, a, b, c, f)$$

$$(a, c, b) \rightarrow (i, a, b, c, f)$$

$$(b, a, c) \rightarrow (i, b, a, c, f)$$

$$(b, c, a) \rightarrow (i, b, c, a, f)$$

$$(c, a, b) \rightarrow (i, c, a, b, f)$$

$$(c, b, a) \rightarrow (i, c, b, a, f)$$

Na sequência calcula-se a distância para cada uma das rotas destas combinações. A solução será a rota com a menor distância.

5 Resultados e discussões

A fim de comparar as duas heurísticas foram realizados testes com 10 conjuntos de diferentes nós obrigatórios, podendo variar a quantidade dos elementos desse conjunto, em relação à Figura 1.

A Tabela 1 a seguir apresenta os dados utilizados e os resultados das interações da Heurística 1 e 2. Na coluna 2, são apresentados os conjuntos de vértices obrigatórios empregados e na coluna 3 e 4 as distâncias a serem percorridas, em metros, resultantes da Heurística 1 e 2, respectivamente. Como pode ser visto, em geral a Heurística 2, que faz uso de permutações, apresenta melhores resultados do que a Heurística 1, exceto nos casos 4 e 6 onde tais resultados foram idênticos.

Tabela 1: Testes efetuados com diferentes conjuntos de nós obrigatórios

Casos	Vértices obrigatórios								Heurística 1	Heurística 2 (Permut)
1	10	12	22	23	19	33	-	-	48.8	43.2
2	5	7	11	18	33	29	19	-	54.8	49.2
3	2	12	14	15	21	23	-	-	62.4	55.6
4	4	11	17	19	22	23	-	-	54.8	54.8
5	6	7	13	20	26	29	-	-	68.4	54.8
6	4	8	14	12	15	22	18	24	60.8	60.8
7	1	7	10	16	18	23	25	29	60.8	61.6
8	4	10	14	16	19	-	-	-	54.8	48.8
9	7	11	18	16	21	25	-	-	67.6	54.8
10	2	10	14	17	23	28	29	-	79.6	60.8

As Figuras 2 e 3 representam o caminho resultante pela Heurística 1 e 2, respectivamente, para o primeiro conjunto de vértices obrigatórios da Tabela 1. Os pontos em vermelho são os

nós inicial e final, e o pontos em verde são os nós obrigatórios. O caminho obtido está colorido de amarelo. Nota-se que em alguns casos a aresta se repete.

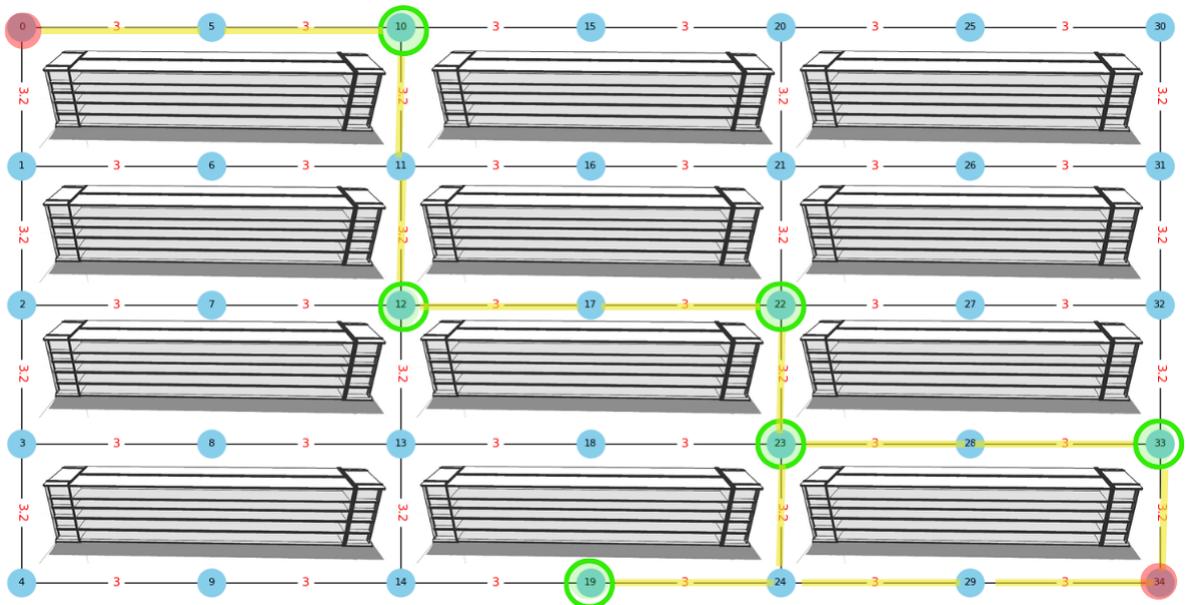


Figura 2: Heurística 1: [0, 5, 10, 11, 12, 17, 22, 23, 28, 33, 28, 23, 24, 19, 24, 29, 34]

Fonte: Autores

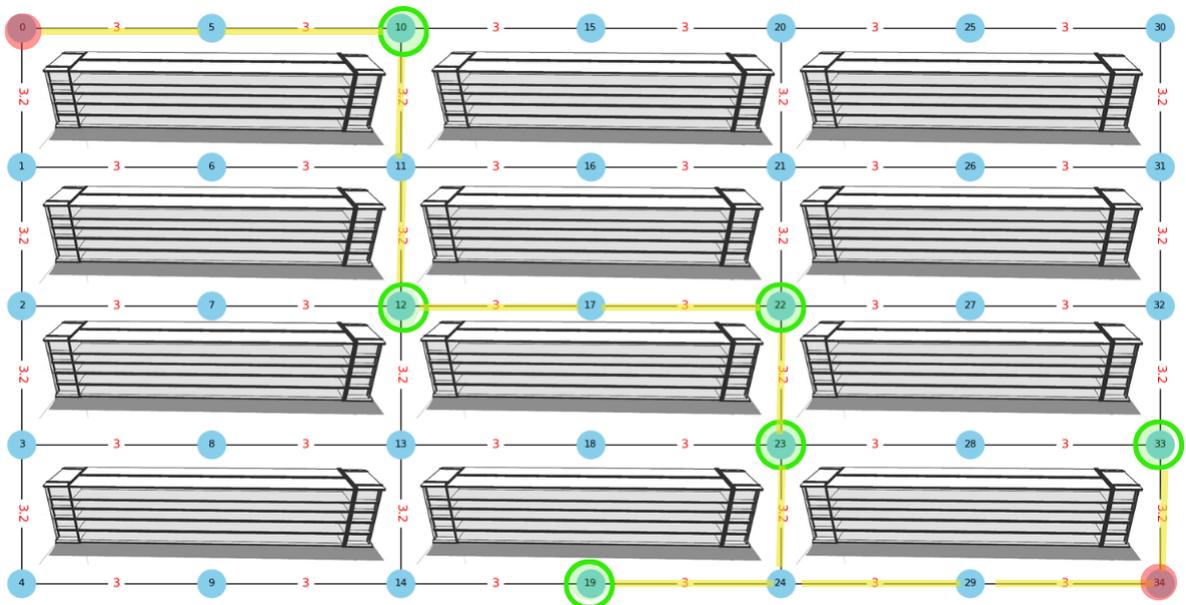


Figura 3: Heurística 2: [0, 5, 10, 11, 12, 17, 22, 23, 24, 19, 24, 29, 34, 33, 34]

Fonte: Autores

Conclusões

As Heurísticas são ferramentas valiosas para resolver problemas NP-árduos. Neste trabalho foram abordadas duas heurísticas que resolvem de maneira satisfatória o problema de caminho mínimo com nós específicos.

Nos dois casos é observada a repetição de vértices, fato que ocorre porque o algoritmo Dijkstra é reiniciado diversas vezes durante o processo e as heurísticas não consideram quais vértices já estão inclusos no caminho. Esta repetição não é um problema, ao contrário, ela deve ser admitida a fim de que o problema sempre tenha solução. Entretanto, os vértices obrigatórios não se repetem, e isso faz com que as soluções apresentadas não sejam as melhores possíveis (portanto ambos são heurísticas).

Referências

ADNAN, S.; ABOOD enas W.; ABDULMUHSIN, W. The multi-point delivery problem: Shortest path algorithm for real roads network using dijkstra. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 1530, n. 1, p. 12–40, 5 2020. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1530/1/012040>. Acesso em: 11 abril 2024.

CORDENONSI, A. Z. **Ambientes, objetos e dialogicidade: uma estratégia de ensino superior em heurísticas e metaheurísticas**. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BR-RS, 2008. Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Disponível em: http://www-usr.inf.ufsm.br/~andrezc/publicacoes/tese_andre_cordenonsi.pdf. Acesso em: 11 abril 2024.

GOLDBARG, M. C. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

GOMES, T. et al. Protected shortest path visiting specified nodes. In: **7th International Workshop on Reliable Networks Design and Modeling (RNDM 2015)**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 120–127. DOI =10.1109/RNDM.2015.7325218. Acesso em: 11 abril 2024.

NETTO, P. O. B. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmo**. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2011.

ROSEN, K. H. **Matemática discreta e suas aplicações**. 6. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2010.

VARDHAN, H. et al. Finding a simple path with multiple must-include nodes. In: **17th Annual**

Meeting of the IEEE/ACM International Symposium on Modelling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunication Systems, MASCOTS 2009, September 21-23, 2009, South Kensington Campus, Imperial College, London, UK. [S.l.]: IEEE Computer Society, 2009. p. 1 – 3. DOI = 10.1109/MASCOT.2009.5366808. Acesso em: 11 abril 2024.

O uso do algeplan para o ensino de polinômios

Ruan Pablo Pfeffer Gallio

UNIOESTE

ruangallio1@gmail.com

Milena Yumi Higashi

UNIOESTE

myumi.higashi@gmail.com

Shimmer Alves Silva

UNIOESTE

shimmer_alvesilva@outlook.com

Eduardo Rossoni Zeni

UNIOESTE

eduardo.rossonizeni@outlook.com

Resumo: O presente trabalho é um estudo sobre o uso de materiais manipuláveis, mais especificamente o algeplan no ensino de polinômios nos anos finais. A abstração da matemática é conhecida, então, convém ao educador buscar maneiras alternativas para facilitar a compreensão do aluno. O uso do algeplan no ensino de polinômios provou ser uma dessas alternativas. O projeto foi desenvolvido e aplicado no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas (Promat) para adolescentes entre quatorze e dezesseis anos. Pode-se concluir que os materiais manipuláveis, quando bem utilizados e com um propósito bem definido, resultam em aulas mais interessantes e no aprendizado significativo para os alunos.

Palavras-chave: Algeplan; Polinômios.

1 Introdução

Segundo Moro (2000), na história da matemática, os primeiros usos de polinômios surgiram em um contexto concreto na antiga Babilônia. Assumindo uma metodologia essencialmente geométrica, os matemáticos formulavam problemas que hoje seriam reconhecidos como problemas polinomiais com métodos que hoje chamamos de "completar o quadrado", embora sem recorrer à notação algébrica tradicional. O desenvolvimento subsequente do estudo dos polinômios se deu no século III d.C com Diofanto, matemático que introduziu uma abordagem com formas de representação que se assemelham mais ao sistema algébrico moderno (Kurt, 2008) do que com o sistema baseado na geometria.

No entanto, é pertinente observar o crescimento na elaboração e disponibilização de materiais manipuláveis que resgatam a abordagem geométrica dos babilônios para o estudo dos polinômios. Nesse contexto, ressalta-se o *algeplan*, cuja origem é desconhecida (Almeida, 2021), mas tem demonstrado potencial no fomento de aulas de matemáticas mais dinâmicas e reflexivas, favorecendo uma aprendizagem mais significativa nos conteúdos que abrangem a álgebra (Santos; Santos, 2014).

O presente relato tem como objetivo observar o uso do *algeplan* como material manipulável para o ensino de polinômios no ambiente do Promat, explorando suas possibilidades e limitações enquanto estratégia pedagógica no ensino de soma, subtração, multiplicação e fatoração de polinômios, com o intuito de justificar geometricamente as operações realizadas sobre polinômios.

2 Aprendizagem significativa e o uso de materiais manipuláveis

A aprendizagem não é uma propriedade extensiva do ensino, por mais eficaz que seja o mesmo. O ensino é apenas uma condição que pode influenciar na aprendizagem entre outras variáveis como a predisposição e a preparação cognitiva (uma prontidão em propriedades fundamentais e organizacionais de conhecimentos previamente adquiridos específicos relevantes na associação a novos conhecimentos). Porém precisa ser levado em conta que à finalidade da preparação do ensino é a facilitação da aprendizagem. (Farias, 2018)

Quando falamos sobre aprendizagem significativa de matemática, buscamos algo além da simples memorização e cálculos rápidos. Para Ausubel (Moreira, 2008), a aprendizagem é a associação e a fixação de um novo material na estrutura cognitiva já construída. Assim, para que haja uma aprendizagem significativa, novos conceitos e proposições se entrelaçam com conceitos já adquiridos.

De acordo com (Silva, 2004) o uso de materiais manipuláveis visa promover o desenvolvimento e estimular o processo de aprendizado dos alunos. Isso ocorre à medida em que o professor transforma o ensino, onde diversão e a aprendizagem se entrelaçam, o que resulta em uma experiência de aprendizado genuína, completa e prazerosa. No entanto requer seus cuidados, como ressalta Marques (2013), o uso do material manipulável pode ser um forte aliado nas aulas de matemática, porém, de forma alguma deve substituir o papel do professor, apenas completar a sua aula.

É claro que nem sempre o ensino resultará na aprendizagem, mesmo que exija um grande esforço docente para incluir o material manipulável, ele não pode se frustrar pois como Farias (2018) salienta, a finalidade de toda essa preparação que o professor desempenha é totalmente voltada para a facilitação da aprendizagem.

O material manipulável utilizado neste trabalho chama-se *algeplan*, ele é constituído por 40 peças coloridas das quais são divididas entre seis formas geométricas e separados entre três quadrados e três retângulos diferentes entre si, cujas medidas dos lados representam a unidade ou as variáveis. A ideia central do *algeplan* é facilitar a compreensão das operações algébricas (ex-

pressões algébricas, produtos notáveis, polinômios e fatoração) cada peça do material representa um valor algébrico considerando o valor de sua área.

3 Promat

O Promat é um curso de iniciativa promovida pela Unioeste. Este projeto é desenvolvido sob a supervisão do colegiado do curso de licenciatura em matemática.

O Promat é destinado a estudantes do Ensino Médio que almejam futuramente participar de vestibulares ou concursos, mas também abre suas portas para aqueles indivíduos que possuem interesse em aprofundar seus conhecimentos em Matemática. Este curso é realizado nas instalações da própria universidade, ao total são dez encontros aos sábados pelas manhãs.

4 Uma experiência no Promat

Em sala, os alunos foram divididos em grupos de quatro e cinco pessoas. Para cada grupo foi disponibilizado dois jogos completos do algeplan além das folhas sulfite para realizarem anotações. Nas aulas, dispúnhamos do projetor e assim apresentamos as dimensões já definidas (x , y e 1) como mostra a figura 1.

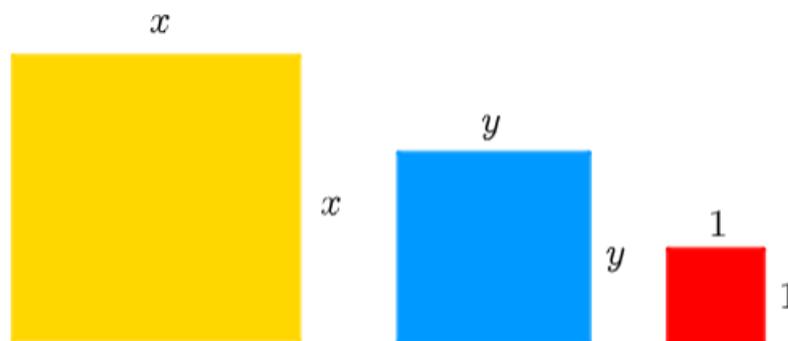
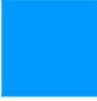


Figura 1: Peças algeplan

Fonte: Elaborado pelos autores

Na folha sulfite, com o auxílio dos quadrados de dimensões dadas, os alunos deveriam anotar os valores das dimensões de novas peças de dimensões desconhecidas, de acordo com o quadro 1:

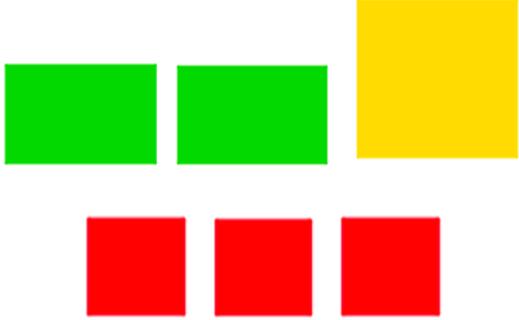
Quadro 1: Quadro com peças do algeplan

Figura	Dimensões	Perímetro	Área
			
			
			
			
			
			

Fonte: Elaborado pelos autores

Depois disso, os alunos foram instruídos a representar geometricamente alguns polinômios. Em seguida, precisaram representar de forma algébrica alguns conjuntos de figuras geométricas, como mostram os exemplos na quadro 2:

Quadro 2: Exemplos do uso do Algeplan

Representação dada	Representação apresentada pelos alunos
$2xy + x^2 + 3$	
	$y^2 + y + x$

Fonte: Elaborado pelos autores

Em seguida, foi feita a formalização do conteúdo de polinômios, porém de uma forma mais intuitiva, partindo da definição de monômios. Um monômio é formado por uma parte "algébrica", formalmente chamada de literal, e uma "constante, formalmente chamada de coeficiente; para nossos propósitos, um monômio é representado como uma única peça, ou uma coleção de peças similares. Definimos então um polinômio como uma expressão formada por soma ou subtração de monômios, fazendo referência ao conceito de área trabalhado no algeplan.

A partir desta definição, propomos a soma, subtração, multiplicação e fatoração de polinômios utilizando o algeplan:

Soma e subtração: na soma ou subtração de dois polinômios, só é possível operar os monômios que os compõem de partes literais iguais (só é possível somar/subtrair o número de quadriláteros cujas áreas são iguais);

Multiplicação e Fatoração: na multiplicação de dois polinômios, é necessário utilizar a propriedade distributiva. No algeplan é possível observar o que acontece na multiplicação ou fatoração ao formar um quadrilátero cujos lados são os polinômios que estão sendo multiplicados e somar a área do quadrilátero formado.

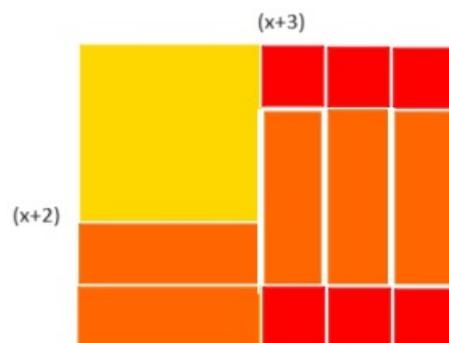


Figura 2: Exemplos de fatoração

Fonte: Elaborado pelos autores

Ao iniciarmos a atividade, o primeiro conceito que precisou ser apresentado a todos foi sobre como representar a dimensão de um retângulo. Primeiramente destacamos os lados de um quadrado e concluímos que todos os lados são iguais, com isso partimos para as dimensões do retângulo. Com o quadrado e o retângulo em mãos observamos, colocando um ao lado do outro, que um de seus lados era do mesmo tamanho do quadrado de lado um e a outra medida tinha o mesmo valor do lado do quadrado de lado x , concluindo que as dimensões desse retângulo são x e 1 , sua área é de $x \cdot 1 = x$. Solicitamos para que os alunos realizassem com as demais peças.

Além disso, alguns alunos não souberam identificar as diferenças entre perímetro e área, o que precisou ser revisado nos grupos. No cálculo do perímetro dos quadriláteros, introduzimos o conceito de soma de polinômios onde foi possível perceber a dificuldade de identificar que a soma deve apenas ser realizada com monômios de partes literais iguais. Nesse contexto, mesmo antes da formalização dos conteúdos, foi possível observar desafios enfrentados pelos alunos, como a dificuldade de identificar o significado de um polinômio no mundo real, e iniciar o processo de

tratá-los.

Foi, também, um obstáculo para os alunos compreenderem o processo de multiplicação de polinômios. Com o algeplan, nosso objetivo foi de visualizar a multiplicação por meio do cálculo de área de retângulos, onde cada um dos lados seria dado por um polinômio, logo, a multiplicação resultaria na soma das áreas das peças utilizadas para representar seus lados

Durante essa atividade, os alunos não conseguiram de imediato visualizar como formar os retângulos de lados iguais aos dos polinômios dados $(x + 2)$ e $(x + 3)$. Por consequência disto, foi necessário um acompanhamento mais de perto da parte dos professores, comparando os valores escritos com as peças, fazendo-os compreender por exemplo que, $(x + 2)$ equivale a uma peça que tenha lados x e mais duas peças de lado um, além disso foi instruído a forma de completar suas áreas por estarmos tratando de multiplicação.

Conclusões

Com base no que foi apresentado, conclui-se que o uso de materiais manipuláveis, como o algeplan, promove um momento de verificação e superação de obstáculos epistemológicos utilizando-se de recursos visuais de forma lúdica para evitar certa repulsa que alguns alunos podem ter por uma ideia abstrata, para que assim o professor possa intervir e auxiliar o aluno em seu processo de aprendizagem.

Referências

ALMEIDA, V. D. D. **algeplan como recurso didático nas aulas do 8º ano do ensino fundamental**. 2021.

KURT, V. Diophantus of Alexandria. **Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com**. Disponível em: <https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/diophantus-alexandria#2830901182>. Acesso em: 15 de nov. de 2023.

MARQUES, Telma Inês Neves. **A implementação de materiais pedagógicos no 1.º Ciclo**. 2013. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Escola Superior de Educação João de Deus, Lisboa, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10400.26/3926>. Acesso em: 13 nov. 2023.

MOREIRA, M. A. **Organizadores prévios e aprendizagem significativa**. [s.d.].

MORO, M. DE O. **Um estudo sobre polinômios**. 2000.

ORNELLAS FARIAS, A. J. **A PSICOLOGIA EDUCACIONAL DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA APLICADA A PROGRAMAÇÃO ESCOLAR**. Revista Psicologia & Saberes, [S. l.], v. 7, n. 8, p. 20–40, 2018. DOI: 10.3333/ps.v7i8.772. Disponível em: <https://revistas.cesmac.edu.br/psicologia/article/view/772>. Acesso em: 17 nov. 2023.

SANTOS, M. G. B e SANTOS, M. L. S. **Algeplan - uma proposta dinâmica para o ensino da álgebra escolar**. 2014

SILVA, M. S. **Clube de Matemática: Jogos Educativos**. Campinas, SP, Papyrus Editora, 2005.

Geração imediatista: os desafios no ensino da Matemática

Milena Maciel Romão
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
milena.romao@unioeste.br

Stephany Amanda Parteka
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
stephany.parteka@unioeste.br

Resumo: Neste trabalho são abordados alguns dos desafios que envolvem a Educação na geração Z, mais precisamente, a Educação Matemática. Esta geração é acelerada e ansiosa o que impacta diretamente no ensino e nas relações interpessoais. Dessa forma, é indispensável que o ambiente escolar se adapte às transformações de modo a estar o mais preparado possível para lidar com os alunos. Por fim, relatamos a experiência vivenciada no período da regência que nos motivou a refletir sobre este cenário e escrever sobre o tema.

Palavras-chave: Educação matemática; desafios; geração Z.

1 Introdução

A Matemática é uma ciência antiga, trabalhada nas escolas, e que desempenha papel fundamental na formação do aluno, pois desenvolve o raciocínio lógico, a criatividade e a abstração. Além disso, está presente em várias atividades do cotidiano e em quase todas as áreas do saber. Apesar da sua importância, não é de hoje que a matemática é por vezes percebida como uma disciplina complicada e “para poucos”. Ensinar Matemática é uma batalha desde os primeiros anos de ensino, colocando os alunos em uma posição desafiadora. Isso ocorre porque, antes mesmo de tentarem resolver um problema, muitos já estão conformados com a derrota, concebendo que a dificuldade é natural e somente quem tem aptidão conseguirá aprender. Além disso, Ramos (2007, p. 73) afirma que

[...] a forma como os amigos, os familiares, os meios de comunicação social e a própria escola concebem a matemática (valorizando-a mais ou menos, considerando-a mais ou menos difícil, mais ou menos útil, mais ou menos interessante etc.) contribui, conjuntamente com os dados da sua experiência individual, para a forma como o indivíduo vai construindo a sua representação da matemática (Ramos, 2007, p.73).

Desse modo, o professor de Matemática enfrenta o primeiro desafio antes mesmo de entrar em sala de aula: as concepções. Ademais, outro tópico que contribui com o desinteresse pela matéria é a utilização de metodologias tradicionais. Esse tipo de abordagem é pautado na memorização e no paradigma do exercício, colocando o aluno como ser passivo no processo de aprendizagem. De acordo com Oliveira (2019, p. 3)

O ensino tradicional não consegue dar a devida resposta em termos de aprendizagem frente as demandas oriundas das transformações sociais recentes, tais como a recente popularização das tecnologias de informação e comunicação (Oliveira, 2019, p.3).

Nesse sentido, torna-se fundamental abordagens metodológicas que fazem uso de atividade lúdicas, jogos e alternativas que melhor promovam o desenvolvimento e a assimilação do conteúdo e coloquem o aluno como protagonista. Isso mostra a necessidade de aperfeiçoar o ensino da Matemática no âmbito da educação.

Com o passar dos anos e a ascensão do mundo digital surgiram novos desafios, entre eles a introdução de tecnologias e aparelho digitais em sala de aula. Os indivíduos estão constantemente conectados e recebem um bombardeio de informações diárias. Segundo Junger *et al* (2018, p. 5),

A Geração Z cresceu e, ainda, está crescendo em um mundo sempre conectado e móvel, com aplicativos de mensagens que lhes permitem conectar-se instantaneamente e sem esforço a qualquer pessoa em todo o mundo e em tempo real (Junger et el, 2018, p. 5).

A geração Z é o termo utilizado para se referir ao conjunto de pessoas que nasceram entre os anos de 1995 e 2010. Essa geração é fortemente marcada pelo advento da internet e é conhecida por dominar as ferramentas digitais, sendo tolerante, autônoma e se afastando de rótulos. Ela é sucessora da geração Y, também chamada de Millennials (nascidos entre 1980 e 1994), e antecessora da geração Alpha (nascidos a partir de 2010).

À vista disso, a geração Z é uma produtora ininterrupta de dados e convive com a superinformação e a desinformação simultaneamente. Isso porque, ao mesmo tempo que tem disponível uma grande quantidade de informações, não se aprofunda em nada.

Dessa forma, acostumados com a rapidez do mundo digital, os alunos atuais são ansiosos e imediatistas e esse é mais um dos desafios contemporâneos a serem superados pelos docentes da Matemática.

2 Educação Matemática e a geração Z

Segundo pesquisa do site da revista Exame (2021), 95% dos alunos saem do ensino médio sem conhecimento adequado em matemática. Dados como este são preocupantes no que diz respeito à formação integral do indivíduo e sua preparação para o ensino superior, bem como para seu próprio desenvolvimento na sociedade.

A forma como o professor aborda e conduz as aulas pode impactar diretamente na compreensão, engajamento e interesse dos alunos pela disciplina. Dessa forma, é indispensável que o educador busque constantemente por melhorias e aperfeiçoamentos em

sua forma de ensinar, a fim de enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Brandt e Moretti (2016, p. 63):

Atualmente, são várias as teorias e os caminhos que um professor de matemática pode utilizar em seu planejamento. Constitui-se um desafio, nos diferentes níveis de ensino, a utilização dessas contribuições como elementos que possam viabilizar a elaboração e o desenvolvimento de propostas que possibilitem a aprendizagem e o desenvolvimento dos envolvidos no processo (Brandt e Moretti, 2016, p. 63).

Sob essa perspectiva, o professor desempenha um papel importante na contextualização dos conceitos matemáticos. Relacioná-los com situações do cotidiano e com outras disciplinas é uma opção, pois ajuda os alunos a entenderem a relevância da Matemática em suas vidas e a aplicá-la em diferentes contextos, tornando o aprendizado mais significativo.

Também é relevante considerar a implementação de aulas dinâmicas e interativas. De acordo com Ribeiro (2013, p.1) é fundamental deixar claro aos alunos que esse tipo de abordagem não se trata apenas de "diversão", mas possui uma justificativa pedagógica e visa o aprendizado de conteúdos matemáticos específicos.

Utilizar abordagens efetivas – conjunto de estratégias, técnicas e práticas que auxiliam o aluno a construir seu conhecimento a respeito de um determinado tema – para o ensino da matemática têm como objetivo desenvolver as habilidades cognitivas e perceptivas dos alunos, proporcionando uma compreensão mais profunda dos conceitos e estimulando o pensamento criativo.

Ao envolver os alunos ativamente na construção de novos conceitos, relacionando-os com seus conhecimentos prévios e experiências, a aprendizagem se torna mais pessoal e motivadora. Isso estimula o pensamento crítico, o engajamento e a retenção do conhecimento, além de promover habilidades práticas que refletirão de maneira positiva em todas as áreas da vida do indivíduo. Ao colocar o aluno como protagonista da própria aprendizagem, o processo de construção do conhecimento promove o desenvolvimento de competências necessárias para enfrentar desafios e aplicar o conhecimento de forma efetiva na vida cotidiana.

Ao atingir esse objetivo, o aluno cumprirá a sexta competência específica da Base Nacional Comum Curricular para a disciplina de Matemática no Ensino Fundamental, que consiste em:

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas res -postas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna (BRASIL, p. 225, 2018).

Por outro lado, com o crescente avanço da tecnologia digital na vida cotidiana, surgem novos desafios sociais e comportamentais. Nesse contexto, o acesso excessivo e

descontrolado às tecnologias pode levar a uma dependência digital. Segundo Schwartz (2005 apud NARDON, 2006), a internet está cada vez mais presente no cotidiano das pessoas, principalmente na vivência dos jovens. Os adolescentes, como um segmento social que é mais susceptível às transformações das tecnologias digitais, herdaram a facilidade de adquirir um vício. Assim, a tecnologia pode contribuir para o isolamento social, afetando a habilidade dos adolescentes em se relacionarem e dificultando a distinção entre a realidade e o mundo virtual, o que prejudica o aprendizado em sala de aula.

Á vista disso, como o processo de construção e assimilação do conhecimento é complexo, e para a geração Z tudo que exige esforço e tempo é desinteressante. Muitos alunos tendem a buscar os caminhos mais fáceis para resolver problemas evitando, assim, o esforço cognitivo necessário para um aprendizado mais profundo. Para Mattoso (2010, p. 31):

Em pleno século XXI onde a tecnologia está cada dia mais avançada, as pessoas adquirem doenças e problemas psicológicos frequentemente. A tecnologia com os processos de automação leva as pessoas a assumirem uma vida sedentária, já que, a comodidade, rapidez e flexibilidade na aquisição de informação diminuem o esforço das pessoas em buscar fontes alternativas de lazer, trabalho e estudo (Mattoso, 2010, p. 31).

Levando em consideração os fatores que contribuem para a dificuldade de aprendizagem, é importante reconhecer que o educador desempenha um papel crucial na superação dessas dificuldades na geração atual. O professor deve atuar como facilitador do conhecimento, promovendo a reflexão sobre as dificuldades encontradas e buscando aprimorar as metodologias e atividades utilizadas ao longo do processo de ensino. Nessa direção, Reis (2005, p. 173) estipula que “é fundamentalmente necessário refletir sobre o papel do professor no processo de ensino-aprendizagem e a posição do professor enquanto participante numa história de insucesso, em particular no caso da Matemática”.

Por conseguinte, o professor deve utilizar todas as ferramentas ao seu alcance para aprimorar o ensino dentro da sala de aula, de modo a possibilitar a assimilação do conhecimento matemático em um cenário que coloca os discentes como autores de sua própria aprendizagem.

3 Vivência em sala de aula

Durante a regência – aulas vinculadas a um componente curricular obrigatório do curso de Matemática: o Estágio Supervisionado – abordamos o conteúdo de equações do segundo grau em uma turma do nono ano do Ensino Fundamental (Anos Finais). A turma era composta por 29 alunos matriculados. Ao longo das aulas, buscamos trabalhar com atividades que permitissem a construção do conhecimento aos poucos. Por isso, iniciamos o estágio com

aulas que envolviam jogos e circuitos e, à medida que as aulas foram avançando, introduzimos conceitos e aumentamos o grau de dificuldade das atividades.

Ao longo das aulas, as escolhas e preferências dos alunos começaram a nos chamar a atenção. Primeiro observamos que a turma não tinha o costume de realizar tarefas, mesmo quando avisávamos com antecedência que era uma atividade importante. Dessa forma, era perdida a oportunidade de rever o conteúdo, o que contribuiria com a assimilação. Também percebemos que vários estudantes não tinham o costume de prestar atenção nas correções, tampouco registrá-las. Ademais, a maioria dos cálculos eram realizados na calculadora do celular e quando solicitávamos que não a utilizassem os alunos demonstravam um certo desânimo e bastante dificuldade para realizar as operações.

Optamos por trabalhar a fórmula resolutiva para equações do segundo grau (Bhaskara) como a primeira técnica de resolução de equações quadráticas. Essa temática levou cerca de duas aulas, considerando explicações e exercícios. Na sequência, abordamos o método do completamento de quadrados durante ao menos três aulas da regência. A rejeição foi enorme. Os alunos não gostaram do método e repetiam constantemente que preferiam utilizar a fórmula resolutiva para equações do segundo grau. De início, pensamos que essa situação fosse mudar ao longo das atividades, conforme trabalhássemos mais vezes o método. Porém, a situação persistiu até a última semana.

Todavia, a maior surpresa foi quando corrigimos as atividades avaliativas. Muitos dos alunos que repetiam não gostar do método do completamento de quadrados o utilizaram na prova e atividades de recuperação. Após as correções e conversando com nosso orientador, percebemos que o real motivo da rejeição nas aulas não era pela turma achar o método o mais difícil. Pelo contrário, os discentes perceberam que o completamento de quadrados se tratava de um método mais intuitivo, no entanto exigia maior empenho e raciocínio lógico que a memorização e aplicação de uma fórmula. Como foram colocados em um contexto em que não tinham acesso à fórmula ou como aplicá-la recorreram ao segundo método.

Sob essa perspectiva, percebemos ao decorrer das aulas o quão os alunos tinham pressa em terminar os cálculos e as tarefas rapidamente, bem como tudo aquilo que exigia mais esforço e tempo era desinteressante e até, deixado de lado. Na nossa percepção, com as tecnologias digitais os indivíduos estão acostumados com informações rápidas e prontas. Por estarem habituados com esse cenário, os alunos o trouxeram para a sala de aula. No entanto, é fundamental ressaltar que o conhecimento verdadeiramente significativo e duradouro não é adquirido de forma instantânea. A aprendizagem requer tempo, esforço e dedicação.

Conclusões

Ao longo do trabalho, percebemos que são vários os desafios que envolvem educar matematicamente a geração atual. Entre eles, destacamos a rejeição histórica pela disciplina, o uso de metodologias tradicionais, as novas tecnologias e sua influência na superinformação e desinformação.

A experiência oportunizada pelo estágio nos colocou diante desse cenário e nos fez refletir sobre o papel do professor e do aluno em sala de aula. Entendemos que incentivar o espírito de investigação matemática estimula os estudantes a explorar, questionar e buscar soluções por meio da experimentação e da busca ativa de conhecimento. Essa competência promove a curiosidade, o pensamento crítico e a autonomia intelectual dos alunos, permitindo que eles se tornem agentes ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Entretanto, o conhecimento matemático não envolve apenas o domínio dos conceitos, mas também a habilidade de comunicar ideias, apresentar justificativas, propor exemplos e contraexemplos, e analisar criticamente os argumentos apresentados por outros. Esse é um processo complexo e demorado frente a uma geração imediatista.

Portanto, observamos a necessidade de se estabelecer um contrato didático já nos primeiros momentos em sala de aula, para que as duas partes envolvidas (professor e aluno) tenham a oportunidade de destacar seus interesses e necessidades. Além disso, é importante fortalecer vínculos e conhecer mais profundamente os estudantes, identificando as estratégias que mantêm a atenção e o foco durante mais tempo. Por atuarmos como estagiárias, não pudemos avaliar as respostas e a evolução da turma para além do estágio. Ainda assim, buscamos proporcionar um ensino dinâmico e significativo e esperamos que a experiência tenha sido tão positiva para os alunos quanto foi para nós.

Referências

BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu. **Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa** [online]. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, 307 p. ISBN 978-85-7798-215-8. Disponível em:
<http://books.scielo.org/id/dj9m9/pdf/brandt-9788577982158.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

ESTADÃO CONTEÚDO. 95% dos alunos saem do ensino médio sem conhecimento adequado em matemática. **Exame**, 24 fev. 2021. Disponível em: <https://exame.com/brasil/95-dos-alunos-saem-do-ensino-medio-sem-conhecimento-adequado-em-matematica/>. Acesso em: 5 jul. 2023.

JUNGER, Alex Paubel; AMARAL, Luiz Henrique; LEITE, Guilherme Henrique Coiado; PETARNELLA, Leandro; LUI, Marcio de La Cruz. A geração imediatista e a comunicação audiovisual. **Research, Society and Development**, vol. 7, núm. 11, p. 01-27, 2018. Disponível em: <https://www.redalyc.org/journal/5606/560659018005/html/>. Acesso em: 03 jul. 2023.

MATTOSO, R. Tecnologia X sedentarismo. **Salada textual**, 2010. Disponível em: <http://saladatexual.wordpress.com/2010/04/04/tecnologia-x-sedentarismo/>. Acesso em: 03 jul. 2023.

NARDON, F. **A relação interpessoal dos adolescentes no mundo virtual e no mundo concreto**. Trabalho de Conclusão de Curso. Criciúma: Universidade do Extremo Sul Catarinense; 2006.

OLIVEIRA, Marcelo de Sousa. Uma reflexão sobre a ideia de superação do ensino tradicional na educação matemática: a dicotomia entre a abordagem clássica e abordagens inovadoras em foco. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 7, n. 14, p. 79–93, 2019. DOI: 10.5965/2357724X07142019079. Disponível em: <https://www.periodicos.udesc.br/index.php/boem/article/view/16816>. Acesso em: 05 jul. 2023.

RAMOS, Marise. **Concepção do Ensino Médio integrado**. Disponível em: http://forumeja.org.br/go/sites/forumeja.org.br.go/files/concepcao_do_ensino_medio_integra_do5.pdf. Acesso em: 03 jul. 2023.

RIBEIRO, Suely de Souza. **A Importância do Lúdico no Processo de Ensino-Aprendizagem no Desenvolvimento da Infância**. 2013. Disponível em: <https://psicologado.com/atuacao/psicologia-escolar/a-importancia-do-ludico-no-processo-de-ensino-aprendizagem-no-desenvolvimento-da-infancia>. Acesso em: 20 abr. 2024.

REIS, Leonardo Rodrigues dos. **Rejeição à matemática: causas e formas de intervenção**. Monografia do curso de graduação em Matemática. Universidade Católica de Brasília. 2005. Disponível em: <https://repositorio.ucb.br/jspui/bitstream/10869/1737/1/Leonardo%20Rodrigues%20dos%200%20Reis.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2023.

O uso dos jogos no ensino da Matemática

Theo Fernando Bonfim da Luz
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
theofernandobdaluz@gmail.com

Luiza Stunder
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
luiza.stunder@hotmail.com

Márcio Vinícius Rocha Miranda
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Raianny Vitória Zerneh
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Resumo: O uso de jogos no ensino da matemática constitui uma tendência de educação chamada “gameificação”, que vem ganhando muito espaço dentro do ensino nos últimos anos. O objetivo dessa prática é aplicar técnicas e dinâmicas lúdicas para enriquecer o contexto do ensino-aprendizagem, normalmente com jogos completamente novos ou modificações de jogos já conhecidos. O presente artigo tem o objetivo de estudar a psicologia do jogo para a perspectiva do aluno, à luz de ideias de estudiosos do meio. Ademais, houve uma experiência prática durante a realização do PROMAT do ano civil de 2023 onde foi possível relacionar o que aconteceu nessa prática com as ideias anteriormente descritas. Apesar do jogo normalmente ser associado com crianças e a tenra idade, ele constitui um forte elemento de ensino alternativo onde coloca os alunos como protagonistas da aula.

Palavras-chave: jogo; tendências em educação matemática; gameificação.

1 Introdução

A intersecção entre a Psicologia do Jogo e o ensino da Matemática revela-se como uma área de pesquisa fundamental diante dos desafios encontrados no processo educacional. A dificuldade em despertar o interesse dos alunos por conteúdos considerados maçantes e complexos, especialmente no caso da Matemática, é uma realidade amplamente reconhecida (Lacnallo e Mori, 2016). A naturalização da ideia de que a Matemática é uma disciplina difícil contribui para a formação de barreiras que impedem a aprendizagem, conforme observado por esses autores.

Diante desse cenário, Lacanallo e Mori (2016) propõem a utilização do jogo como uma ferramenta para reverter experiências negativas e criar novas abordagens de ensino. No entanto, ressaltam que o jogo, por si só, não é suficiente e defendem a necessidade de uma reestruturação abrangente e dialética do processo de ensino. Essa perspectiva é corroborada pela teoria histórico-cultural, que relaciona o jogo com questões de aprendizagem e desenvolvimento.

Neste contexto, a presente pesquisa explora a natureza psicológica do jogo, destacando a perspectiva de Jean Piaget no ensino da Matemática. Piaget, precursor da teoria construtivista, enfatizou a importância dos jogos, brincadeiras e atividades lúdicas no desenvolvimento e aprendizagem infantil. Sua teoria estrutura-se em processos como assimilação, acomodação e equilíbrio, delineando um percurso de desenvolvimento cognitivo.

A fim de aplicar esses conceitos de forma prática, desenvolvemos uma experiência centrada no jogo de cobras e escadas, alinhado com a proposta de explorar o potencial dos jogos no contexto educacional. A escolha desse jogo específico foi embasada em sua capacidade de engajar os alunos, oferecendo uma abordagem lúdica e interativa para o aprendizado matemático. A adaptação do jogo incluiu questões que exigiam a modelagem de equações e a resolução de sistemas lineares, proporcionando uma oportunidade para o desenvolvimento de habilidades conceituais.

2 A psicologia do jogo e seu impacto no ensino da Matemática

Percebe-se que é bem difícil trazer o interesse dos alunos com conteúdo maçante e explicações longas. Segundo Lacanallo e Mori

É possível identificar nos discursos o quanto a ideia de matemática como uma ciência difícil é naturalizada e inquestionável para muitos. Os alunos expressam o grau de dificuldade diante das tarefas propostas, verbalizam experiências negativas com a disciplina, criando barreiras que as afastam da condição e possibilidade de aprendizagem. (Lacanallo; Mori, 2016, p. 662)

De acordo com Lacanallo e Mori (2016), propor o uso do jogo como meio de reverter essas situações de não aprendizagem é algo considerado aceitável por esses indivíduos, embora seja inicialmente crucial para a construção de novas abordagens de ensino, isso, por si só, não é suficiente. É imperativo buscar uma reestruturação abrangente e dialética do processo de ensino, dessa forma, o jogo será compreendido como um recurso metodológico essencial na organização do ensino de matemática, concebendo-o não como algo isolado das demais questões relacionadas à atividade humana. Lacanallo e Mori (2016, p. 663) ainda enfatiza que “Falar de jogo implica, na perspectiva histórico-cultural, relacioná-lo com questões de aprendizagem e desenvolvimento.”

Os pressupostos da teoria histórico-cultural, a primeira constatação que se faz é que a infância tem um caráter histórico e cada idade tem peculiaridades próprias que se modificam com o decorrer da vida. (Lacanallo; Mori, 2016, p. 663)

Elkonin (1998), que serviu como base teórica de Lacanallo e Mori, analisou a essência que permeia a infância até a adolescência, destacando que a investigação dos aspectos evolutivos do pensamento, linguagem e personalidade, juntamente com as peculiaridades dos processos de aquisição da leitura e escrita, deve ser conectada às questões inerentes à educação e ao ensino. Os trabalhos do autor tornaram-se uma teoria sobre os jogos e Elkonin espera que:

[...] proceder a uma análise crítica e histórica das teorias fundamentais do jogo [...] cujo objetivo principal é revelar a inconsistência do enfoque naturalista do jogo, predominante nas principais teorias propostas em outros países, contrapondo-lhe o enfoque sócio-histórico da origem e desenvolvimento do jogo humano, sem o qual tampouco se pode compreender a sua natureza psicológica. (Elkonin, 1998, p. 9)

Para Lacanallo e Mori (2016), a compreensão das operações mentais necessárias para a formação de conceitos. Ele destaca a autonomia do aluno na realização dessas operações, progredindo desde a orientação inicial até a constituição definitiva da operação mental. Essa abordagem é cuidadosamente incorporada à proposta pedagógica, que reconhece o jogo como uma atividade que não apenas motiva, mas também possibilita a realização dessas operações mentais, promovendo uma verdadeira imersão na formação conceitual.

3 Explorando a natureza psicológica do jogo: uma perspectiva à luz de Jean Piaget para o ensino da Matemática

De acordo com Oliveira e Albrecht (2021), Jean Piaget, um dos precursores da teoria construtivista, dedicou-se a desbravar os intrincados caminhos da cognição humana, focalizando especialmente o desenvolvimento infantil. Desde o nascimento até a fase adulta, Piaget delineou um percurso marcado por processos fundamentais: assimilação, acomodação e equilíbrio, que constituem a essência da construção do conhecimento. Sua observação aguçada levou-o a notar padrões comuns de erros entre crianças da mesma faixa etária, catalisando a elaboração de uma teoria estruturada em quatro períodos cruciais. Segundo os autores:

Piaget e sua teoria do construtivismo de desenvolvimento intelectual e as fases do desenvolvimento, teve uma grande contribuição para a educação, em especial no Brasil, a partir da década de 1980, o qual criou condições de se pensar no processo de ensino-aprendizado do aluno, o qual levou professores a planejarem atividades adequadas para a sua faixa etária e fase do desenvolvimento de cada criança. (Oliveira; Albrecht, 2021, p. 5)

De acordo com Oliveira e Albrecht, Piaget conferiu uma significativa importância aos jogos, brincadeiras e atividades lúdicas no processo de desenvolvimento e aprendizagem. Para ele, “o conceito de jogo envolvia a ação de brincar, sendo uma atividade intrinsecamente ligada à infância e de fundamental importância para o desenvolvimento e aprendizado da criança. Piaget categorizou o jogo em três tipos distintos: o jogo simbólico, o de regra e o de exercício.” (citado por Oliveira e Albrecht 2021, p. 06).

Ainda por Oliveira e Albrecht, os jogos de exercício caracterizam-se como atividades na primeira infância, em que o bebê manipula objetos por meio de ações repetitivas, visando seu

próprio prazer. Entre os 2 e 4 anos, emergem os jogos simbólicos, marcados pelo faz de conta, nos quais a criança utiliza a imaginação para representar situações e comportamentos. Essa fase revela-se de importância crucial, pois é nela que a criança desenvolve habilidades fundamentais, como a leitura e a escrita.

Segundo Piaget, conforme citado por Oliveira e Albrecht (2021, p. 06) “através dos jogos de regras, as atividades lúdicas atingem um caráter educativos, tanto na formação psicomotora, como também na formação da personalidade da criança”. Para Oliveira e Albrecht, Piaget entendia o jogo com algo do dia a dia, por conta disso a assimilação é natural.

Ao longo de sua extensa obra sobre jogos e brincadeiras, Piaget define o jogo como algo natural, ao próprio da criança, do seu dia a dia, mas que não são apenas um meio de diversão e entretenimento, mas sim um tempo de um aprendizado e desenvolvimento intelectual. Quando as crianças jogam eles assimilam e podem transformar a sua realidade. O professor quando proporciona atividades lúdicas através de jogos e brincadeiras está desenvolvendo no aluno o seu conhecimento, seu caráter e sua forma de se relacionar com outras pessoas. (Oliveira; Albrecht, 2021, p. 6)

4 Experiência prática

Durante o PROMAT, programa do colegiado do curso de Licenciatura em Matemática que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino com práticas que são direcionadas aos estudantes que buscam acesso aos cursos superiores, tornou-se claro já na primeira aula que práticas tradicionais de ensino não bastavam. Na busca por estratégias inovadoras para o ensino da matemática, recorremos constantemente ao uso do jogo e do lúdico como forma de ensino. Dentre os vários jogos aplicados ao decorrer de dez sábados, destaca-se um: o jogo de cobras e escadas. Este jogo foi escolhido devido à sua capacidade de engajar os alunos, proporcionando uma abordagem lúdica e interativa para o aprendizado matemático. A escolha do jogo está alinhada com a proposta de explorar o potencial dos jogos no contexto educacional.

O objetivo principal desta experiência foi investigar como o jogo de cobras e escadas poderia favorecer a formação do pensamento teórico dos alunos no âmbito matemático. Buscamos criar um ambiente dinâmico que estimulasse o desenvolvimento de habilidades conceituais, especialmente na modelagem e resolução de equações, além de proporcionar uma oportunidade para aprimorar a capacidade matemática dos participantes.

Segundo Grando, esse objetivo caracteriza um dos sete momentos de intervenção pedagógica.

Intervenção pedagógica verbal: Depois dos três momentos anteriores, os alunos passam a jogar agora contando com a intervenção propriamente dita. Trata-se das intervenções que são realizadas verbalmente, pelo orientador da ação, durante o movimento do jogo. Este momento caracteriza-se pelos questionamentos e observações realizadas pelo orientador da ação a fim de provocar os alunos para a realização das análises de suas jogadas (previsão de jogo, análise de possíveis jogadas a serem realizadas, constatação de “jogadas erra-

das” realizadas anteriormente etc.). Neste momento, a atenção está voltada para os procedimentos criados pelos sujeitos na resolução dos problemas de jogo, buscando relacionar este processo à conceitualização matemática. (Grando, 2007, p. 4)

O jogo de cobras e escadas foi escolhido por sua versatilidade e capacidade de integração com os conceitos matemáticos. Optamos por adaptar o jogo, incorporando questões que exigiam a modelagem de equações e resolução de sistemas lineares, o conteúdo que estávamos trabalhando com a turma no momento. Esta adaptação foi realizada com o objetivo de criar uma experiência que atendesse aos objetivos educacionais propostos.

A experiência foi conduzida em grupos de quatro alunos, cada um recebendo um tabuleiro, cartões e dados. A dinâmica do jogo foi explicada, e os alunos foram encorajados a trabalhar colaborativamente. A presença de quatro estagiários permitiu um suporte individualizado, garantindo que cada grupo recebesse a atenção necessária.

Conforme Macedo e citado por Grando:

A discussão desencadeada a partir de uma situação de jogo, mediada por um profissional, vai além da experiência e possibilita a transposição das aquisições para outros contextos. Isto significa considerar que as atitudes adquiridas no contexto de jogo tendem a tornar-se propriedade do aluno, podendo ser generalizadas para outros âmbitos, em especial, para as situações de sala de aula. (Macedo, 2000, p. 23)

Durante a atividade, observamos um envolvimento significativo dos alunos, evidenciado pelo uso efetivo de mapas mentais e anotações do quadro para modelagem e resolução de equações. Surgiram dúvidas, especialmente nas questões que exigiam a formulação de equações e a resolução de sistemas lineares, indicando áreas que poderiam ser mais exploradas em futuras atividades.



Figura 1: Alunos brincando com o jogo das escadas e serpentes

Fonte: acervo dos estagiários

Ao analisar os resultados à luz das teorias de Piaget (1978) e Elkonin (1998), podemos destacar como o jogo de cobras e escadas se tornou uma ferramenta pedagógica que promoveu o desenvolvimento cognitivo dos alunos, proporcionando uma abordagem prática e dinâmica para a aprendizagem matemática.

Conclusões

Em síntese, a aplicação de jogos no ensino da matemática emerge como uma estratégia pedagógica enriquecedora e transformadora. Ao considerar as contribuições de renomados teóricos, como Piaget e Elkonin, percebemos que os jogos não são meramente instrumentos manipuláveis, mas sim um elemento intrínseco ao desenvolvimento cognitivo e cultural dos alunos.

A compreensão do jogo como atividade lúdica transcende a mera diversão, ganhando relevância na formação da cultura e na criação de representações mentais. O uso do jogo na educação matemática não é apenas uma estratégia para tornar o aprendizado mais atraente, mas também uma ferramenta que permite aos alunos assimilar, transformar e criar um conhecimento sólido. A análise prática da experiência com o jogo de cobras e escadas revelou um envolvimento significativo dos alunos, destacando a eficácia do jogo como uma abordagem dinâmica para o ensino de conceitos matemáticos.

Diante disso, a proposta de integração dos jogos no processo de ensino mostra-se promissora, contribuindo não apenas para o desenvolvimento cognitivo, mas também para a formação de habilidades conceituais e a superação das barreiras percebidas em relação à matemática. No entanto, é crucial reconhecer que o uso eficaz dos jogos requer uma abordagem pedagógica abrangente, considerando o contexto cultural, a diversidade de aprendizes e a integração cuidadosa com os objetivos educacionais.

Assim, ao explorar a complexidade da atividade lúdica e sua influência na formação cultural, este estudo propõe uma reflexão mais profunda sobre o papel transformador dos jogos no ensino da matemática, destacando sua capacidade de transcender a dicotomia entre jogo e trabalho. Ao reconhecer o potencial dos jogos como instrumentos pedagógicos valiosos, esperamos contribuir para uma abordagem mais inovadora e eficaz no ensino da matemática, promovendo uma verdadeira imersão na formação conceitual dos alunos.

Referências bibliográficas

ELKONIN, D. B. *Psicologia do jogo*. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

GRANDO, Regina Célia. **O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação)**. Campinas, SP, FE/ UNICAMP, 1995, 175p.

GRANDO, Regina Célia. **Concepções Quanto ao Uso de Jogos no Ensino da Matemática**. Disponível em: CONCEPÇÕES QUANTO AO USO DE JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA (usp.br). Acesso em 18. Out de 2023.

LACANALLO, Luciana Figueiredo; MORI, Nerli Nonato Ribeiro. **“Psiu, estou jogando!!”**: o jogo no ensino da Matemática. Disponível em: Vista do “Psiu, estou jogando!!”: o jogo no ensino da Matemática (pucpr.br). Acesso em 17. Out de 2023.

OLIVEIRA, Denise Neumann; ALBRECHT, Ana Rosa Massolin. **Uso de Jogos e Brincadeiras para o Desenvolvimento e Aprendizagem**. Disponível em: <https://repositorio.uninter.com/bitstream/handle/1/746/USODEJ~1.PDF?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 18. Out de 2023